Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31+62—50

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ НЕКОТОРЫМИ СИСТЕМАМИ

В. Б. Колмановский

(Москва)

Рассматривается задача о максимизации вероятности достижения управляемой системой заданного состояния. Исследуются соответствующее уравнение Беллмана и способы определения оптимального управления. Приведены примеры.

1. Пусть дана управляемая система

$$x^{\cdot}(t) = f(x(t)) + Bu(x(t)) + \sigma(x(t))\xi^{\cdot}(t), \quad t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

Здесь x — вектор фазовых координат из евклидова пространства E_n, матрица B — постоянная, функция f и матрица σ удовлетворяют при некоторой постоянной $c \geqslant 0$ и любых $x_1, x_2 \in E_n$ требованию

$$|f(x_1) - f(x_2)| + |\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| \leqslant c\,|x_1 - x_2| \tag{1.2}$$

наконец, $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс, а управление $u(x) \in E_m$, причем для заданного ограниченного выпуклого множества U

$$u(x) \in U \tag{1.3}$$

Отметим, что при выполнении условий (1.2) и $u \equiv 0$ существует [1] сильное решение уравнения (1.1).

Пусть имеется ограниченное целевое множество $Q \subset E_n$ с границей Q_1. Дополнение $Q \cup Q_1$ до E_n обозначим через Q_2.

Пусть далее $\tau_x(u)$ означает момент первого достижения Q_1 системой (1.1) при управлении u и начальном условии $x(0) = x \in Q_2$. При этом $\tau_x(u)$ полагается равным бесконечности для тех реализаций процесса (1.1), которые ни за какое конечное время не достигают Q_1. Назовем некоторое управление из (1.3) допустимым, если при этом управлении и начальном условии $x(0) \in Q_2$ существует решение уравнения (1.1). Обозначим через $P(\cdot)$ вероятность события, заключенного в скобках.

Задача. Выбрать среди допустимых такое управление, которое максимизирует вероятность $P(\tau_x(u) < \infty)$, $x \in Q_2$, т. е. максимизирует вероятность достижения за конечное время целевого множества Q, исходя из Q_2.

С поставленной задачей свяжем следующую краевую задачу для уравнения Беллмана:

$$\begin{gathered} \max\nolimits_{u \in U} L_u V(x) = 0, \quad x \in Q_2 \\ V(x) = 1, \quad x \in Q_1 \\ L_u = (f + u)' \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sigma\sigma' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь штрих — знак транспонирования, вектор $\partial / \partial x$ и матрица $\partial^2 / \partial x^2$ имеют компоненты соответственно $\partial / \partial x_i$, $\partial^2 / \partial x_i \partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, символ Tr означает след матрицы.

Обычным образом [2] устанавливается, что если функция

$$\max_{u \in U} P(\tau_x(u) < \infty), \quad x \in Q_2 \tag{1.5}$$

достаточно гладкая по x, то она удовлетворяет (1.4). Однако даже в этом случае соотношения (1.4), вообще говоря, не определяют функцию (1.5) ввиду возможной неединственности решения внешней краевой задачи (1.4). Кроме того, обычная процедура вычисления оптимального управления, состоящая в решении уравнения Беллмана и последующем определении по нему оптимального управления, в поставленной задаче также не всегда осуществима, ибо, например, возможны ситуации, когда функция (1.5) тождественно равна единице. В п. 2, 3 будут даны некоторые ответы на поставленные вопросы, а в п. 4 приведены примеры.

Отметим, что иные задачи управления с вероятностным критерием исследовались в [3,4]. Точнее говоря, в [3] рассмотрена задача о максимизации вероятности пребывания системы вне заданной области, а в [4] — о максимизации вероятности пребывания внутри области в течение заданного конечного отрезка времени.

2. Будем считать в дальнейшем, что матрица $\sigma(x)$ равномерно невырождена по $x \in Q_2$, а Q_1 — граница типа Ляпунова [5].

