Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА

Л. С. Саакян

(Ереван)

Методом, предложенным в [1], исследуется оптимальная стабилизация положений относительного равновесия спутника при помощи маховиков. Предполагается, что центр масс спутника-гиростата движется как материальная точка по кеплеровской круговой орбите.

1. Пусть центр масс спутника-гиростата описывает круговую орбиту в центральном ньютоновском поле сил. Будем рассматривать ограниченную задачу, пренебрегая влиянием движения вокруг центра масс на движение центра масс.

За начало инерциальной системы координат $o_1\xi\eta\zeta$ примем притягивающий центр o_1, начало подвижной системы координат $ox_1x_2x_3$ возьмем в центре масс o спутника и оси направим по главным центральным осям инерции. Введем еще одну подвижную систему координат $oxyz$, ось z которой направлена по прямой o_1o, ось y — по нормали к плоскости стационарной круговой орбиты, ось x дополняет оси y и z до правого триедра. Положение корпуса спутника в орбитальной системе координат $oxyz$ будем определять эйлеровыми углами ψ, θ, φ. Обозначим через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) конусы углом между осями x, y, z и x_1, x_2, x_3, они задаются в виде

$$\cos(z, x_i) = \alpha_i, \quad \cos(y, x_i) = \beta_i, \quad \cos(x, x_i) = \gamma_i \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$\alpha_1 = \sin\varphi\sin\theta, \quad \alpha_2 = \cos\varphi\sin\theta, \quad \alpha_3 = \cos\theta$$
$$\beta_1 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \quad \beta_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \quad \beta_3 = -\sin\theta\cos\psi$$
$$\gamma_1 = \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3, \quad \gamma_2 = \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1, \quad \gamma_3 = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2$$

Пусть по главным осям инерции спутника расположены оси трех однородных симметричных маховиков и $\boldsymbol{\omega}(p, q, r)$ — угловая скорость вращения спутника вокруг центра масс; p, q, r — проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат $ox_1x_2x_3$. Положим, что силовая функция ньютоновского притяжения спутника имеет вид [2]

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mu M R_0^{-1} - 3\mu(2R_0^3)^{-1}[C_1\alpha_1^2 + C_2\alpha_2^2 + C_3\alpha_3^2 - {}^1/_3(C_1 + C_2 + C_3)]$$

где M — масса спутника-гиростата, C_i — его главные центральные моменты инерции, μ — гравитационная постоянная.

Уравнения абсолютного движения спутника вокруг центра масс запишем в форме трех динамических уравнений Эйлера

$$(1.1)\qquad C_1p^\cdot + (C_3 - C_2)\,qr + H_3q - H_2r + H_1^\cdot = 3\omega_0^2\,(C_3 - C_2)\alpha_2\alpha_3 \qquad (1\ 2\ 3)$$

$$(H_i = J_i\omega_i,\ i = 1, 2, 3)$$

Здесь J_i, ω_i — осевые моменты инерции и относительные угловые скорости маховиков, ω_0 — угловая скорость движения центра масс по орбите. Символ (1 2 3) означает, что два других уравнения получаются циклической перестановкой. Уравнения, определяющие положение спутника в орбитальной системе координат $oxyz$, имеют вид

$$(1.2)\qquad \alpha_1^\cdot = \alpha_2r - \alpha_3q + \omega_0\,(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3) \qquad (1\ 2\ 3)$$

$$\beta_1^\cdot = \beta_2r - \beta_3q \qquad (1\ 2\ 3)$$

Помимо уравнений (1.1) и (1.2) рассмотрим еще три уравнения, описывающие вращательное движение маховиков. Без учета внутреннего трения они имеют вид

$$(1.3)\qquad J_1\,(\omega_1^\cdot + p^\cdot) = -u_1,\quad J_2\,(\omega_2^\cdot + q^\cdot) = -u_2,\quad J_3\,(\omega_3^\cdot + r^\cdot) = -u_3$$

где $-u_i$ — моменты двигателей, приводящие маховики во вращение.

