

## ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КОЛЕСНОЙ МАШИНЫ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Р. А. Мусарский, Н. А. Фуфаев

(Горький)

Рассматривается динамика простейшей модели колесной машины в области устойчивости при наличии постоянно действующих малых возмущений, имеющих как детерминированный, так и случайный характер.

Исследование путевой устойчивости колесных машин обычно сводится к определению областей значений параметров, при которых движение системы устойчиво, и к исследованию характера переходного процесса в области устойчивости. Практический интерес представляет рассмотрение динамики системы в области устойчивости при наличии постоянно действующих малых возмущений, имеющих как детерминированный, так и случайный характер (неровности микропрофиля дороги, ветровая нагрузка). Такое исследование позволяет оценить разброс координат в зависимости от значений параметров, лежащих в области устойчивости, и решать задачи оптимизации этих параметров.

**1. Постановка задачи.** Ради упрощения выкладок рассмотрим случай неуправляемого движения простейшей модели колесной машины в горизонтальной плоскости. Уравнения движения, составленные с использованием гипотезы увода Рокара [1], имеют вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x_1 \dot{\phantom{x}} &= -Ax_1 - Ax_2 - Bx_3 + \xi_1 + \xi_2 \\ x_2 \dot{\phantom{x}} &= x_3 \\ x_3 \dot{\phantom{x}} &= -Bx_1 - Bx_2 - Cx_3 - d_1\xi_1 - d_2\xi_2 \end{aligned}$$

Здесь введены безразмерные переменные и следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{v}{\rho} t, \quad x_1 = \frac{1}{\rho} \frac{dx}{d\tau} \equiv \frac{x \dot{\phantom{x}}}{\rho}, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \frac{d\theta}{d\tau} \equiv \dot{\theta} \\ A &= \frac{(a_1 + a_2)\rho}{mv^2}, \quad B = \frac{a_2 l_2 - a_1 l_1}{mv^2}, \quad C = \frac{a_1 l_1^2 + a_2 l_2^2}{\rho m v^2} \\ d_1 &= \frac{l_1}{\rho}, \quad d_2 = -\frac{l_2}{\rho}, \quad \xi_1 = \frac{\rho F_1}{mv^2}, \quad \xi_2 = \frac{\rho F_2}{mv^2} \end{aligned}$$

Предполагается, что невозмущенное движение машины происходит в плоскости  $xu$  вдоль оси  $y$ ,  $\theta$  — угол между продольной осью машины и осью  $y$ ,  $t$  — время,  $v$  — скорость движения вдоль оси  $y$ ,  $m$  — масса машины,  $\rho$  — радиус инерции машины относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс,  $a_1$  и  $a_2$  — коэффициенты увода передних и задних колес,  $l_1$  и  $l_2$  — расстояния от центра масс до передней и задней оси,  $L = l_1 + l_2$  — база машины,  $F_1$  и  $F_2$  — заданные возмущения, действующие на передние и задние колеса.

В безразмерных переменных многообразие стационарных движений переходит в многообразие состояния равновесия, в каждой точке которого выполняется соотношение  $x_1 + x_2 = 0$ .

Характеристический полином имеет вид ( $p$  — безразмерный оператор дифференцирования)

$$p [p^2 + p(A + C) + AC + B - B^2] = p\Delta(p)$$

Отбрасывая нулевой корень, обусловленный одномерностью многообразия [1], находим условия устойчивости этого многообразия

$$A + C > 0, \quad AC + B - B^2 > 0$$

В соответствии с физическим смыслом параметров системы первое условие выполняется всегда, а второе условие сводится к неравенству

$$(1.2) \quad v^2 < \frac{a_1 a_2 L^2}{m(a_1 l_1 - a_2 l_2)}$$

которое и определяет область значений параметров устойчивого движения системы.

Рассмотрим теперь поведение системы в области устойчивости.

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (1.1), имеем

$$X_k(p) = \lambda_{k1} \xi_1(p) + \lambda_{k2} \xi_2(p) \quad (k = 1, 2), \quad X_3(p) = pX_2(p)$$

$$\lambda_{1i} = \frac{p^2 + p(C + Bd_i) + B + Ad_i}{p\Delta(p)}, \quad \lambda_{2i} = -\frac{B + d_i(p + A)}{p\Delta(p)} \quad (i = 1, 2)$$

Полученные передаточные функции для  $X_1$  и  $X_2$  содержат в знаменателе нулевой корень. Это приводит к тому, что при единичном ступенчатом воздействии на систему  $\xi_1 = 1(\tau)$  при условии  $\xi_2 = k\xi_1$  имеем следующую структуру решения:

$$X_{1,2}(\tau) = \pm \frac{B + Ad_1 + k(B + Ad_2)}{AC + B - B^2} + \sum_{i=1}^2 A_i^{(1,2)} \exp(p_i \tau)$$

Отсюда видно, что в области устойчивости системы при  $\tau \rightarrow \infty$  изображающая точка асимптотически приближается к положению, отличному от первоначального.