Пусть $R_N \subset E_n$ — последовательность шаров радиуса N с границей r_N, причем $Q \subset R_N$, а последовательность функции $V_N^*(x)$ определяется соотношениями

$$\begin{gathered} \max_{u \in U} L_u V_N(x) = 0, \quad x \in Q_2 \cap R_N \\ V_N(x) = 1, \quad x \in Q_1, \ V_N(x) = 0, \ x \in r_N \end{gathered} \tag{2.1}$$

На основании [6] существует и притом единственное решение краевой задачи (2.1), а в силу принципа максимума для эллиптических уравнений [7]

$$1 > V_{N_2}(x) \geqslant V_{N_1}(x) > 0, \quad x \in Q_2 \cap R_{N_1}, \quad N_2 \geqslant N_1 \tag{2.2}$$

Теорема 1. Пусть выполнены сделанные предположения о коэффициентах системы (1.1) и области Q. Тогда $V_N(x)$ равномерно сходится к $V_0(x)$ при $N \to \infty$ на любом ограниченном множестве изменения аргумента x, а предел $V_0(x)$ есть минимальное положительное решение задачи (1.4).

Доказательство. Пусть дана некоторая ограниченная область $Q_3 \subset E_n$ с границей типа Ляпунова. Из условий теоремы, оценки (2.2) и [6] следует, что

$$\max_x \left\| \frac{\partial V_N(x)}{\partial x} \right\| \leqslant c_1, \quad x \in Q_3 \cap Q_2 \tag{2.3}$$

Аналогичным образом из (2.2), (2.3), (1.2) и [6]

$$\max_x \left\| \frac{\partial^2 V_N(x)}{\partial x^2} \right\| \leqslant c_2, \quad x \in Q_3 \cap Q_2 \tag{2.4}$$

В соотношениях (2.3), (2.4) и ниже через c_i обозначены некоторые неотрицательные постоянные. Из (2.3), (2.4) и [8] вытекает компактность последовательности $(V_N(x), \partial V_N(x) / \partial x)$ в пространстве непрерывных функций при $x \in Q_3 \cap Q_2$. Выберем некоторую сходящуюся подпоследовательность последовательности $(\partial V_N(x) / \partial x,\ V_N(x))$ и обозначим через $(\partial V_0(x) / \partial x,\ V_0(x))$ соответствующий предел. Ввиду произвольности Q_3 функция $V_0(x)$ — решение краевой задачи (1.4) (см., [7], стр. 176).

Отсюда, из (2.2), (2.3) следует, что и сама последовательность $V_N(x)$ равномерно сходится, не убывая к $V_0(x)$.

Предположим теперь, что $V_0(x)$ не есть минимальное положительное решение задачи (1.4). Тогда существует такое решение $V(x)$ этой задачи, что

$$0 \leqslant V(x) \leqslant V_0(x) \tag{2.5}$$

Таким образом, в частности, справедливы формулы

$$V(x) = V_N(x) = 1, \quad x \in Q_1$$

$$V(x) \geqslant V_N(x) = 0, \quad x \in r_N$$

Отсюда и из принципа максимума для эллиптических уравнений (см. [7], стр. 162) вытекает оценка

$$V_N(x) \leqslant V(x), \quad x \in Q_2 \cap R_N \tag{2.6}$$

Из этой оценки, сходимости $V_N(x)$ к $V_0(x)$ и (2.5) заключаем, что $V(x) \equiv V_0(x)$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Для случая неуправляемого винеровского процесса (т. е. для случая, когда в (1.1) коэффициенты $f = 0$, $B = 0$ и σ — единичная матрица) теорема 1 переходит в утверждение, установленное ранее [9].

В соответствии с [10] существует измеримая функция $u_N(x)$, реализующая максимум в (2.1). Введем в рассмотрение последовательность управлений $v_N(x)$, равных $u_N(x)$ при $x \in Q_2 \cap R_N$ и равных произвольной фиксированной постоянной из U для остальных значений x.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 при любом допустимом управлении u величина

$$J(x, u) = P(\tau_x(u) < \infty) \leqslant V_0(x) \tag{2.7}$$

Далее, если управления $u_N(x)$ допустимы, то при $N \to \infty$

$$J(x, v_N) \to V_0(x) \tag{2.8}$$

причем сходимость в (2.8) равномерна на любом ограниченном множестве изменения x.

