Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31

РЕЗОНАНСНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ УСТОЙЧИВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Исследуется возмущенная вращательно-колебательная система со многими степенями свободы, подверженная внешним периодическим воздействиям. Последовательными приближениями по малому параметру строится резонансное решение на бесконечном промежутке времени и исследуется его устойчивость по Ляпунову.

Проводится расчет конкретного примера системы с тремя степенями свободы, имитирующей влияние быстровращающегося несбалансированного ротора на основание.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная система, приводящаяся к уравнениям с вращающейся фазой вида

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} a^{\cdot} &= f(t, a, \psi, h, \varepsilon) \\ \psi^{\cdot} &= \omega(a) + F(t, a, \psi, h, \varepsilon) \\ h^{\cdot} &= H(a)\, h + g(t, a, \psi, h, \varepsilon) \end{aligned}$$

Здесь $t \in [t_0, \infty)$ — независимая переменная (время), $a \in G_a$ — квазистатическая переменная (энергия или амплитуда), $\psi \in [\psi_0, \infty)$ — фаза колебаний или вращений; $h = (h_1, \ldots, h_r)$ — устойчивый вектор, $h \in G_h$, где G_h — некоторая окрестность начала координат; $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Предполагается, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет условиям:

1) она определена и вещественна в указанной области;

2) функции f, F и g периодичны по t, ψ с периодами τ и 2π соответственно;

3) частота $\omega(a)$ неотрицательна, причем для некоторых взаимно простых целых чисел m, n существует решение a^* уравнения $m\omega = n\nu$ $(m \geqslant 1)$, где $\nu = 2\pi / \tau$ — частота внешнего воздействия;

4) $H(a^*)$ — устойчивая матрица, т. е. все r корней уравнения $\Delta(\lambda) = \det(H(a^*) - I\lambda) = 0$, где I — единичная матрица, удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_k(a^*) \leqslant \lambda_0 < 0$ $(k = 1, \ldots, r)$;

5) правая часть непрерывна по t; по остальным аргументам в рассматриваемой области функции f, ω, F и g имеют частные производные до второго порядка, а матрица H — до первого, которые удовлетворяют условиям Липшица с независящими от t постоянными;

6) справедливые оценки

$$f, F = O(|h| + |\varepsilon|), \quad g = O(|h|^2 + |\varepsilon|) \tag{1.2}$$

К системе вида (1.1) с оценками для правой части более частного вида: $f, F, g = O(|h|^2 + |\varepsilon|)$ приводится нелинейная система $\dot{x} = X(x) + \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$, x — вектор, в предположении, что порождающая система допускает устойчивое двухпараметрическое семейство вращательно-колебательных движений [1–3]. Такая система исследовалась автором в [2]. В [1] системы типа (1.1) исследовались методом усреднения, в [3] — при помощи метода локальных интегральных многообразий.

Здесь ставится и решается задача построения индивидуальных резонансных решений системы (1.1) с оценками (1.2) на неограниченном интервале времени при помощи конструктивной схемы последовательных приближений метода малого параметра [4] и исследования их устойчивости по Ляпунову.

2. Построение резонансного решения. Установившееся резонансное решение системы (1.1) вида m / n строится как сумма порождающего и возмущающего движений [2]

$$a = a^* + \varepsilon x(t, \varepsilon), \quad \psi = (n / m)\nu(t - t_0) + \varphi + \varepsilon y(t, \varepsilon) \tag{2.1}$$
$$h = \varepsilon z(t, \varepsilon)$$

Здесь x, y, z — неизвестные периодические функции t периода $T = m\tau$, φ — параметр (фазовая постоянная).

Подстановка (2.1) в (1.1) приводит к квазилинейной системе относительно x, y, z, периодическое решение которой строится последовательными приближениями по степеням ε [2, 4]

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i+1} &= (f'_\varepsilon) + (f_h')z_{i+1} + \varepsilon[(f''_{a\varepsilon})x_i + (f''_{\psi\varepsilon})y_i + (f''_{h\varepsilon})z_i + \\
&+ {}^1/_2(f_{\varepsilon^2}'') + (f''_{ah})x_i z_i + (f''_{\psi h})y_i z_i + {}^1/_2(f_{h^2}'')z_i^2 + f^*(t, x_i, y_i, z_i, \varepsilon)] \\
\dot{y}_{i+1} &= \omega'(a^*)x_{i+1} + (F_\varepsilon') + (F_h')z_{i+1} + \varepsilon[{}^1/_2\omega''(a^*)x_i^2 + \\
&+ (F''_{a\varepsilon})x_i + (F''_{\psi\varepsilon})y_i + (F''_{h\varepsilon})z_i + {}^1/_2(F_{\varepsilon^2}'') + (F''_{ah})x_i z_i + \\
&+ (F''_{\psi h})y_i z_i + {}^1/_2(F_{h^2}'')z_i^2 + F^*(t, x_i, y_i, z_i, \varepsilon)] \\
\dot{z}_{i+1} &= H(a^*)z_{i+1} + (g_\varepsilon') + \varepsilon[(g''_{a\varepsilon})x_i + (g''_{\psi\varepsilon})y_i + (g''_{h\varepsilon})z_i + \\
&+ {}^1/_2(g_{\varepsilon^2}'') + {}^1/_2(g_{h^2}'')z_i^2 + H'(a^*)x_i z_i + g^*(t, x_i, y_i, z_i, \varepsilon)] \\
&\qquad (i = 0, 1, 2\ldots)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь выражения типа (f_ε') означают, что производные вычисляются при $\varepsilon = 0$ и порождающем решении: $a = a^*$, $\psi = (n / m)\nu(t - t_0) + \psi_0$, $h = 0$; f^*, F^*, g^* — известные функции, удовлетворяющие условиям Липшица по переменным x, y, z, ε с независящими от t постоянными и обращающиеся тождественно в нуль при $\varepsilon = 0$.