Из полученных выражений также следует, что при выполнении соотношения  $a_2 = ka_1$ , связывающего коэффициенты увода передних и задних колес, можно осуществить стабилизацию курсового движения машины по отношению к боковым возмущениям. В случае, когда боковые возмущения связаны с ветровой нагрузкой, коэффициент  $k$  оказывается постоянной величиной, определяемой профилем машины.

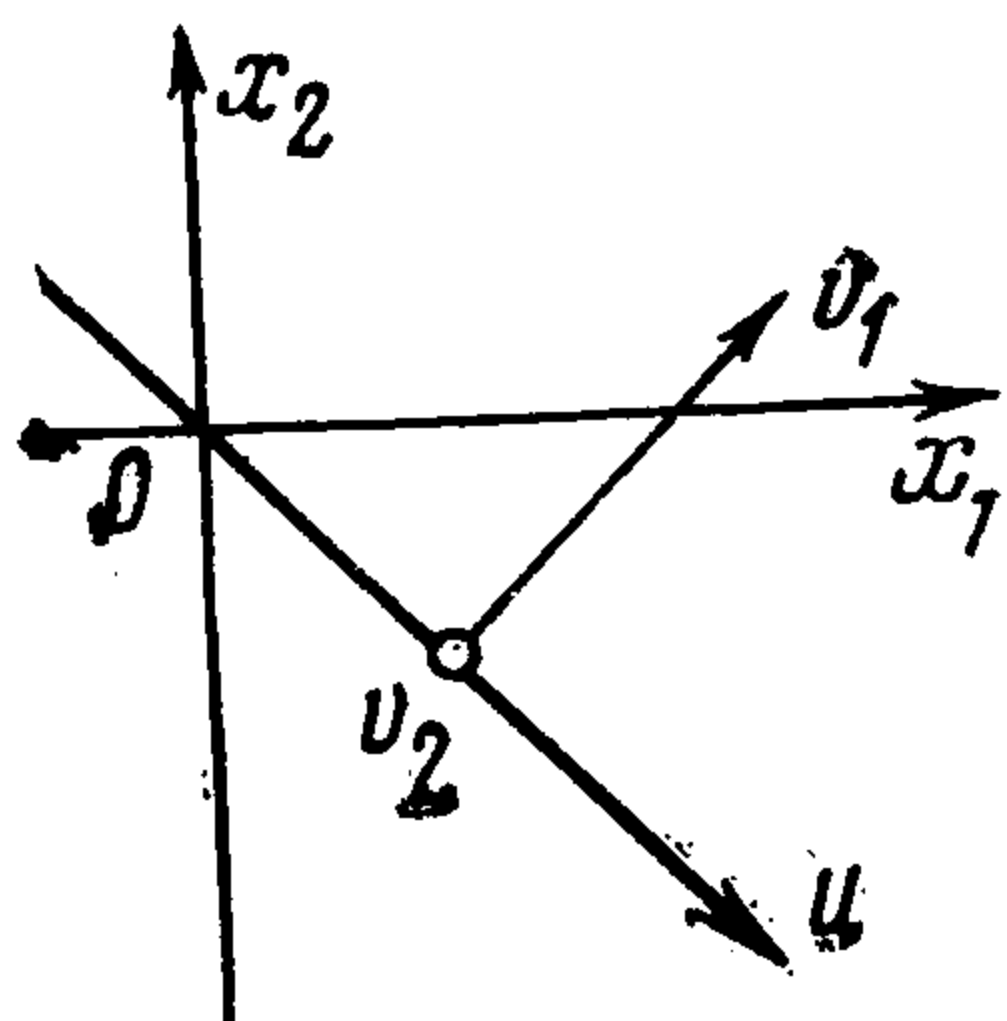
Переходим к исследованию решения системы при случайных возмущениях. Пусть заданы вероятностные характеристики возмущений  $\xi_1(\tau)$  и  $\xi_2(\tau)$ .