Доказательство. Предположим, что при некотором допустимом управлении u

$$J(x, u) > V_0(x) \tag{2.9}$$

Пусть $x(t, u)$ означает решение (1.1) при управлении u, а $\tau_x^N(u)$ — момент первого выхода процесса $x(t, u)$ из $Q_2 \cap R_N$ при начальном условии $x(0, u) = x \in Q_2 \cap R_N$. На основании [11] и условий теоремы 2

$$M\tau_x^N(u) < \infty$$

Отсюда вытекает, что (см. [12], стр. 191)

$$MV_N(x(\tau_x^N(u),u)) - V_N(x) = M\int\limits_0^{\tau_x^N(u)} L_uV_N(x(t,u))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^{\tau_x^N(u)} \max_u L_uV_N(x(t,u))\,dt = 0$$

Значит, с учетом граничного условия для V_N, получаем, что при любом N

(2.10) $\qquad P(x(\tau_x^N(u),u) \in Q_1) \leqslant V_N(x)$

Левая часть этого неравенства стремится к $J(x, u)$ при $N \to \infty$. Поэтому, ввиду (2.5), (2.6), (2.10) и теоремы 1 заключаем, что $J(x, u) \leqslant \leqslant V_0(x)$, что противоречит (2.9). Тем самым соотношение (2.7) установлено.

Для обоснования (2.8) заметим, что при $x \in Q_2 \cap R_N$ функция $J(x, v_N)$ удовлетворяет краевой задаче

$$L_{u_N} J(x, v_N) = 0, \quad x \in Q_2 \cap R_N$$

$$J(x, v_N) = 1, \quad x \in Q_2, \quad J(x, v_N) \geqslant 0, \quad x \in r_N$$

Отсюда, из (2.1), (2.7) и принципа максимума [7] следует, что

$$V_N(x) \leqslant J(x, v_N) \leqslant V_0(x)$$

Используя еще теорему 1, убеждаемся в справедливости равномерной сходимости в (2.8). Теорема 2 доказана. Она показывает, что если в системе (1.1) использовать управление $v_N(x)$, то можно сколь угодно близко приблизиться к оптимальному значению $V_0(x)$ функционала (1.5) при достаточно большом N.

Замечание. Отметим, что использованный при доказательстве теорем 1, 2 прием, состоящий в построении последовательности $V_N(x)$ и переходе к пределу при $N \to \infty$, может служить и для практического вычисления минимального положительного решения уравнения Беллмана (см. пример 1).

3. Рассмотрим некоторые свойства функции $V_0(x)$. Как уже отмечалось, если $V_0(x) \equiv 1$, то (1.4) не определяет оптимального управления. По аналогии с [13] достаточное условие тождества $V_0(x) \equiv 1$ заключается в существовании единственного решения краевой задачи (1.4) в классе ограниченных функций, поскольку ограниченная функция $V_0(x)$ удовлетворяет (1.4) ввиду теоремы 1, а функция $V(x) \equiv 1$ также есть решение (1.4). Другим достаточным условием тождества $V_0(x) \equiv 1$ служит существование при некотором допустимом управлении u такой неотрицательной функции $W(x)$, что $L_u W(x) \leqslant -c$ при некоторой постоянной $c > 0$. Это последнее условие следует из [14].

Приведем еще один случай, когда $V_0(x)$ не определяет оптимального управления. Предположим, что для некоторого $N > 0$

(3.1) $\qquad \min\limits_{x,\,|x| \geqslant N} V_0(x) > 0$

При этом без ограничения общности можно считать

(3.2) $V_0(x) < 1, \ x \in Q_2$

ибо в противном случае на основании принципа максимума для эллиптических уравнений $V_0(x) \equiv 1$, а эта ситуация уже рассмотрена выше. Пусть u_0 — любое допустимое управление, максимизирующее выражение $L_u V_0(x)$. Покажем, что оно не является оптимальным. Имеем (см. [9])

(3.3) $MV_0(x(\tau_x^N(u_0), u_0)) - V_0(x) = 0$

При любом N вероятность $P(\tau_x^N(u_0) < \infty) = 1$, поэтому с учетом неравенства (3.2) и результатов п. 2 получаем, что

$$P(x(\tau_x^N(u_0), u_0) \in r_N) \geqslant c_3 > 0$$

Отсюда, из (3.1) и (3.3) следует оценка при некотором $\delta > 0$

$$P(x(\tau_x^N(u_0), u_0) \in Q_1) \leqslant V_0(x) - \delta$$

Значит, переходя к пределу при $N \to \infty$, заключаем, что

(3.4) $J(x, u_0) = P(x(\tau_x(u_0), u_0) \in Q_1) < V_0(x)$

Если теперь управления u_N допустимы, то ввиду (2.8) соотношение (3.4) показывает неоптимальность управления u_0. В противном случае для обоснования неоптимальности u_0 поступим следующим образом. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in Q_2$ и такое число $\varepsilon > 0$, для которого