Следует отметить, что указанная квазилинейная система уравнений для x, y, z имеет вид системы (2.2), в которой отброшены индексы $i+1$, i. Действительно, после подстановки выражений (2.1) в систему (1.1), разложения по ε и деления на $\varepsilon \neq 0$ вследствие сделанных в 5) п. 1 предположений относительно гладкости правых частей и на основании оценок (1.2) следуют уравнения вида (2.2). В случае, когда функции f, F имеют квадратичную оценку по h [2], как и функция g (см. (1.2)), вид системы (2.2) проще, так как тогда производные типа (f_h'), (f_{ah}''), $(f_{\psi h}'')$ и аналогичные для функции F тождественно равны нулю. Интегрирование на каждом шаге переменных x_{i+1} и y_{i+1} проводится явно и независимо от вектора h_{i+1}. Значительно при этом упрощается исследование устойчивости резонансного решения (2.1) (по сравнению с проводимым ниже в п. 3), так как оказывается, что переменная h не оказывает влияния на устойчивость в рассматриваемом первом приближении [2].

В качестве нулевого приближения берется периодическое решение системы (2.2) при $\varepsilon = 0$

$$z_0 = z_0^*(t, \varphi) = H[(g_\varepsilon')], \quad H[f] \equiv \int_{-\infty}^{t} \exp H(a^*)(t - t_1) f dt_1 \tag{2.3}$$

$$x_0 = A_0 + \int_{t_0}^{t} [(f_\varepsilon') + (f_h') z_0] dt_1 \equiv A_0 + x_0^*(t, \varphi)$$

$$y_0 = B_0 + \omega'(a^*) A_0 (t - t_0) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} [\omega'(a^*) x_0^* + (F_\varepsilon') + (F_h') z_0] dt_1 \equiv B_0 + y_0^*(t, \varphi)$$

Здесь φ, A_0, B_0 — параметры, выбираемые так, чтобы получающиеся решения были периодическими.

Из условия периодичности x_0^* следует уравнение относительно параметра φ

$$P(\varphi) \equiv \int_0^T [(f_\varepsilon') + (f_h') H[(g_\varepsilon')]] dt = 0 \tag{2.4}$$

Если φ^* (mod $2\pi / m$) — вещественный корень трансцендентного уравнения (2.4), то функция x_0 периодична при любом A_0, в том числе при

$$A_0 = -[\omega'(a^*) T]^{-1} \int_0^T \omega'(a^*) x_0^* + (F_\varepsilon') + (F_h') z_0] dt \quad (\omega'(a^*) \neq 0)$$

При указанном A_0 функция y_0 будет периодической для любого B_0. В результате периодические функции x_0 и z_0 полностью определены, а параметр B_0 находится из условий периодичности первого приближения, получающегося из (2.2) при $f^* \equiv 0$, $F^* \equiv 0$, $g^* \equiv 0$

$$z_1 = z_0 + \varepsilon z_1^{**} + \varepsilon B_0 H[(g_{\psi\varepsilon}'')] \equiv z_0 + \varepsilon z_1^* \tag{2.5}$$

$$x_1 = x_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} f_1(t_1) dt_1 + \varepsilon B_0 \int_{t_0}^{t} [(f_{\psi\varepsilon}'') + (f_{\psi h}'') z_0 +$$
$$+ (f_h') H[(g_{\psi\varepsilon}'')] dt_1 \equiv x_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon x_1^*$$

$$y_1 = y_0^* + B_1 + \varepsilon y_1^*$$
$$z_1^{**} = H[(g_{a\varepsilon}'') x_0 + (g_{\psi\varepsilon}'') y_0^* + (g_{h\varepsilon}'') z_0 + {}^1/_2 (g_{\varepsilon^2}'') + {}^1/_2 (g_{h^2}'') z_0^2 +$$
$$+ H'(a^*) x_0 z_0]$$
$$f_1 = (f_h') z_1^{**} + (f_{a\varepsilon}'') x_0 + (f_{\psi\varepsilon}'') y_0^* + (f_{h\varepsilon}'') z_0 + {}^1/_2 (f_{\varepsilon^2}'') +$$
$$+ (f_{ah}'') x_0 z_0 + (f_{\psi h}'') y_0^* z_0 + {}^1/_2 (f_{h^2}'') z_0^2$$