Определим дисперсии координат  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Как известно из теории случайных процессов [2], дисперсия  $D_x$  координаты  $x$  системы при наличии двух случайных воздействий выражается в виде

$$D_x = \sum_{i=1}^2 \sum_{r=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} W_i(j\omega) W_r(-j\omega) S_{\xi_i \xi_r}(\omega) d\omega$$

где  $S_{\xi_i \xi_r}(\omega)$  ( $i, r = 1, 2$ ) — заданные спектральные плотности и взаимные спектральные плотности процессов  $\xi_1(\tau)$  и  $\xi_2(\tau)$ ;  $W_1(j\omega)$ ,  $W_2(j\omega)$  — передаточные функции соответственно от  $\xi_1$  к координате  $x$  и от  $\xi_2$  к координате  $x$ .

Наличие нулевых корней в характеристическом полиноме и, следовательно, в знаменателе передаточных функций не позволяет воспользоваться



Фиг. 1

этим выражениями, потому что дисперсии оказываются при этом расходящимися. Следовательно, поставленная в таком виде задача является некорректной. Однако постановка этой задачи становится корректной, если перейти к координатам, выражающим отклонение изображающей точки от поверхности состояний равновесия.

Пусть  $x_1 = v_1 - u$ ,  $x_2 = v_1 + u$ ,  $x_3 = v_2$ , где  $u$  — координата, отсчитываемая вдоль многообразия  $O_1$ , а  $v_1$  и  $v_2$  — координаты, ортогональные к  $u$  (см. фиг. 1). В этих переменных уравнения (1.1) принимают вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} v_1' &= -Av_1 + \frac{1-B}{2}v_2 + \zeta_1 + \zeta_2 \quad \left(\zeta_{1,2} = \frac{1}{2}\xi_{1,2}\right) \\ v_2' &= -2Bv_1 - Cv_2 - 2d_1\zeta_1 - 2d_2\zeta_2 \\ u' &= Av_1 + \frac{1+B}{2}v_2 - \zeta_1 - \zeta_2 \end{aligned}$$

Видно, что первые два уравнения (1.3) образуют замкнутую систему и могут быть рассмотрены отдельно. Третье уравнение определяет движение изображающей точки вдоль многообразия. Применяя преобразование Лапласа, находим

$$(1.4) \quad \begin{aligned} V_i(p) &= \frac{\Delta_{i1}(p)}{\Delta(p)} \zeta_1(p) + \frac{\Delta_{i2}(p)}{\Delta(p)} \zeta_2(p) \quad (i = 1, 2) \\ pU(p) &= \frac{\Delta_{u1}(p)}{\Delta(p)} \zeta_1(p) + \frac{\Delta_{u2}(p)}{\Delta(p)} \zeta_2(p) \\ \Delta_{1j} &= p + C + d_j(B - 1), \quad \Delta_{2j} = -2(d_j p + d_j A + B) \\ \Delta_{uj} &= p[A - (B + 1)d_j] + AC - 2Ad_j - B(B + 1) - 1 \\ & \hspace{15em} (j = 1, 2) \end{aligned}$$

Таким образом, переход к координатам  $(u, v_1, v_2)$  привел к тому, что в решении (1.4) для переменных  $v_1, v_2$  нулевой корень отсутствует. При этом переменная  $u$  определяется квадратурой.

Пусть на систему действуют случайные силы, имеющие математические ожидания  $\langle \zeta_1 \rangle$  и соответственно  $\langle \zeta_2 \rangle$ . Тогда математические ожидания координат определяются из уравнений движения

$$\begin{aligned} \langle v_1 \rangle &= \frac{C(\langle \zeta_1 \rangle + \langle \zeta_2 \rangle) - (1-B)(d_1 \langle \zeta_1 \rangle + d_2 \langle \zeta_2 \rangle)}{AC + B(1-B)} \\ \langle v_2 \rangle &= - \frac{A(d_1 \langle \zeta_1 \rangle + d_2 \langle \zeta_2 \rangle) + 2B(\langle \zeta_1 \rangle + \langle \zeta_2 \rangle)}{AC + B(1-B)} \end{aligned}$$

Вычитая из уравнений (1.3) соответствующие усредненные уравнения, получим уравнения движения в центрированных координатах. Они полностью совпадают с уравнениями (1.3), если в этих уравнениях считать координаты центрированными. Поэтому при дальнейшем рассмотрении считаем, что координаты  $v_1$  и  $v_2$  центрированы.

**2. Динамика колесной машины при случайной ветровой нагрузке.** Ради упрощения будем считать, что боковая сила, действующая на заднее колесо, пропорциональна силе, действующей на переднее колесо  $\xi_2 = k\xi_1$ . Физическая реализация такого предположения может осуществиться в виде бокового ветра, когда распределение нагрузки на передние и задние колеса определяется парусностью машины.