(3.5) $J(x_0, u_0) = V_0(x_0) - \varepsilon$

Используя теорему 1, возьмем такое N, что

(3.6) $V_0(x_0) - V_N(x_0) \leqslant \varepsilon / 4$

Далее из доказательства лемм 2.1, 2.2 статьи [2] следует при любом $\varepsilon_1 > 0$ существование такого допустимого управления v, что

$$v'B' \frac{\partial V_0(x)}{\partial x} \geqslant \max\nolimits_{u \in U} u'B' \frac{\partial V_0(x)}{\partial x} - \varepsilon_1$$

Применим теперь формулу Е. Б. Дынкина [9] к функции $V_N(x)$ и процессу $x(t, v)$. Имеем

(3.7) $$MV_N(x(\tau_{x_0}^N(v), v)) - V_N(x_0) = M \int_0^{\tau_{x_0}^N(v)} L_v V_N(x(t, v))\, dt \geqslant$$

$$\geqslant M \int_0^{\tau_{x_0}^N(v)} (\max\nolimits_{u \in U} L_u V_N(x(t, v)) - \varepsilon_1)\, dt = -\varepsilon_1 M \tau_{x_0}^N(v)$$

Отсюда следует, что

(3.8) $P(x(\tau_{x_0}^N(v), v) \in Q_1) \geqslant V_N(x_0) - \varepsilon_1 M \tau_{x_0}^N(v)$

Но ввиду невырожденности матрицы $\sigma(x)$ и ограниченности множества U при любом допустимом управлении v из (1.3) величина $M\tau_{x_0}^N(v)$ равномерно ограничена по $v \in U$.

Поэтому можно выбрать такое ε_1, что

$$P(x(\tau_{x_0}^N(v), v) \in Q_1) \geqslant V_N(x_0) - \varepsilon / 4$$

Если теперь построить управление v_0 в соответствии с теоремой 2, т. е. положить $v_0(x) = v(x)$, $x \in Q_2 \cap R_N$ и взять $v_0(x)$ постоянной из U для остальных значений x, то

$$J(x_0, v_0) \geqslant V_N(x_0) - \varepsilon / 4$$

Отсюда, из (3.5), (2.2) и теоремы 2.1 следует оценка

$$J(x_0, v_0) \geqslant V_0(x_0) - \varepsilon / 2$$

Из этой оценки и (3.5) вытекает неоптимальность управления $u_0(x)$ при условии (3.1). Рассмотрим случай, когда

(3.9) $\lim_{|x|\to\infty} V_0(x) = 0$

Покажем, что при выполнении равенства (3.9) любое допустимое управление u_0, максимизирующее выражение $L_u V_0$—оптимальное. Воспользуемся для этого формулой (3.3). Представим в ней первый член в виде

(3.10) $$MV_0(x(\tau_x^N(u_0), u_0)) = P(x(\tau_x^N(u_0), u_0) \in Q_1) + M_1 V_0(x(\tau_x^N(u_0), u_0))$$

где символ M_1 означает, что математическое ожидание вычисляется по траекториям, для которых $x(\tau_x^N(u_0), u_0) \in r_N$. Перейдем в (3.10) к пределу при $N \to \infty$. С учетом (3.3), (3.9), (3.10) получим $J(x, u_0) = V_0(x)$. Тем самым оптимальность управления u_0 на основании теоремы 2 установлена.

Покажем, что достаточным условием (3.9) является существование такой положительной непрерывной функции $W(x)$, для которой

(3.11) $\max_{u\in U} L_u W(x) \leqslant 0, \quad x \in Q_2, \quad \lim_{|x|\to\infty} W(x) = 0$

Как и при выводе формул (3.7), (3.8), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое допустимое управление v, что при данном N будет

(3.12) $P(x(\tau_{x_0}^N(v), v) \in Q_1 \geqslant V_N(x_0) - \varepsilon$

где x_0 — произвольная фиксированная точка из $Q_2 \cap R_N$. Далее, заменяя в (3.7) функцию V_N на W, имеем с учетом (3.11)

$$MW(x(\tau_{x_0}^N(v), v)) - W(x_0) \leqslant M \int_0^{\tau_{x_0}^N(v)} \max_{u\in U} L_u W(x(t, v)) dt \leqslant 0$$

Отсюда, из положительности W и (3.10) следует, что

(3.13) $c_4 W(x_0) > P(x(\tau_{x_0}^N(v), v) \in Q_1)$

Оценки (3.12), (3.13) ввиду произвольности точки x_0 числа ε означают, что $c_4 W(x) \geqslant V_N^{\varepsilon}(x)$. Значит, $c_4 W(x) \geqslant V_0(x)$. Из последнего неравенства и (3.11) вытекает (3.9).