Параметр B_0 определяется из условия периодичности x_1 при условии, что φ^* — простой корень (2.4)

$$B_0 = -\frac{1}{P'(\varphi^*)}\int_0^T f_1(t)\,dt \tag{2.6}$$

Из аналогичного соотношения для y_1^* находится постоянная A_1

$$y_1^* = \omega'(a^*)A_1(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\Big[\omega'(a^*)x_1^* + \frac{1}{2}\omega''(a^*)x_0^2 + (F_h')z_1^* +$$
$$+ (F''_{a\varepsilon})x_0 + (F''_{\psi\varepsilon})y_0 + (F''_{h\varepsilon})z_0 + \frac{1}{2}(F''_{\varepsilon^2}) + (F''_{ah})x_0z_0 + (F''_{\psi h})y_0z_0 +$$
$$+ \frac{1}{2}(F_{h^2}'')z_0^2\Big]dt_1 \equiv \omega'(a^*)A_1(t-t_0) + y_1^{**}(t)$$
$$A_1 = -y_1^{**}(T)\,/\,\omega'(a^*)\,T$$

Здесь функции x_1^* и z_1^* после подстановки B_0 в (2.5) полностью определены. В результате найдены следующие приближения: y_0, x_1, z_1, а выражение для y_1 имеет вид (2.5), где $B_1(0) = B_0$. Постоянной $B_1(\varepsilon)$ нужно распорядиться так, чтобы следующее приближение получилось периодическим. И так далее.

Предлагаемая схема (2.2) позволяет найти периодические функции со сколь угодно высоким индексом i, т. е. любое формальное приближение по степеням ε периодических функций (2.1). Действительно, пусть это утверждение справедливо для $i = 0, 1, \ldots, k-1$, т. е.

$$x_{k-1} = x_0 + \varepsilon A_{k-1} + \varepsilon \overset{*}{x}_{k-1},\quad y_{k-1} = y_0^* + B_{k-1} + \varepsilon \overset{*}{y}_{k-1}$$
$$z_{k-1} = z_0 + \varepsilon \overset{*}{z}_{k-1}$$

— периодическое решение системы $(k-1)$-го приближения, где постоянная $B_{k-1}(\varepsilon)$ найдена из условия периодичности функции $x_k = x_0 + \varepsilon A_k + \varepsilon x_k^*$, в которой A_k — неизвестный параметр. В результате подстановки B_{k-1} выражения x_k^* и z_k^* полностью найдены

$$x_k^* = \int_{t_0}^{t}[(f_h')z_k^* + (f''_{a\varepsilon})x_{k-1} + (f''_{\psi\varepsilon})y_{k-1} + (f''_{h\varepsilon})z_{k-1} +$$
$$+ \frac{1}{2}(f_{\varepsilon^2}'') + (f''_{ah})x_{k-1}z_{k-1} + (f''_{\psi h})y_{k-1}z_{k-1} +$$
$$+ \frac{1}{2}(f''_{h^2})z_{k-1}^2 + f^*(t_1, x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}\varepsilon)\Big]dt_1$$
$$z_k^* = H\,[(g_{a\varepsilon}'')x_{k-1} + (g_{\psi\varepsilon}'')y_{k-1} + (g_{h\varepsilon}'')z_{k-1} + {}^1/_2\,(g_{\varepsilon^2}'') +$$
$$+ {}^1/_2\,(g_{h^2}'')z_{k-1}^2 + H'(a^*)x_{k-1}z_{k-1} + g^*(t_1, x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}, \varepsilon)]$$

Далее, из условия периодичности функции $y_k^*(t, A_k, \varepsilon)$

$$y_k^* = \omega'(a^*)A_k(t-t_0) + y_k^{**}(t,\varepsilon) \equiv \omega'(a^*)A_k(t-t_0) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t}\Big[\omega'(a^*)x_k^* + \frac{1}{2}\omega''(a^*)x_{k-1}^2 + (F''_{a\varepsilon})x_{k-1} + (F_h')z_k^* +$$
$$+ (F''_{\psi\varepsilon})y_{k-1} + (F''_{h\varepsilon})z_{k-1} + \frac{1}{2}(F''_{\varepsilon^2}) + (F''_{ah})x_{k-1}z_{k-1} +$$
$$+ (F''_{\psi h})y_{k-1}z_{k-1} + \frac{1}{2}(F''_{h^2})z_{k-1}^2 + F^*(t_1, x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}, \varepsilon)\Big]dt_1$$

определяются A_k и y_k^*

$$A_k(\varepsilon) = -y_k^{**}(T, \varepsilon) / \omega'(a^*) T, \quad y_k^*(t, \varepsilon) = y_k^{**}(t, \varepsilon) - y_k^{**}(T, \varepsilon)(t - t_0) / T$$