Из (1.1), (1.3) следуют уравнения

$$(1.4)\qquad (C_1 - J_1)\,p^\cdot = (C_2q + H_2)r - (C_3r + H_3)\,q + 3\omega_0^2\,(C_3 - C_2)\times \\ \times\alpha_2\alpha_3 + u_1 \qquad (1\ 2\ 3)$$

При $u_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) уравнения движения маховиков (1.3) имеют интегралы

$$(1.5)\qquad H_1 + J_1p = l_1,\quad H_2 + J_2q = l_2,\quad H_3 + J_3r = l_3,\quad l_i = \mathrm{const} \\ (i = 1, 2, 3)$$

Уравнения движения (1.4), (1.2) при равномерном движении центра масс по круговой орбите ($u_i = 0$) допускают интеграл энергии [3], который с учетом равенств (1.5) имеет вид

$$(1.6)\qquad 2H = (C_1 - J_1)\,p^2 + (C_2 - J_2)\,q^2 + (C_3 - J_3)\,r^2 + \\ + 3\omega_0^2\,(C_1\alpha_1^2 + C_2\alpha_2^2 + C_3\alpha_3^2) - 2\omega_0\,[(C_1 - J_1)\,p\beta_1 + \\ + (C_2 - J_2)\,q\beta_2 + (C_3 - J_3)\,r\beta_3] - 2\omega_0\,(l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + l_3\beta_3)$$

Множество положений относительного равновесия в предположении, что маховики вращаются с постоянными относительными угловыми скоростями ($u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$), полностью определено в работе [4], а в [5] показано, что все положения относительного равновесия спутника-гиростата разбиваются на три класса.

1.1. Одна из главных осей эллипсоида инерции спутника коллинеарна оси z, а две другие оси расположены в плоскости oxy и образуют с осями x и y некоторый угол.

1.2. Одна из главных осей эллипсоида инерции спутника коллинеарна оси x, а две другие оси расположены в плоскости oyz и образуют с осями y и z некоторый угол.

1.3. Ни одна из главных осей инерции спутника не коллинеарна осям орбитальной системы координат.

Рассмотрим какое-нибудь положение относительного равновесия, принадлежащее семейству 1.1. Пусть, например, ось x_2 коллинеарна оси z, а оси x_1, x_3 расположены в плоскости oxy и образуют с осями x и y угол ψ_0, причем

$$\theta_0 = {}^1/_2\pi, \quad 0 \leqslant \psi_0 \leqslant 2\pi, \quad \varphi_0 = 0$$

Имеем

$$p = \omega_0 \sin\psi_0, \quad q = 0, \quad z = -\omega_0 \cos\psi_0 \tag{1.7}$$
$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0$$
$$\beta_1 = \sin\psi_0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = -\cos\psi_0$$

при условии, что

$$H_2 = 0, \quad \omega_0 (C_3 - C_1) \sin\psi_0 \cos\psi_0 = H_1 \cos\psi_0 + H_3 \sin\psi_0$$

Составим уравнения возмущенного движения, приняв для вариаций переменных следующие обозначения:

$$p_1 = p - \omega_0 \sin\psi_0, \quad \eta_1 = \alpha_1, \quad \delta_1 = \beta_1 - \sin\psi_0 \tag{1.8}$$
$$q_1 = q, \quad \eta_2 = \alpha_2 - 1, \quad \delta_2 = \beta_2$$
$$r_1 = r + \omega_0 \cos\psi_0, \quad \eta_3 = \alpha_3, \quad \delta_3 = \beta_3 + \cos\psi_0$$