Пусть функция  $\xi_1(\tau)$  задана своим математическим ожиданием  $\langle \xi_1 \rangle = \rho \langle F_1 \rangle / 2mv^2$  и спектральной плотностью [3]

$$S_{\xi}(p) = \frac{R_{\xi}(0) \beta}{2\pi(p^2 + \beta^2)}$$

Параметры  $R_{\xi}(0)$  и  $\beta$  связаны с соответствующими параметрами ветра  $R_F(0)$  и  $\beta_1$  в реальном масштабе времени соотношениями

$$R_{\xi}(0) = R_F(0) \rho^2 / (4m^2v^4), \quad \beta = \rho\beta_1 / v$$

В этом случае дисперсия координаты  $v_1$  определяется выражением

$$D_{v_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Delta_{v_1}(\omega)|^2}{|\Delta(\omega)|^2} S_{\xi}(\omega) \cdot d\omega$$

Подставляя сюда выражение  $S_{\xi}(\omega)$ , получаем

$$D_{v_1} = \frac{R_{\xi}(0) \beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Delta_{v_1}(\omega)|^2}{|\Delta(\omega)(p + \beta)|^2} (\xi) d\omega$$

$$\Delta_{v_1}(p) = (1 + k)(p + C_1), \quad C_1 = C + \frac{(B-1)(l_1 - kl_2)}{\rho(1+k)}, \quad p = j\omega$$

Как известно [2], этот интеграл равен  $(-1)^{n+1} M_n / 2\Delta_n$ , где  $\Delta_n$  — старший определитель Гурвица полинома  $\Delta(p)(p + \beta)$ , стоящего в знаменателе подынтегральной функции,  $M_n$  — это определитель  $\Delta_n$ , в котором первый столбец заменен коэффициентами полинома  $\Delta_{v_1}(p)$ . Для вычисления дисперсии координат целесообразно использовать следующую теорему, в справедливости которой можно убедиться методом математической индукции.

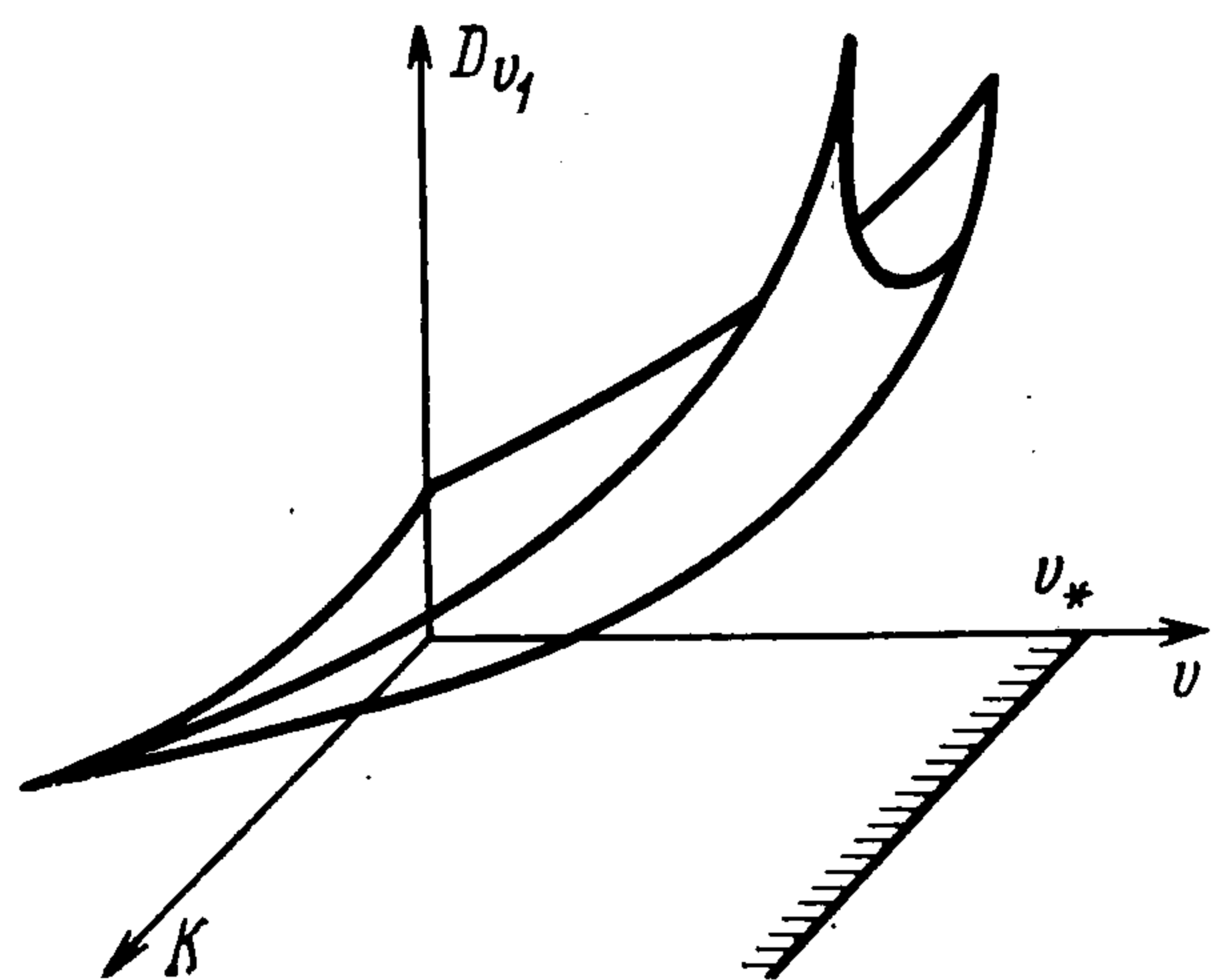
*Теорема.* Если характеристический полином можно представить в виде