Для определения параметра B_k следует воспользоваться выражением для $x_{k+1}^*(t, B_k, \varepsilon)$

$$x_{k+1}^* = \int_{t_0}^{t} f_{k+1}(t_1, \varepsilon)\, dt_1 + \int_{t_0}^{t} \{(f_{\psi\varepsilon}'') B_k + (f_h') H [(g_{\psi\varepsilon}'') B_k + g^*(t_1, x_k, y_0^* + B_k + \varepsilon y_k^*, z_k, \varepsilon)] + (f_{\psi h}'')(z_0 + \varepsilon z_k^*) B_k + f^*(t_1, x_k, y_0^* + B_k + \varepsilon y_k^*, z_k, \varepsilon)\}\, dt_1$$

$$f_{k+1}(t, \varepsilon) \equiv (f_h') H [(g_{a\varepsilon}'') x_k + (g_{\psi\varepsilon}'') y_k + (g_{h\varepsilon}'') z_k + {}^1/_2 (g_{\varepsilon^2}'') + {}^1/_2 (g_{h^2}'') z_k^2 + H'(a^*) x_k z_k] + (f_{a\varepsilon}'') x_k + (f_{\psi\varepsilon}'')(y_0^* + \varepsilon y_k^*) + (f_{h\varepsilon}'') z_k + {}^1/_2 (f_{\varepsilon^2}'') + (f_{ah}'') x_k z_k + (f_{\psi h}'')(y_0^* + \varepsilon y_k^*) z_k + {}^1/_2 (f_{h^2}'') z_k^2$$

Соотношение периодичности функции x_{k+1} имеет вид

$$P'(\varphi^*) B_k = -\int_0^T \{f_{k+1}(t, \varepsilon) + f_k^*(t, B_k, \varepsilon) + \varepsilon (f_{\psi h}'') B_k z_k^* + (f_h') H [g_k^*(t, B_k, \varepsilon)]\} dt \tag{2.7}$$

Здесь функции f_k^*, g_k^* удовлетворяют условию Липшица по B_k, ε и обращаются в нуль при $\varepsilon = 0$. Таким образом, $B_k(0) = B_0$ (см. (2.6)). Уравнение (2.7) удовлетворяет всем условиям теоремы существования неявной функции $B_k(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ достаточно малом. Она может быть построена на каждом шаге последовательными приближениями по малому параметру

$$B_k^{(j)}(\varepsilon) = -\frac{1}{P'(\varphi^*)} \int_0^T \{f_{k+1}(t, \varepsilon) + f_k^*(t, B_k^{(j-1)}, \varepsilon) + \varepsilon (f_{\psi h}'') B_k^{(j-1)} z_k^* + (f_h') H [g_k^*(t, B_k^{(j-1)}, \varepsilon)]\} dt, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \qquad B_k^{(0)} = B_0 \tag{2.8}$$

Обоснование схемы последовательных приближений построения периодического решения x, y, z может быть проведено на основании [4] и здесь не приводится.

Полученный результат выражает

Теорема 2.1. Возмущенная система (1.1) при $\varepsilon > 0$ достаточно малом допускает резонансное решение вида (2.1), если

а) выполняются условия 1) — 6) п. 1;

б) a^* и φ^* — простые вещественные корни соответствующих уравнений.

Возможны различные критические случаи, когда условия б) теоремы 2.1 не выполняются:

1) Уравнение (2.4) не имеет вещественных корней; тогда в системе (1.1) не могут осуществляться стационарные режимы вида (2.1) сколь бы малым ни было значение $\varepsilon > 0$.

2) Уравнение (2.4) имеет кратный вещественный корень; в этом случае для аналитических систем может быть проведено дополнительное исследование на основе метода Пуанкаре [4]. Известно, что кратные корни, как правило, приводят к расщеплению траекторий и разложениям по дробным степеням параметра [5]. Схема последовательных приближений для этого сложного случая не развита.

3) Соотношение (2.4) выполняется тождественно, т. е. независимо от φ; в этом случае могут иметь место движения высших степеней [4], для которых на основе метода Пуанкаре устанавливаются аналогичные теореме 2.1 утверждения с замечаниями 1), 2),

4) Частота $\omega = \mathrm{const}$, причем $\omega = n\nu / m$; тогда развитая выше схема упрощается [4]. Определяющие уравнения суть

$$(2.9)\qquad P(a,\varphi) \equiv \int_0^T \{(f_\varepsilon') + (f_h')H[(g_\varepsilon')]\}\,dt = 0$$

$$Q(a,\varphi) \equiv \int_0^T \{(F_\varepsilon') + (F_h')H[(g_\varepsilon')]\}\,dt = 0$$

Условие существования стационарного резонансного режима состоит в том, чтобы функциональный определитель $\det J \equiv \det\,(\partial\,(P,\,Q)\,/\,\partial(a^*,\varphi^*))$ был отличен от нуля.