Имеем

$$(C_1 - J_1)\, p_1^{\boldsymbol{\cdot}} = (C_2 - C_3) q_1 r_1 - (C_2 - C_3)\, \omega_0 q_1 \cos\psi_0 - H_3 q_1 + \tag{1.9}$$
$$+ 3\omega_0^2 (C_3 - C_2)(1 + \eta_2)\, \eta_3 + u_1 \quad (1\ 2\ 3)$$
$$\eta_1^{\boldsymbol{\cdot}} = \eta_2 r_1 - \eta_3 q_1 + r_1 - \omega_0 \delta_3 + \omega_0 (\eta_3 \delta_2 - \eta_2 \delta_3) \quad (1\ 2\ 3)$$
$$\delta_1^{\boldsymbol{\cdot}} = \delta_2 r_1 - \delta_3 q_1 + q_1 \cos\psi_0 - \omega_0 \delta_2 \cos\psi_0 \quad (1\ 2\ 3)$$

Переменные η_i, δ_i удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_1 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\delta_1 \sin\psi_0 - 2\delta_3 \cos\psi_0 = 0 \tag{1.10}$$
$$\Phi_2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2\eta_2 = 0$$
$$\Phi_3 = \delta_1\eta_1 + \delta_2\eta_2 + \delta_3\eta_3 + \eta_1 \sin\psi_0 + \delta_2 - \eta_3 \cos\psi_0 = 0$$

Записав интеграл (1.6) в переменных (1.8), рассмотрим связку функций (1.6), (1.10) в виде

$$2V = 2H + \lambda\omega_0\Phi_1 - 3\omega_0^2 C_2 \Phi_2 = (C_1 - J_1)\, p_1^2 + (C_2 - J_2) q_1^2 + \tag{1.11}$$
$$+ (C_3 - J_3)\, r_1^2 - 2\omega_0 [(C_1 - J_1)\, p_1\delta_1 + (C_2 - J_2)\, q_1\delta_2 +$$
$$+ (C_3 - J_3)\, r_1\delta_3] + \lambda\omega_0 (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) +$$
$$+ 3\omega_0^2 [(C_1 - C_2)\, \eta_1^2 + (C_3 - C_2)\eta_3^2]$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$, а в выражении $2H$

$$l_1 = \lambda \sin\psi_0 - (C_1 - J_1)\, \omega_0 \sin\psi_0, \ l_2 = 0, \ l_3 = -\lambda\cos\psi_0 + \tag{1.12}$$
$$+ (C_3 - J_3)\, \omega_0 \cos\psi_0$$

Функция (1.11) при

$$\lambda > \max\{\omega_0 C_1, \omega_0 C_3\}, \quad C_1 > C_2, \quad C_3 > C_2 \tag{1.13}$$

является определенно-положительной функцией переменных p_1, q_1, r_1, δ_1, δ_2, δ_3, η_1, η_3. Из (1.12), (1.5), (1.7) вычислим значение λ

$$\lambda = \frac{H_1}{\sin\psi_0} + \omega_0 C_1, \quad \lambda = -\frac{H_3}{\cos\psi_0} + \omega_0 C_3 \tag{1.14}$$

Предположим, что

(1.15) $$C_1 \neq C_3, \quad C_1 > C_2, \quad C_3 > C_2$$

Тогда условие (1.13) с учетом (1.14), (1.15) примет вид

(1.16) $$\omega_0 C_1 + \frac{H_1}{\sin\psi_0} > \max\{\omega_0 C_1, \omega_0 C_3\}$$
$$\omega_0 C_3 - \frac{H_3}{\cos\psi_0} > \max\{\omega_0 C_1, \omega_0 C_3\}$$

Следуя [1], рассмотрим функционал

(1.17) $$T = \int_{t_0}^{\infty} \Big(F(p_1, q_1, r_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3) + \sum_{i=1}^{3} n_i u_i^2\Big)\,dt$$

где F — подлежащая определению неотрицательная функция, а n_i — некоторые положительные числа. Составим выражение [6]