$$P_n(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0 = (p + \beta) Q_{n-1}(p) \quad (2.1)$$

$$Q_{n-1}(p) = p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_0$$

то между старшими определителями Гурвица  $\Delta_n^P$  и  $\Delta_{n-1}^Q$  этих полиномов выполняется соотношение

$$\Delta_n^P = \beta \Delta_{n-1}^Q Q_{n-1}(\beta)$$



Фиг. 2

Заметим, что представление полинома  $P_n(p)$  в виде (2.1) встречается в статистической динамике довольно часто, потому что  $Q_{n-1}(p)$ , как правило, представляет собой характеристический полином системы, а множитель  $(p + \beta)^{-1}$  появляется в выражении спектральной плотности возмущающего воздействия.

В рассматриваемом случае

$$Q_{n-1}(p) = p^2 + p(A + C) + AC + B - B^2,$$

$$\Delta_{n-1}^Q = (A + C)(AC + B - B^2)$$

Отсюда

$$(2.2) \quad D_{v_1} = \frac{R_{\xi}(0)(1+k)^2\beta(F + HC_1^2)}{2F(H - \beta)[\beta^2 + \beta(A + C) + AC + B - B^2]}$$

$$F = \beta[AC + B - B^2], \quad H = A + C + \beta$$

При выполнении условий устойчивости дисперсия положительна. Рассматривая полученное выражение (2.2) как функцию того или иного параметра, можно определить значения параметров, при которых эта функция достигает минимума. Если в качестве такого параметра взять коэффициент  $k$ , то дисперсия  $D_{v_1}$  достигает минимума при значении  $k = k^*$ , где

$$k^* = \frac{-(B-1)^2 d_1 d_2 H - HC(B-1)(d_2 + d_1) - (F + HC^2)}{F + H[C + (B-1)d_2]^2}$$

Аналогично

$$D_{v_2} = \frac{R_{\xi}(0)(d_1 + kd_2)^2\beta(F + HC_2^2)}{F(H - \beta)[\beta^2 + \beta(A + C) + AC + B - B^2]}$$

имеет минимум при  $k = k^{**}$ , где

$$k^{**} = \frac{l_1 l_2 (F + A^2 H) + ABH(l_2 - l_1) + B^2 H}{Fl_2^2 + H(A l_2 - B)^2}$$

На фиг. 2 изображена поверхность  $D_{v_1} = f(k, v)$ . При скоростях движения, приближающихся к критическому значению  $v^*$ , определяемому выражением (1.2), дисперсия бесконечно растет, так как значение старшего определителя Гурвица системы в знаменателе выражения для дисперсии стремится к нулю.

Поступила 6 II 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неавтономных систем. М., «Наука», 1967.
2. Laning J. H., Battin R. H. Random processes in automatic control. New York — Toronto — London, Mc. Graw-Hill, 1959. (Рус. перев.: М., Изд-во иностр. лит., 1958.)
3. Newton G. S., Gould L. A., Kaiser J. F. Analytical design of linear feedback controls. N. Y., Wiley, 1957. (Рус. перев.: М., Физматгиз, 1961).