Следует отметить, что в конкретных задачах определяющие уравнения типа (2.4) или (2.9) могут быть построены на основе интегралов исходной системы [2].

3. Исследование устойчивости по Ляпунову. Вопрос об устойчивости построенного решения не может быть исследован на основе системы нулевого приближения по ε. Для вычисления характеристических показателей необходимо составить систему в вариациях путем замены

$$a = a\,(t,\,\varepsilon) + U,\ \psi = \psi\,(t,\,\varepsilon) + V,\ h = h\,(t,\,\varepsilon) + W$$

Очевидно, что точка покоя при $\varepsilon=0$ неустойчива для $t \gtrless t_0$, так как двукратному нулевому характеристическому показателю отвечает одна группа решений, т. е. имеет место сложный критический случай [2,4,6], причем критические характеристические показатели имеют порядок дробной степени ε.

К линейной системе в вариациях с периодическими коэффициентами применима теория Флоке — Ляпунова [6]. На ее основе совершим замену

$$U = ue^{\alpha t},\ V = ve^{\alpha t},\ W = we^{\alpha t}$$

где u, v, w — периодические функции периода T, а α — характеристический показатель. Искомые величины определяются из системы

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} u^{\cdot} &= (f_a' - \alpha)\,u + f_\psi'\,v + f_h'w \\ v^{\cdot} &= (\omega' + F_a'\,)\,u + (F_\psi' - \alpha)\,v + F_h'w \\ w^{\cdot} &= (H'h + g_a')\,u + g_\psi'\,v + (H + g_h' - I\alpha)\,\omega \end{aligned}$$

Требуется найти такие значения α, для которых система (3.1) допускает периодическое решение.

Методом последовательных приближений [6] можно показать, что $\alpha = \delta\alpha_1 + \delta^2\alpha_2 + O(\delta^3)$, где $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, $u(t, \varepsilon) = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \delta^3 u_3$ (t, ε) и аналогично для v, w.

Из уравнений нулевого приближения по δ следует, что $u_0 \equiv 0$, $w_0 \equiv 0$, $v_0 = \mathrm{const}$. Условие периодичности функций u_1, v_1, w_1 приводит к выражениям

$$u_1 = \mathrm{const}, \quad v_1 = \mathrm{const}, \quad \alpha_1 v_0 = \omega'(a^*) u_1, \; w_1 \equiv 0$$

Подстановка $w_2 = v_0 H[(g_{\psi\varepsilon}'')]$ в уравнение для u_2 приводит к соотношению

$$\alpha_1^2 = \omega'(a^*)\, P'(\varphi^*) \,/\, T \tag{3.2}$$

В вычисленном приближении при $\alpha_1^2 < 0$ критические характеристические показатели чисто мнимы. Вычисление их с точностью порядка ε из условий периодичности нулевого приближения функций u_3, v_3, w_3 приводит к выражению

$$\alpha_2 = \frac{1}{2T}\int_0^T [(f_{a\varepsilon}'') + (f_{ah}'')\, z_0 + (f_h')\, \omega'(a^*)\, w_3^* + {} \tag{3.3}$$
$$+ (F_{\psi\varepsilon}'') + (F_{\psi h}'')\, z_0 + (F_h')\, w_2^*]\, dt$$
$$w_2^*(t) = H[(g_{\psi\varepsilon}'')], \quad w_3^*(t) = H[H'(a^*) z_0 \,/\, \omega'(a^*) +$$
$$+ (g_{a\varepsilon}'') \,/\, \omega'(a^*) - w_2^*]$$

Теорема 3.1. Возмущенное решение (2.1) системы (1.1) устойчиво и притом асимптотически при $\varepsilon > 0$ достаточно малом, если

а) $\alpha_1^2 < 0$ — необходимое условие (см. (3.2));

б) $\alpha_2 < 0$ (см. (3.3))

и неустойчиво, если имеет место хотя бы одно обратное неравенство.

Для рассмотренного в 4) п. 2 случая $\omega = \mathrm{const}$ достаточными условиями асимптотической устойчивости являются требования отрицательности действительных частей обоих корней квадратного уравнения $\det(J - I\alpha) = 0$.

В частном случае системы (1.1), когда вектор h отсутствует (возмущающие члены при этом пропорциональны ε), величины $P(\varphi^*)$ и α_2 имеют более простой вид [7]

$$P(\varphi) = \int_0^T (f)\, dt, \quad \alpha_2 = \int_0^T [(f_a') + (F_\psi')]\, dt \quad (f \to \varepsilon f, \;\; F \to \varepsilon F)$$