(1.18) $$B[V; p_1, q_1, r_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3; u_1, u_2, u_3] = (p_1 - \omega_0\delta_1)u_1 +$$
$$+ (q_1 - \omega_0\delta_2)u_2 + (r_1 - \omega_0\delta_3)u_3 + F + \sum_{i=1}^{3} n_i u_i^2$$

которое, согласно условиям теоремы об оптимальной стабилизации, при $u_i = u_i^\circ$ достигает минимума, равного нулю. Оптимальные управляющие воздействия u_i определяются из уравнений

$$\partial B / \partial u_j^0 = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

и имеют вид

(1.19) $$u_1^\circ = -{}^1/_2 n_1 (p_1 - \omega_0\delta_1), \quad u_2^\circ = -{}^1/_2 n_2 (q_1 - \omega_0\delta_2),$$
$$u_3^\circ = -{}^1/_2 n_3 (r_1 - \omega_0\delta_3)$$

Подставляя значения (1.19) вместо u_i в выражение (1.18) и приравнивая его нулю [1], находим функцию

(1.20) $$F = {}^1/_4 \,[1 / n_1 (p_1 - \omega_0\delta_1)^2 + 1 / n_2 (q_1 - \omega_0\delta_2)^2 + 1 / n_3 \times$$
$$\times (r_1 - \omega\delta_3)^2]$$

Производная по времени от функции (1.11) в силу системы уравнений возмущенного движения (1.9) с учетом (1.19), (1.17), (1.20) равна

(1.21) $$V^\bullet = -2F$$

Функция (1.21) является знакопостоянной отрицательной функцией переменных $p_1, q_1, r_1, \delta_i, \eta_i$, а многообразие E точек, где $V^\bullet = 0$, имеет вид

(1.22) $$p_1 = \omega_0\delta_1, \quad q_1 = \omega_0\delta_2, \quad r_1 = \omega_0\delta_3, \quad \eta_i \text{ — произвольны}$$

Покажем, что в некоторой достаточно малой окрестности невозмущенного движения

(1.23) $$p_1 = q_1 = r_1 = 0, \quad \delta_i = 0, \quad \eta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

многообразие (1.22) не содержит других целых движений системы, кроме невозмущенного движения (1.23).

При значениях (1.22) уравнения движения (1.9) принимают вид

$$
\begin{aligned}
(1.24)\qquad & [\omega_0^2 (C_2 - C_3)(\delta_3 - \cos\psi_0) - \omega_0 H_3]\delta_2 = 3\omega_0^2 (C_2 - C_3)\cdot \\
& \cdot(1 + \eta_2)\eta_3 \\
& [\omega_0^2 (C_1 - C_2)(\delta_1 + \sin\psi_0) + \omega_0 H_1]\delta_2 = 3\omega_0^2 (C_1 - C_2)\cdot \\
& \cdot(1 + \eta_2)\eta_1 \\
& \omega_0 (C_3 - C_1)(\delta_1\delta_3 + \delta_3\sin\psi_0 - \delta_1\cos\psi_0) + H_3\delta_1 - H_1\delta_3 = \\
& = 3\omega_0 (C_3 - C_1)\eta_1\eta_3
\end{aligned}
$$

Пусть существуют отличные от нуля значения δ_i и η_i $(i = 1, 2, 3)$, которые удовлетворяют системе (1.24). Подставляя значения δ_i в (1.24), получим уравнения, из которых определим η_i

$$
\begin{aligned}
(1.25)\qquad & 3\omega_0^2 (C_2 - C_3)(1 + \eta_2)\eta_3 = a_1, \quad 3\omega_0^2 (C_3 - C_1)\eta_1\eta_3 = a_2 \\
& 3\omega_0^2 (C_1 - C_2)(1 + \eta_2)\eta_1 = a_3, \quad a_i = \mathrm{const} \quad (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

Если $a_i \neq$ $(i = 1, 2, 3)$, то всегда можно указать такую область:

$$
(1.26)\qquad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 < m^2 = \mathrm{const}
$$

где система (1.25) не будет иметь решения.

