Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31+62—50

О ДВИЖЕНИИ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. В. Румянцев

(Москва)

Хорошо известно, что движения механических систем зависят от действующих сил и наложенных связей, благодаря чему возможно управление движением систем как с помощью сил (динамическое управление), так и с помощью связей (кинематическое управление). Голономные и линейные неголономные связи, зависящие от некоторых переменных параметров, по-видимому, впервые рассматривались в цикле работ Я. И. Грдины по динамике живых организмов (ограничимся для краткости ссылками лишь на работы [1,2] этого цикла, в которых имеются упоминания остальных работ). Приняв для параметрических связей условия на возможные перемещения и аксиому определения идеальных связей, аналогичные таковым для обычных связей, Я. И. Грдина на базе принципа Даламбера — Лагранжа построил основы аналитической динамики систем с параметрическими связями. В частности, он показал справедливость для систем с параметрическими связями всех основных типов уравнений движения систем с обычными связями и показал, что эти же уравнения можно вывести из принципа Гаусса. Много лет спустя ряд этих результатов с некоторым расширением был повторен В. И. Киргетовым [3,4], которому работы Я. И. Грдины были, по-видимому, неизвестны. Вместе с тем в работе [3] для систем с голономными параметрическими связями дается видоизменение принципа Гаусса, эквивалентное последнему при обычных связях, и содержится утверждение, что «в случае систем с параметрическими связями принцип Гаусса отсутствует», противоречащее результатам [1].

В данной статье проводится дальнейшее исследование движения управляемых систем. Для параметрических голономных и нелинейных неголономных связей дается распространение предложенного в работе [5] для обычных связей определения возможных перемещений, естественным образом приводящего к условиям Н. Г. Четаева [6]. Из принципа Даламбера — Лагранжа выводятся другие основные вариационные дифференциальные принципы динамики управляемых систем: принцип Журдена, неравенства Маха и обобщенный принцип Гаусса, принцип Четаева. Показано, что для управляемых систем все эти дифференциальные принципы приложимы и равносильны, как и в случае неуправляемых систем [5]. Из уравнений движения следует, что кинематическое управление в конечном счете приводится к управлению динамическому.

В заключение обсуждаются свойства и особенности аналитической трактовки систем с сервосвязями Бегена [7], а также различия между обычными и параметрическими связями и сервосвязями.

1. Рассмотрим систему материальных точек с массами m_ν ($\nu = 1, \ldots, N$), стесненную некоторыми связями и движущуюся относительно инерциальной системы координат под действием приложенных к ней сил. Декартовы координаты точек системы и проекции на оси координат заданных сил будем обозначать через x_i и X_i ($i = 1, \ldots, n = 3N$), так что координаты ν-й точки, ее масса и проекции на оси координат действующей на нее активной силы будут $x_{3\nu-2}$, $x_{3\nu-1}$, $x_{3\nu}$, $m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}$, $X_{3\nu-2}$,

$X_{3\nu-1}$, $X_{3\nu}$ соответственно. Полные производные по времени t будем обозначать точкой вверху справа ($x^{\cdot} \equiv dx / dt$).

Заданные силы X_i считаются известными функциями координат x_j, скоростей $x_j^{\cdot}$ ($j = 1, \ldots, n$), времени t и, быть может, некоторых переменных параметров u_r ($r = 1, \ldots, k$).

Пусть система стеснена геометрическими связями вида

$$f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k, t) = 0 \quad (s=1,\ldots,m_1) \tag{1.1}$$

и кинематическими неинтегрируемыми связями вида

$$\varphi_p(x_1, \ldots, x_n, x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}, u_1, \ldots, u_k, t) = 0 \; (p = 1, \ldots, m_2) \tag{1.2}$$

в общем случае нелинейными относительно скоростей $x_i^{\cdot}$, причем число связей $m = m_1 + m_2 < n$. Уравнения связей (1.1), (1.2) в общем случае предполагаются зависящими от параметров u_r, что не исключает, разумеется, наличия среди них и обычных связей, не зависящих от параметров u_r.

Связи вида (1.1) и линейные связи (1.2), зависящие от переменных параметров, по-видимому, впервые рассматривал Я. И. Грдина [1,2], назвав их волевыми связями и волевыми параметрами соответственно. Впоследствии В. И. Киргетов [3,4] называл их параметрическими связями и параметры u_r — параметрами управления. Здесь примем последние названия.