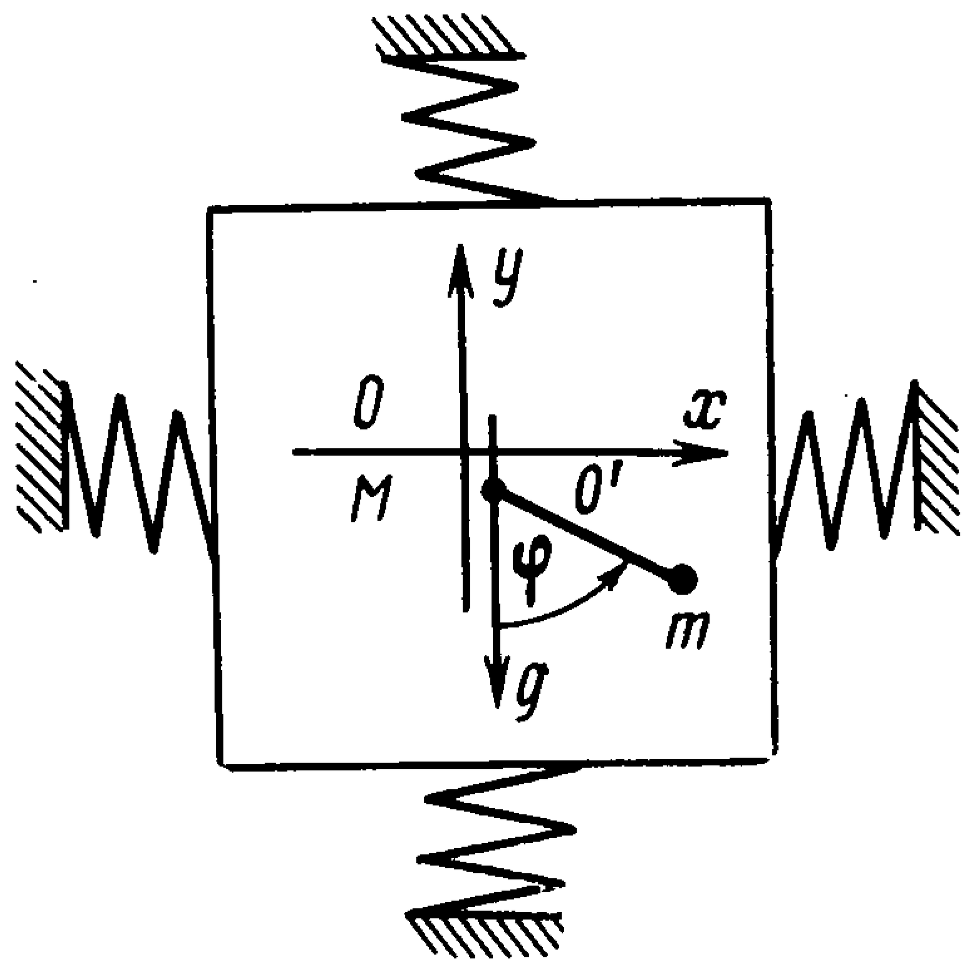
Во многих конкретных задачах условия устойчивости могут быть выписаны при помощи интегралов исходной невозмущенной системы. Например, для вращательной системы, близкой к консервативной [8]: $x'' + Q(x) = \varepsilon q(\nu t, x, x', \varepsilon)$, определяющее соотношение (2.4) и условия устойчивости имеют вид

$$P(\varphi) \equiv \int_0^T q(\nu t, x_0, x_0^{\cdot}, 0)\, x_0^{\cdot} dt = \int_0^{2\pi} q\left(\nu \int \frac{dx}{x_0^{\cdot}(x, a^*)} - \right.$$

$$\left. - \nu\varphi, x, x_0^{\cdot}(x, a^*), 0\right) dx = 0, \qquad x_0^{\cdot} = [2(a^* - \int Q dx)]^{1/2}$$

$$\text{а)}\quad P'(\varphi^*) < 0, \qquad \text{б)} \int_0^{2\pi} (q_{x^{\cdot}}') \frac{dx}{x_0^{\cdot}} < 0$$

В случае $\alpha_2 = 0$ необходимо вычислить критические характеристические показатели более точно по степеням δ, что требует более высокой гладкости системы (1.1)



4. *Пример.* Рассматривается задача об установившихся колебаниях и вращениях в плоской системе с тремя степенями свободы, изображенной на фигуре. Здесь M — масса основания, на котором находится несбалансированный ротор; m — масса ротора, l — плечо, φ — угловое отклонение. Начало координат помещается в точку O, в которой находится ось вращения O' ротора при равновесии системы. Предполагается, что основание может совершать только поступательные колебательные движения по осям x и y.