Действительно, умножая уравнения системы (1.25) соответственно на η_1, η_2, η_3 и складывая, получим

$$
(1.27)\qquad a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3 = -a_2
$$

Если в качестве m взять расстояние от точки $\eta_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ до плоскости (1.27), то система (1.25) в области (1.26) при $a_2 \neq 0$ не будет иметь решения. Заметим, что если $a_2 = 0$, то параметр λ в (1.11) можно выбрать так, что и a_1, a_3 будут нулями. Следовательно, чтобы система (1.24) в некоторой области невозмущенного движения (1.23) имела решение, необходимо $a_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Пусть $a_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Тогда система (1.24) распадается на две независимые системы

$$
(1.28)\qquad (1 + \eta_2)\eta_3 = 0, \quad (1 + \eta_2)\eta_1 = 0, \quad \eta_1\eta_3 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
(1.29)\qquad & \delta_2[\omega_0(C_2 - C_3)\delta_3 - \omega_0(C_2 - C_3)\cos\psi_0 - H_3] = 0 \\
& \delta_2[\omega_0(C_1 - C_2)\delta_1 + \omega_0(C_1 - C_2)\sin\psi_0 + H_1] = 0 \\
& \omega_0(C_3 - C_1)(\delta_1\delta_3 + \delta_3\sin\psi_0 - \delta_1\cos\psi_0) + (H_3\delta_1 - H_1\delta_3) = 0
\end{aligned}
$$

Уравнения (1.28) и $\Phi_2 = 0$ из (1.10) в области

$$
(1.30)\qquad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 < 2
$$

имеют единственное решение $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$. Первые два уравнения (1.29) обращаются в нуль либо при $\delta_2 = 0$, либо при

$$
(1.31)\qquad \delta_3 = \cos\psi_0 + \frac{H_3}{\omega_0 (C_2 - C_3)} \quad \text{и} \quad \delta_1 = -\sin\psi_0 - \frac{H_1}{\omega_0 (C_1 - C_2)}
$$

Но если параметр λ выбрать согласно неравенству

$$
(1.32)\qquad \frac{(\lambda - \omega_0 C_1)^2 \sin^2\psi_0}{\omega_0^2 (C_1 - C_2)^2} + \frac{(\lambda - \omega_0 C_3)^2 \cos^2\psi_0}{\omega_0^2 (C_2 - C_3)^2} > 1
$$

то уравнение

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\delta_1 \sin\psi_0 - 2\delta_3 \cos\psi_0 = 0 \tag{1.33}$$

при значениях (1.31) не имеет действительного решения относительно δ_2. Поэтому, если имеет место (1.32), то первые два уравнения (1.29) удовлетворяются только при $\delta_2 = 0$.

Рассмотрим третье уравнение системы (1.29) совместно с (1.33). Определим δ_1 из третьего уравнения (1.29) и, подставив в (1.33), получим

$$f(\delta_3) = \delta_3\varphi(\delta_3) = \delta_3\left[\frac{k_2^2\delta_3}{(k_1+\delta_3)^2} + 2\frac{k_2\sin\psi_0}{k_1+\delta_3} + \delta_3 - 2\cos\psi_0\right] = 0$$

$$k_1 = -\frac{\lambda - \omega_0 C_1}{\omega_0(C_3 - C_1)}\cos\psi_0, \quad k_2 = \frac{\lambda - \omega_0 C_3}{\omega_0(C_3 - C_1)}\sin\psi_0$$

Функция $\varphi(\delta_3)$ на отрезке $[-1 + \cos\psi_0, 1 + \cos\psi_0]$ меняет знак лишь один раз. Если обозначим через δ_{30} корень уравнения $\varphi(\delta_3) = 0$, то, очевидно, система (1.29) в области

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 < \varepsilon^2, \quad \varepsilon^2 = \delta_{10}^2 + \delta_{30}^2 \tag{1.34}$$

при (1.32) будет иметь единственное решение $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$.