Будем предполагать, что переменным параметрам u_r, заранее не определенным, в процессе движения можно произвольно придавать те или иные значения из заданной области управления U и тем самым управлять движением системы, надлежащим образом задавая или выбирая закон управления системой [3]. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь таких переменных параметров $u_r \in U$, которые обладают первыми $u_r^{\cdot}$ и, возможно, вторыми $u_r^{\cdot\cdot}$ полными производными по времени, причем для простоты будем предполагать, что значения производных также принадлежат заданной области управления U, т. е.

$$u_r \in U, \; u_r^{\cdot} \in U, \quad u_r^{\cdot\cdot} \in U \qquad (r = 1, \ldots, k)$$

Таким образом, будем рассматривать общий случай, когда от параметров управления зависят как заданные силы (динамическое управление), так и связи (кинематическое управление).

Функции $X_i(x, x^{\cdot}, u, t)$ и $\varphi_p(x, x^{\cdot}, u, t)$ предполагаются принадлежащими классу функций C_1, а функции $f_s(x, u, t)$ — классу C_2. Связи (1.1) и (1.2) считаются совместными и независимыми при любых значениях $u_r \in U$. Это означает, что функциональные определители от функций f_s по переменным x_i и от функций φ_p по переменным $x_i^{\cdot}$ при любых $u_r \in U$ имеют ранги m_1 и m_2 соответственно. Кроме того, связи предполагаются не зависящими от действующих на систему заданных сил X_i.

Параметрические связи представляют собою обобщение обычных нестационарных связей и приводятся к последним при подстановке в уравнения (1.1) и (1.2) вместо параметров управления соотношений вида

$$u_r = u_r(x_1, \ldots, x_n, x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}, t) \quad (r = 1, \ldots, k) \tag{1.3}$$

которыми может быть задан закон управления системой [3] в общем случае; в частности, могут быть заданы $u_r = u_r(t)$.

Параметрические связи (1.1), как и обычные геометрические связи, накладывают ограничения на положения в пространстве точек системы. Всякие положения системы, для которых координаты ее точек удовлетворяют уравнениям (1.1), назовем возможными для данного момента времени t и данных значений параметров $u_r \in U$. Кроме того, связи (1.1), как и связи (1.2), накладывают определенные ограничения как на скорости $x_i^{\cdot}$, так и на ускорения $x_i^{\cdot\cdot}$ точек системы. В самом деле, уравнения двусторонних связей (1.1) обязаны выполняться в любой момент времени, поэтому полные производные по времени от левых частей уравнений (1.1) должны равняться нулю

$$(1.4)\qquad \frac{df_s}{dt} = \sum_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} x_i^{\cdot} + \sum_r \frac{\partial f_s}{\partial u_r} u_r^{\cdot} + \frac{\partial f_s}{\partial t} = 0$$

$$(s = 1, \ldots, m_1)$$

Соотношения (1.4) стесняют составляющие скоростей по градиентам конечных связей $\operatorname{grad}_x f_s$; они, как и (1.2), зависят не только от значений t, x_i, $x_i^{\cdot}$, но и от u_r, а также и $u_r^{\cdot}$, если среди связей (1.1) имеются параметрические связи.

Всякая совокупность скоростей $x_i^{\cdot}$, удовлетворяющая условиям (1.2) и (1.4) при данном, возможном для рассматриваемого момента времени t и значений параметров $u_r \in U$, положении x_i системы и данных значениях $u_r^{\cdot} \in U$, называется системой кинематически возможных скоростей.

Точно так же дифференцированием по t уравнений (1.4) и (1.2) получаем условия

$$(1.5)\qquad \frac{d^2 f_s}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_i} x_i^{\cdot\cdot} + x_i^{\cdot} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right) +$$

$$+ \sum_r \left(\frac{\partial f_s}{\partial u_r} u_r^{\cdot\cdot} + u_r^{\cdot} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_s}{\partial u_r}\right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_s}{\partial t} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m_1)$$

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i^{\cdot}} x_i^{\cdot\cdot} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i} x_i^{\cdot}\right) + \sum_r \frac{\partial \varphi_p}{\partial u_r} u_r^{\cdot} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial t} = 0$$

$$(p = 1, \ldots, m_2)$$

для ускорений $x_i^{\cdot\cdot}$ точек системы. Эти условия зависят не только от значений t, x_i, $x_i^{\cdot}$, u_r, но и от $u_r^{\cdot}$, а также и от $u_r^{\cdot\cdot}$, если среди связей (1.1) имеются параметрические связи.

Всякая совокупность ускорений $x_i^{\cdot\cdot}$, удовлетворяющая условиям (1.5) при данных, возможных для рассматриваемых момента времени t и значений u_r, $u_r^{\cdot} \in U$ положениях x_i и скоростях $x_i^{\cdot}$ точек системы и данных значениях $u_r^{\cdot\cdot} \in U$, носит название кинематически возможных ускорений системы.