Тогда уравнения движения модели с учетом внешних периодических сил и вязкого трения можно записать в виде

(4.1)
$$(M + m) X^{\cdot\cdot} + ml(\varphi^{\cdot} \cos\varphi)^{\cdot} + K_x X + Q_x(X, Y) = -\mathrm{B}_x X^{\cdot} + F_x(\nu t)$$

$$(M + m) Y^{\cdot\cdot} + ml(\varphi^{\cdot} \sin\varphi)^{\cdot} + K_y Y + Q_y(X, Y) = -\mathrm{B}_y Y^{\cdot} + F_y(\nu t)$$

$$ml^2\varphi^{\cdot\cdot} + ml(X^{\cdot}\cos\varphi + Y^{\cdot}\sin\varphi)^{\cdot} + mgl\sin\varphi = -\mathrm{B}l\varphi^{\cdot} - \Gamma l(X^{\cdot}\cos\varphi + Y^{\cdot}\sin\varphi) + N(\nu t)$$

Здесь X, Y — декартовы координаты точки O'; K_x, K_y — коэффициенты упругости; Q_x, Q_y — нелинейные добавки, разложения которых начинаются с квадратичных членов; B_x, B_y — коэффициенты вязкого трения; F_x, F_y — внешние периодические силы, ν — частота. На ротор действуют силы вязкого трения с коэффициентами В и Г, внешний периодический момент N и момент сил тяжести (g — ускорение свободного падения). Предполагается, что все параметры системы постоянны.

Ниже рассматривается представляющий практический интерес случай быстрых вращений ротора. Считается, что частота внешнего воздействия ν порядка собственных частот колебаний основания, закрепленного вязкоупругим образом, много больше характерной частоты колебаний ротора в поле сил тяжести $\sqrt{g/l}$, т. е. $g / l\nu^2 \sim \varepsilon$. Тогда при некоторых естественных предположениях установившееся движение ротора близко к равномерному вращению со скоростью $\omega \sim \nu$, а колебания основания относительно положения равновесия происходят с частотой $\sim \nu$ и амплитудой порядка ε. С учетом упомянутых предположений, физический смысл которых ясен, далее вводятся безразмерные переменные и параметры системы

$$\frac{m}{M+m} = \varepsilon \ll 1, \quad s = \nu t, \quad \frac{g}{l\nu^2} = \varepsilon\omega_0^2 \quad (\omega_0 \sim 1)$$

$$\frac{X}{l} = x, \quad \frac{Y}{l} = y, \quad \frac{Q_{x,y}(X, Y)}{(M+m) l\nu^2} = q_{x,y}(x, y)$$

$$\frac{K_{x,y}}{(M+m)\nu^2}=\omega^2_{x,y},\quad \frac{B_{x,y}}{(M+m)\nu}=\beta_{x,y},\quad \frac{F_{x,y}(\nu t)}{(M+m)l\nu^2}=\varepsilon f_{x,y}(s)$$

$$\frac{B}{ml\nu}=\varepsilon\beta,\quad \frac{\Gamma}{ml\nu}=\varepsilon\gamma,\quad \frac{N(\nu t)}{ml^2\nu^2}=\varepsilon\mu(s)$$

Деление первых двух уравнений (4.1) на $(M+m)\,l\nu^2$, третьего уравнения — на $ml^2\nu^2$ и использование принятых обозначений после приведения системы к нормальному виду (разрешенному относительно старших (вторых) производных по «быстрому безразмерному времени» s) позволяют сразу записать ее в виде системы (1.1). При этом переменные x, y и их производные по s: $x'=u$, $y'=v$ представляют собой устойчивый вектор h четвертого порядка, а в качестве фазы ψ можно взять угловую переменную φ, скорость вращения которой $\varphi'=\omega$ есть квазистатическая переменная a в обозначениях п. 1. В результате получается система шести уравнений вида (1.1)

$$\omega'=f,\quad \varphi'=\omega\qquad ('\equiv d\,/\,ds) \tag{4.2}$$
$$x'=u,\quad u'=-\beta_x u-\omega_x{}^2x-q_x+\varepsilon\,(f_x+\omega^2\sin\varphi-f\cos\varphi)$$
$$y'=v,\quad v'=-\beta_y v-\omega_y{}^2y-q_y+\varepsilon\,(f_y-\omega^2\cos\varphi-f\sin\varphi)$$
$$f\equiv f\,(s,\omega,\varphi,x,u,y,v,\varepsilon)=$$
$$=\cos\varphi\,(1-\varepsilon)^{-1}(\beta_x u+\omega_x{}^2x+q_x-\varepsilon f_x)+\sin\varphi\,(1-\varepsilon)^{-1}(\beta_y v+$$
$$+\omega_y{}^2y+q_y-\varepsilon f_y)+\varepsilon\,(1-\varepsilon)^{-1}\,[\mu-\omega_0{}^2\,\sin\varphi-\beta\omega-\gamma\,(u\cos\varphi+$$
$$+\,v\sin\varphi)]$$

(функция $F\equiv 0$, матрица H постоянна).