Таким образом, при (1.15), (1.16) и (1.32) управляющие воздействия (1.19) обеспечивают асимптотическую устойчивость [7] невозмущенного движения (1.23) для всех начальных возмущений из области (1.30), (1.34) и минимизируют функционал

$$J = \frac{1}{4}\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{1}{n_1}(p_1 - \omega_0\delta_1)^2 + \frac{1}{n_2}(q_1 - \omega_0\delta_2)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n_3}(r_1 - \omega_0\delta_3)^2 + 4\sum_{i=1}^{3} n_i u_i^2\right] dt \tag{1.35}$$

2. Рассмотрим какое-нибудь положение относительного равновесия, принадлежащее семейству 1.2. Пусть, например, ось x_1 коллинеарна оси x, а оси x_2, x_3 расположены в плоскости oyz и образуют с осями y, z угол θ_0, причем

$$\psi_0 = \pi, \quad 0 < \theta_0 < \pi, \quad \varphi = \pi$$

Имеем

$$p = 0, \quad q = \omega_0\cos\theta_0, \quad r = \omega_0\sin\theta_2$$
$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\sin\theta_0, \quad \alpha_3 = \cos\theta_0$$
$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \cos\theta_0, \quad \beta_3 = \sin\theta_0$$

при условии, что

$$H_1 = 0, \quad 4\omega_0(C_2 - C_3)\sin\theta_0\cos\theta_0 = H_3\cos\theta_0 - H_2\sin\theta_0$$

Сохраняя за вариациями переменных принятые обозначения (1.8), составим уравнения возмущенного движения

$$(C_1 - J_1)\,p_1^{\bullet} = (C_2 q_1 + H_2 + \omega_0 C_2\cos\theta_0)(r_1 + \omega_0\sin\theta_0) -$$
$$-(C_3 r_1 + H_3 + \omega_0 C_3\sin\theta_0)(q_1 + \omega_0\cos\theta_0) +$$
$$+ 3\omega_0^2(C_3 - C_2)(\eta_2 - \sin\theta_0)(\eta_3 + \cos\theta_0) + u_1 \qquad (1\,2\,3) \tag{2.1}$$

$$\eta_1^{\bullet} = \eta_2 r_1 - \eta_3 q_1 + \omega_0(\eta_3\delta_2 - \eta_2\delta_3) + r_1\sin\theta_0 - q_1\cos\theta_0 +$$
$$+ \omega_0(\delta_2\cos\theta_0 + \delta_3\sin\theta_0) \qquad (1\,2\,3)$$

$$\delta_1^{\cdot} = \delta_2 r_1 - \delta_3 q_1 + \omega_0 (\delta_2 \sin\theta_0 - \delta_3 \cos\theta_0) + r_1 \cos\theta_0 - \\ - q_1 \sin\theta_2 \qquad (1\ 2\ 3)$$

Соотношения (1.10) принимают вид

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &\Phi_1 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\delta_2 \cos\theta_0 + 2\delta_3 \sin\theta_0 = 0 \\ &\Phi_2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2\eta_3 \cos\theta_0 - 2\eta_2 \sin\theta_0 = 0 \\ &\Phi_3 = \delta_1\eta_1 + \delta_2\eta_2 + \delta_3\eta_3 + \eta_2 \cos\theta_0 - \delta_2 \sin\theta_0 + \eta_3 \sin\theta_0 + \\ &+ \delta_3 \cos\theta_2 = 0 \end{aligned}$$

Пусть для моментов инерции спутника-гиростата выполняется условие

$$(2.3)\qquad C_1 > C_2 = C_3$$

Записав интеграл (1.6) в вариациях переменных, рассмотрим связку функций (1.6), (2.2) вида