Бесконечно малые перемещения

$$\Delta x_i = x_i\,(t + dt) - x_i\,(t) = x_i^{\cdot} dt + {}^1\!/_2 x_i^{\cdot\cdot}\,(dt)^2 + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

которые могут совершить точки системы за бесконечно малый промежуток времени dt из данного положения $x_i\,(t)$, соответствующие некоторой системе кинематически возможных скоростей $x_i^{\cdot}$ и ускорений $x_i^{\cdot\cdot}$ для рассматриваемых момента времени t и значений u_r, $u_r^{\cdot}$, $u_r^{\cdot\cdot} \in U$, называются кинематически возможными перемещениями системы.

Пусть система в данный момент времени t занимает некоторое возможное положение, определяемое координатами $x_i(t)$ ее точек. Рассмотрим какие-либо два кинематически возможных перемещения точек системы Δx_i и $\Delta x'_i$, совершаемых за один и тот же бесконечно малый промежуток времени dt из одного и того же данного положения и соответствующих двум системам возможных скоростей $x_i^{\cdot}$ и $x_i'^{\cdot}$ и ускорений $x_i^{\cdot\cdot}$ и $x_i'^{\cdot\cdot}$ для данных t, u_r, $u_r^{\cdot}$, $u_r^{\cdot\cdot}$, и их разность

$$\Delta x_i' - \Delta x_i = \Delta x_i^{\cdot} dt + {}^1/_2 \Delta x_i^{\cdot\cdot} (dt)^2 + \ldots \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$
$$(\Delta x_i^{\cdot} = x_i'^{\cdot} - x_i^{\cdot}, \quad \Delta x_i^{\cdot\cdot} = x'^{\cdot\cdot}_i - x_i^{\cdot\cdot})$$

Совокупность главных частей (одного и того же порядка малости по dt для всех i) этих разностей назовем, как и в случае обычных связей [5], возможным (виртуальным) перемещением системы и обозначим через δx_i ($i = 1, \ldots, n$).

В случае, когда не все $\Delta x_i^{\cdot} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), возможные перемещения точек системы определяются формулами

$$\delta x_i = \Delta x_i^{\cdot} dt \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Если же все $\Delta x_i^{\cdot} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), то возможными перемещениями будут

$$\delta x_i = {}^1/_2 \Delta x_i^{\cdot\cdot} (dt)^2 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

Таким образом, возможные (виртуальные) перемещения системы представляют собою элементарные перемещения точек, допускаемые связями в данный момент времени t и удовлетворяющие условиям

$$\sum_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \delta x_i = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i^{\cdot}} \delta x_i = 0 \tag{1.9}$$
$$(s = 1, \ldots, m_1; \; p = 1, \ldots, m_2)$$

При указанном выше предположении о независимости связей (1.1) и (1.2) уравнения (1.9) будут, очевидно, независимыми.

Связи (1.1), (1.2) будем считать идеальными, т. е. такими, что работа их реакций R_i на всяком возможном перемещении (1.9) системы равна нулю

$$\sum_i R_i \delta x_i = 0 \tag{1.10}$$

Следствием аксиомы (1.10) определения идеальных связей является, как и в случае обычных связей, основной принцип динамики управляемых систем — принцип Даламбера — Лагранжа [1, 3]

$$\sum_i (m_i w_i - X_i) \delta x_i = 0 \tag{1.11}$$

представляющий собою вариационный дифференциальный принцип, справедливый для действительного движения системы с ускорениями $x_i^{\cdot\cdot} = w_i$

при любых бесконечно малых возможных перемещениях δx_i из заданной конфигурации системы в ее действительном движении.

В работах [1-4] из соотношения (1.11) выведены уравнения движения управляемых систем в форме уравнений со множителями, уравнений Лагранжа, Гамильтона, Якоби и Аппеля.

2. Покажем, что для управляемых систем справедливы основные вариационные дифференциальные принципы динамики, равносильные принципу Даламбера — Лагранжа.