Пусть $f_x=f_{x0}\sin(s+\delta_x)$, $f_y=f_{y0}\sin(s+\delta_y)$; тогда в первом приближении устойчивые элементы x и y—суммы двух гармонических функций s с частотами 1 и $n\,/\,m$ вида (τ — фазовая постоянная)

$$x=\varepsilon A_x\sin(s+\alpha_x)+\varepsilon B_x\sin\left(\frac{n}{m}s+\tau+\tau_x\right)$$

$$A_x=f_{x0}\,[(\omega_x{}^2-1)^2+\beta_x{}^2]^{-1/2},\quad B_x=\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\omega_x{}^2-\frac{n^2}{m^2}\right)^2+\beta_x{}^2\frac{n^2}{m^2}\right]^{-1/2}$$

$$\alpha_x=\operatorname{arctg}\,[\beta_x(1-\omega_x{}^2)^{-1}]+\delta_x,\quad \tau_x=\operatorname{arctg}\left[\beta_x\frac{n}{m}\left(\frac{n^2}{m^2}-\omega_x{}^2\right)^{-1}\right]$$

Выражение для y получается заменой индекса x на y.

Подстановка функций x, y и их производных u, v в первое уравнение (4.2) приводит к уравнению для определения фазовой постоянной типа (2.4), из которого следует, что в системе может осуществляться основной резонансный режим, т. е. $n=m=1$

$$2P\,(\tau)\equiv r\sin(\tau+\theta)+c=0,\quad \tau^*=\tau_{1,2}=-\operatorname{Arcsin}c/r-\theta \tag{4.3}$$
$$r^2\equiv a^2+b^2=(\beta_xA_x\cos\alpha_x+\omega_x^2A_x\sin\alpha_x-f_{x0}\cos\delta_x-\beta_yA_y\sin\alpha_y+$$
$$+\omega_y{}^2A_y\cos\alpha_y-f_{y0}\cos\delta_y)^2+(\beta_xA_x\sin\alpha_x-\omega_x{}^2A_x\cos\alpha_x+f_{x0}\cos\delta_x+$$
$$+\beta_yA_y\cos\alpha_y+\omega_y{}^2A_y\sin\alpha_y-f_{y0}\sin\delta_y)^2$$
$$c=(\beta_x\cos\tau_x+\omega_x{}^2\sin\tau_x)\,B_x+(\beta_y\sin\tau_y-\omega_y{}^2\cos\tau_y)\,B_y+\mu_0-\beta$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{a}{b},\quad \mu_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu(s)\,ds$$

Уравнение (4.3) допускает два простых вещественных корня $\tau^*=\tau_{1,2}$ на интервале $\tau\in[0,2\pi]$, если $|\,c\,/\,r\,|<1$, что и предполагается. Тогда $P'\,(\tau^*)\neq 0$ и выполнены все условия теоремы 2.1 существования и единственности стационарного резонансного решения, отвечающего каждому корню $\tau_{1,2}$. Это решение может быть построено с любой степенью точности разложением в ряды или последовательными приближениями по ε при помощи методики п. 2.

Из вида функции $P\,(\tau)$ (4.3) следует, что для одного из корней, например $\tau^*=\tau_1$, $P'\,(\tau_1)<0$, а для другого $P'\,(\tau_2)>0$. На основании теоремы 3.1 стационарный режим, отвечающий корню τ_2, неустойчив. Движение, отвечающее корню τ_1, будет устойчивым и притом асимптотически при $\varepsilon > 0$ достаточно малом, если $\beta > {}^1/_2\delta$

$$\delta = r_x^{-1}\{\beta_x a_x + [\omega_x^2(\omega_x^2 - 1) + \beta_x^2]\, b_x + \beta_x(\omega_x^2 - 1)\} + \\ + r_y^{-1}\{[\omega_y^2(\omega_y^2 - 1) + \beta_y^2]\, a_y + \beta_y b_y + \beta_y(\omega_y^2 - 1)\}$$

$$a_x = 2 + r_x^{-1}[2(\omega_y^2 - 1) - \beta_x^2], \quad b_x = -\beta_x r_x^{-1}(\omega_x^2 + 1)$$

$$r_x = (\omega_x^2 - 1)^2 + \beta_x^2$$

$$a_y = -\beta_y r_y^{-1}(\omega_y^2 + 1), \quad b_y = -2 - r_y^{-1}[2(\omega_y^2 - 1) - \beta_y^2]$$

$$r_y = (\omega_y^2 - 1)^2 + \beta_y^2$$

Следует отметить, что стационарный режим может иметь место, если отлична от нуля хотя бы одна из величин f_{x0} или f_{y0}. В противном случае в системе заведомо не могут осуществляться быстрые вращательно-колебательные движения при $\mu_0 \neq \beta$. Если же $\mu_0 = \beta$, то система (4.2) может допускать установившиеся резонансные движения высших степеней [4]. В этом случае требуется дополнительное исследование, так как $P(\tau) \equiv 0$ (см. 3) п. 2).

Автор благодарит М. Л. Лидова, указавшего на необходимость рассмотрения систем типа (1.1) с оценками (1.2).

Поступила 17 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
2. *Акуленко Л. Д.* О резонансных колебательных и вращательных движениях. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., «Наука», 1973.
4. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
5. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Акуленко Л. Д.* О резонансе в нелинейных системах с одной степенью свободы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.
8. *Акуленко Л. Д., Волосов В. М.* О резонансе во вращательной системе. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1967, № 1.