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &2V = 2H + \lambda_1\omega_0\Phi_1 - 3\omega_0^2 C_3 \Phi_2 = (C_1 - J_1)\, p_1^2 + \\ &+ (C_2 - J_2)\, q_1^2 + (C_3 - J_3) r_1^2 - 2\omega_0 [(C_1 - J_1)\, p_1\delta_1 + \\ &+ (C_2 - J_2)\, q_1\delta_2 + (C_3 - J_3) r_1\delta_3] + \lambda_1\omega_0 (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) + \\ &+ 3\omega_0^2 (C_1 - C_2)\, \eta_1^2 \end{aligned}$$

где $\lambda_1 = \mathrm{const} > 0$, а в выражении $2H$ положено

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} &l_1 = 0, \quad l_2 + \omega_0 (C_2 - J_2) \cos\theta_0 = \lambda_1 \cos\theta_0, \quad l_3 + \omega_0 \cdot \\ &\cdot (C_3 - J_3) \sin\theta_0 = \lambda_1 \sin\theta_0 \end{aligned}$$

Функция (2.4) при (2.3) и

$$(2.6)\qquad \lambda_1 > \omega_0 C_1$$

является определенно-положительной функцией переменных p_1, q_1, r_1, δ_1, δ_2, δ_3, η_1.

Повторяя остальные рассуждения, определяем оптимальные управляющие воздействия u_i^0. Они имеют вид (1.19), функция F в выражении (1.17) имеет вид (1.20), а производная по времени от функции (2.4), составленная в силу уравнений возмущенного движения (2.1) с учетом (1.19), (1.17), (1.20)

$$2V^{\cdot} = -[{}^1/n_1 (p_1 - \omega_0\delta_1)^2 + {}^1/\,n_2\, (q_1 - \omega_0\delta_2)^2 + {}^1/\,n_3 \cdot \\ \cdot (r_1 - \omega_0\delta_3)^2]$$

является знакопостоянной отрицательной функцией от вариаций переменных систем.

Аналогично можно показать, что при выполнении условий (2.3), (2.6) и

$$(2.7)\qquad \frac{\lambda_1 - \omega_0 C_1}{\omega_0 (C_1 - C_2)} \,|\cos\theta_0\,| > 2$$

многообразие (1.22), где $V^{\cdot} = 0$, в области

$$(2.8)\qquad \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 < 4, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 < 2$$

не содержит других целых движений системы, кроме невозмущенного движения (1.23). Таким образом, при выполнении условий (2.3), (2.6) и (2.7) управляющие воздействия (1.19) обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения (1.23) по отношению к переменным p_1, q_1, r_1, δ_1, δ_2, δ_3, η_1 для всех начальных возмущений из области (2.8) и минимизируют функционал (1.35).

В работе [8] показано, что при $C_1 \neq C_2 \neq C_3$, $\theta_0 \neq {}^1/_4\pi$, ${}^3/_4\pi$ все положения относительного равновесия семейства 1.2 могут быть стабилизированы асимптотически моментами, приложенными к маховикам. Если же эллипсоид инерции спутника-гиростата представляет собой эллипсоид вращения $C_1 > C_2 = C_3$ или же $\theta_0 = {}^1/_4\pi$, ${}^3/_4\pi$, то моментами, приложенными к маховикам, нельзя стабилизировать положения относительного равновесия по всем переменным, так как в этих случаях система не вполне управляема [9]. Однако в этих случаях, как было показано выше, можно добиться асимптотической устойчивости по части переменных [1] положений относительного равновесия моментами, приложенными к маховикам.

Автор благодарит В. В. Румянцева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила I XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
2. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. Математические методы в динамике космических аппаратов. М., ВЦ АН СССР, 1967.
4. *Степанов С. Я.* О стационарных движениях спутника-гиростата. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
5. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов. Космические исследования, 1969, т. 7, вып. 3.
6. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Теория устойчивости движения. Доп. 4. М., «Наука», 1966.
7. *Красовский Н. Н.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова. В кн.: Теория устойчивости движения. Доп. 3. М., «Наука», 1966.
8. *Лилов Л. К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
9. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.