1°. *Принцип Журдена.* Будем считать заданной для данных момента времени t и значений u_r, $u_r^\cdot \in U$ конфигурацию системы x_i в ее действительном движении со скоростями $x_i^\cdot = v_i$ и рассмотрим какое-либо кинематически возможное движение с теми же значениями x_i и с бесконечно близкими скоростями $x_i^\cdot = v_i + \delta x^\cdot_i$. Из уравнений (1.9) с учетом (1.7) следует, что величины $\delta x_i^\cdot$ удовлетворяют условиям [5]

$$(2.1) \qquad \sum_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \delta x_i^\cdot = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i^\cdot} \delta x_i^\cdot = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m_1,\ p = 1, \ldots, m_2)$$

Так как условия (2.1) для $\delta x_i^\cdot$ совпадают с условиями (1.9) для δx_i, то уравнение (1.11) можно записать в виде

$$(2.2) \qquad \sum_i (m_i w_i - X_i)\, \delta x_i^\cdot = 0$$

Уравнение (2.2) выражает вариационный дифференциальный принцип Журдена: в классе мыслимых по Журдену движений (кинематически возможных движений, удовлетворяющих условиям наложенных на систему связей и условиям постоянства x_i для данных момента t и значений u_r, $u_r^\cdot \in U$) для действительного движения справедливо уравнение (2.2) при любых $\delta x_i^\cdot$, удовлетворяющих условиям (2.1).

Пример 2.1. Из соотношений (2.2), (2.1) можно вывести уравнения движения управляемой системы в различных формах, например, уравнения с множителями [1]

$$(2.3) \qquad m_i w_i = X_i + \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \sum_p \mu_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i^\cdot} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

к которым надлежит присоединить уравнения связей (1.1), (1.2). Здесь λ_s, μ_p — неопределенные множители Лагранжа. Система уравнений (2.3), (1.1), (1.2) для x_i, λ_s и μ_p незамкнута, так как помимо этих $n + m_1 + m_2$ неизвестных содержит также параметры управления u_r. Для замыкания системы необходимо задать [3] или из каких-либо дополнительных условий определить закон управления (1.3).

Как видно из уравнений (2.3), связи (1.1), (1.2) воздействуют на систему своими реакциями, в общем случае зависящими от параметров управления, так что в конечном итоге кинематическое управление приводится к динамическому управлению, к управлению силами.

Неопределенные множители можно исключить из (2.3), если с помощью этих уравнений заменить $x_i^{\cdot\cdot}$ в уравнениях (1.5) и полученную таким образом систему неоднородных линейных уравнений с определителем, отличным от нуля, разрешить относительно λ_s и μ_p. В результате найдем последние в виде некоторых функций переменных t, x_i, $x_i^\cdot$, u_r, $u_r^\cdot$, $u_r^{\cdot\cdot}$ и, подставляя в (2.3), получим систему уравнений вида

$$(2.4) \qquad m_i x_i^{\cdot\cdot} = \Phi_i(x, x^\cdot, u, u^\cdot, u^{\cdot\cdot}, t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

правые части которых зависят, в общем случае, не только от u_r, но и от $u_r^{\cdot}$ и $u_r^{\cdot\cdot}$. В частных случаях, когда среди геометрических связей (1.1) нет параметрических, правые части уравнений (2.4) не будут зависеть от $u_r^{\cdot\cdot}$, а если и среди неинтегрируемых связей (1.2) нет параметрических, то не будут зависеть и от $u_r^{\cdot}$. Такими же свойствами обладают и уравнения движения в обобщенных координатах [1,2] и квазикоординатах [4], более удобные для приложений при большом числе переменных, чем уравнения в декартовых координатах.

Благодаря зависимости уравнений движения не только от u_r, как в случае динамического управления, но и от $u_r^{\cdot}$ и $u_r^{\cdot\cdot}$, кинематическое управление несколько сложнее динамического, но в то же время предоставляет и больше возможностей для управления. Общая теория управления [8] приложима, очевидно, и к кинематически управляемым системам.

Если умножить уравнения (2.3) на действительные перемещения $dx_i = v_i dt$ и сложить по всем i, то получим уравнение

$$dT = \sum_i X_i\, dx_i + \sum_{i,s} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i,p} \mu_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i^{\cdot}} dx_i \tag{2.5}$$

выражающее теорему о кинетической энергии системы. В случае, когда активные силы не зависят от времени и параметров u_r и потенциальны, уравнение (2.5) принимает вид

$$d(T-U) = \sum_i \left(\sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \sum_p \mu_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i^{\cdot}}\right) dx_i \tag{2.6}$$

$$\left(\sum_i X_i\, dx_i = dU(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

Работа реакций параметрических связей на действительных перемещениях не равна, вообще говоря, нулю, поэтому полная механическая энергия системы $T - U$ не остается постоянной. Как и в случае сервосвязей [7], работа реакций в зависимости от своего знака приводит к увеличению или уменьшению энергии системы и, в частности, может демпфировать колебания системы, в которой отсутствует диссипация энергии.