Замечание. Вопрос об оптимальности управления $u_0(x)$, максимизирующего величину $L_u V_0(x)$, сводится к вопросу о существовании решения системы (1.1) при $u = u_0(x)$. В общем случае управление $u_0(x)$ будет лишь измеримой функцией [10], что, вообще говоря, для существования решения системы (1.1) в сильном смысле недостаточно. Поэтому в общем случае необходимо расширить понятие решения, понимая его в слабом смысле [1], либо наложить дальнейшие ограничения на параметры задачи, достаточные для существования решения при $u = u_0(x)$ в сильном смысле. Сформулируем в предположениях п. 2 некоторые достаточные условия существования решения при $u = u_0(x)$ в указанном слабом или сильном смысле:

1) пусть матрица σ в (1.1) постоянна. Тогда (см. [1], стр. 143) существует слабое решение системы (1.1) при $u = u_0(x)$,

2) пусть ограничение (1.2) имеет вид $\| u \| \leqslant c$, $c > 0$; тогда $u_0(x)$ непрерывно по x, и, следовательно, система (1.1) при $u = u_0(x)$ имеет сильное решение (см., [1]).

Отметим еще, что при исследовании конкретных управляемых систем можно вначале формально определить функцию $u_0(x)$, максимизирующую $L_u V_0$, а уже затем обосновывать оптимальность $u_0(x)$, используя любые требования, достаточные для существования решения системы (1.1) при $u = u_0(x)$ (см. пример 1).

4. *Пример 1.* Рассмотрим движение твердого тела относительно центра масс, предполагая, что уравнения движения (уравнения Эйлера) записываются в виде

$$\begin{aligned} x_1^\cdot &= x_2 x_3 (a_2 - a_3)(a_2 a_3)^{-1} + u_1 + \sigma \xi_1^\cdot \quad (1\ 2\ 3) \\ |u| &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} \leqslant b, \quad b > 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь x_i — проекции вектора момента количества движения тела относительно центра масс на главные центральные оси инерции, a_i — главные центральные моменты инерции, число $\sigma > 0$, символ (1 2 3) означает, что уравнения для x_2 и x_3 получаются из (4.1) циклической перестановкой индексов.

Пусть Q — сфера заданного радиуса r. Уравнение Беллмана (1.4) в данном случае имеет не единственное решение. Действительно, с учетом (4.1) решением (1.4) будет при произвольной постоянной $c \geqslant 0$ любая функция

$$1 + c \int_r^{|x|} \left(\frac{r}{s}\right)^2 \exp\left(\frac{2b}{\sigma^2}(r - s)\right) ds, \quad |x| \geqslant r$$

Используя теорему 2, получаем, что оптимальное управление в данной задаче есть $u_0 = -c_1 |x|^{-1} x$, где c_1 — произвольное число из $[0, b]$, а соответствующая этому управлению вероятность достижения Q равна единице. Для обоснования существования решения уравнения (4.1) достаточно [14] найти функцию Ляпунова $W \geqslant 0$, для которой $L_{u_0} W \leqslant c_2 W$ при некоторой постоянной c_2. В данном примере в качестве функции Ляпунова можно взять функцию

$$W = \frac{1}{c_1}\left[|x| - r + \frac{\sigma^2}{b} \ln\frac{|x|}{r} + \frac{\sigma^4}{2b^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|x|}\right)\right], \quad |x| > r$$

и с ее помощью убедиться в существовании решения (4.1) до момента достижения Q, ибо $L_{u_0} W(x) = -1$, $|x| > r$.

При исследовании некоторых конкретных систем можно ослабить требование о невырожденности матрицы диффузии σ. Приведем соответствующий пример.

Пример 2. Изучим прецессионное движение плоского гироскопического маятника [15]. Пусть управляющий момент приложен вокруг оси кожуха гироскопа, x_1 — угол поворота маятника вокруг его оси, x_2 — угол поворота кожуха. При некоторых предположениях уравнения движения имеют вид [16]

$$x_1^\cdot = a_1 x_2 + u, \quad |u| \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \quad x_2^\cdot = -a_2 x_1 - a_3 x_2 + \sigma\xi \tag{4.2}$$

Здесь $a_i > 0$, $\sigma > 0$ — постоянные, механический смысл которых изложен, например, в [16]. Поставим задачу о приведении (4.2) в сферу $Q = x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2$.

Покажем, что для этой задачи оптимальное управление

$$u_0(x) = -\operatorname{sgn} x_1 \tag{4.3}$$

а вероятность достижения Q при этом управлении равняется единице. Обозначим через N число, для которого из неравенства $x_1^2 + x_2^2 \geqslant N$ следует, что $\sigma^2 < 2 |x_1| a_2 + 2a_3 a_1 x_2^2$, а через Q_3 множество

$$Q_3 = Q \cup (x_1, x_2 : |x_2| \leqslant \varepsilon, \quad |x_1| \leqslant N), \quad 0 < \varepsilon < \min(r, 1/(2a_1))$$

Положим

$$\omega(x) = \frac{a_2}{a_1} x_1^2 + x_2^2 - \alpha \left(\frac{a_2}{a_1} x_1^2 + x_2^2 \right)^{-m}$$

Ввиду (4.2), (4.3) заключаем, что можно так выбрать постоянные $\alpha > 0$, $m > 0$, что

$$L_{u_0}\omega(x) \leqslant -c < 0, \quad x \in \overline{Q}_3 \tag{4.4}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $\overline{Q}_3$ — дополнение Q_3 до E_2. Из (4.4) и [14] следует достижимость Q_3 с вероятностью единица при любом из указанных выше ε.

Пусть теперь $x = (x_1, x_2)$ — произвольная точка из $Q_3 \setminus Q$. Покажем, что вероятность, исходя из x, достичь Q равна единице. Пусть для определенности $x_1 < 0$. Тогда до момента τ_0 достижения траекторией $x_1(t)$ нуля $u_0=1$ и поэтому на основании (4.2)

$$x_2^{\cdot}(t) = -a_3 x_2 + \sigma\xi + a_2 \left[-x_1 e^{a_1 t} + \frac{1}{a_1}\left(1 - e^{a_1 t}\right)\right] \tag{4.5}$$

Отсюда и из [17] следует абсолютная непрерывность меры процесса x_2 относительно винеровской. Поэтому вероятность процессу $x_2(t)$ оставаться в области $|x_2| \leqslant 1/(2a_1)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 2N$ положительна. Значит, с учетом (4.2) процесс (4.2) за время $0 \leqslant t \leqslant 2N$ с положительной вероятностью успеет достичь шара Q, исходя из $x \in Q_3 \setminus Q$. Кроме того, ввиду (4.5) процесс $x_2(t)$ непрерывен по начальному условию x до момента $\min(\tau_0, 2N)$. Следовательно, окончательно заключаем, что верхняя грань вероятности достижения поверхности шара радиуса $N + \varepsilon$ раньше, чем Q, исходя из Q_3, меньше единицы. Отсюда (см. [14], стр. 148) вытекает справедливость утверждений примера.

Поступила 4 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fleming W. H., Rishel W. R.* Deterministic and stochastic optimal control. Springer-Verlag, 1975.
2. *Flemig W. H.* Duality and a priori estimates in Markovian optimization problems. J. Math. Analysis. and Applic., 1966, vol. 16, No. 2.
3. *Красовский Н. Н.* Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
4. *Лидов М. Л., Лукьянов С. С.* Задача о времени движения точки в области при случайных ошибках управления. Космические исследования, 1971, т. 9, № 5.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
7. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
9. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. М., «Наука», 1967.
10. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М., «Наука», 1973.
11. *Майзенберг Т. Л.* Задача Дирихле для некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1969, т. 33, № 3.
12. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
13. *Hunt G. A.* On positive Green's functions. Proc. Acad. Natur. Sci. Philadelphia, 1954, vol. 40, No. 9.
14. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
15. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. М., Гостехиздат, 1955.
16. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М., «Наука», 1975.
17. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. Изд-во Киевск. ун-та, 1961.