2°. *Неравенства Маха и обобщенный принцип Гаусса.* Будем считать заданным в момент времени t и при данных значениях параметров u_r, их скоростей $u_r^{\cdot}$ и ускорений $u_r^{\cdot\cdot}$ из области U состояние системы x_i, $x_i^{\cdot} = v_i$ в некотором ее действительном движении с ускорениями $w_i = dx_i^{\cdot} / dt$ и рассмотрим какое-либо кинематически возможное движение с теми же x_i, $x_i^{\cdot}$ и с бесконечно близкими ускорениями $\delta x_i^{\cdot} / dt = w_i + \delta x_i^{\cdot\cdot}$. Из уравнений (1.9) с учетом (1.8) получаем условия [5]

$$\sum_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \delta x_i^{\cdot\cdot} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i^{\cdot}} \delta x_i^{\cdot\cdot} = 0, \qquad (s = 1, \ldots, m_1,\ p = 1, \ldots, m_2) \tag{2.7}$$

для $\delta x_i^{\cdot\cdot}$. Сравнивая (2.7) с уравнениями (1.9), видим, что разности ускорений находятся среди возможных перемещений системы. Следовательно, уравнение (1.11) в таком случае можно записать в виде

$$\sum_i (m_i w_i - X_i)\, \delta x_i^{\cdot\cdot} = 0$$

Освободим в момент t систему от части наложенных на нее связей и обозначим через $\partial x_i^{\cdot} / dt$ ускорения точек системы в действительном освобожденном движении под действием тех же самых сил X_i. Так как в числе возможных перемещений освобожденной системы находятся возможные перемещения системы со всеми связями, то уравнение вида (1.11) для освобожденной системы можно записать в виде

$$\sum_i \left(m_i \frac{\partial x_i^{\cdot}}{dt} - X_i\right) \delta x_i^{\cdot\cdot} = 0$$

Вычитая это соотношение из предыдущего, получаем равенство [6]

(2.8) $$A_{d\delta} + A_{d\partial} - A_{\delta\partial} = 0$$

где мера отклонения действительного (d) движения от мыслимого (δ) есть

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{dx_i^{\cdot}}{dt} - \frac{\delta x_i^{\cdot}}{dt}\right)^2$$

Аналогично определяются величины $A_{d\partial}$ и $A_{\delta\partial}$. Из равенства (2.8) следуют неравенства Маха для управляемой системы

(2.9) $$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}, \quad A_{d\partial} < A_{\partial\delta}$$

Второе из этих неравенств выражает обобщенный принцип Гаусса: мера отклонения действительного (d) движения системы от действительного (∂) движения системы, освобожденной от части связей, меньше меры отклонения от последнего мыслимого (δ) движения системы.

Если систему освободить от всех связей, то второе из неравенств (2.9) приводит к принципу Гаусса для управляемой системы: для действительного движения системы принуждение

(2.10) $$Z = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(x_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2$$

имеет минимум в классе мыслимых по Гауссу ускорений, удовлетворяющих уравнениям (1.5) при данных значениях t, x_i, $x_i^{\cdot}$, u_r, $u_r^{\cdot}$, $u_r^{\cdot\cdot}$.

Замечание 2.1. Приведенный вывод принципа Гаусса из принципа Даламбера — Лагранжа свидетельствует о равносильности этих принципов для управляемых систем. Он подтверждает также косвенное доказательство [1] справедливости принципа Гаусса для систем с параметрическими связями и опровергает утверждение [3] об отсутствии этого принципа для таких систем. В работе [3] такое утверждение сделано на основании рассмотрения уравнений для кинематически возможных движений, которые получены подстановкой в уравнения (1.1) закона управления (1.3), тогда как возможные перемещения определены первой группой уравнений (1.9). Такой подход, однако, непоследователен, так как если уж определять кинематически возможные движения с учетом закона управления, то с учетом последнего следует определять и возможные перемещения; при этом, очевидно, параметрические связи становятся обычными связями.

Видно также, что предложенное в работе [3] видоизменение принципа Гаусса (с заменой в (2.10) полных ускорений точек на их касательные к связям составляющие) эквивалентно принципу Гаусса не только для обычных голономных связей [3], но и для параметрических связей (1.1), (1.2).

3°. *Принцип Четаева.* Если повторить рассуждения работы [9], то нетрудно убедиться, что и для систем с параметрическими связями справедливо данное Н. Г. Четаевым видоизменение принципа Гаусса: работа на элементарном цикле, состоящем из прямого мыслимого по Гауссу движения в поле действующих сил и движения попятного (обратного) в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы управляемая механическая система была совершенно свободной, для действительного движения имеет максимум.

Как следует из изложенного в п. 2, дифференциальные принципы Журдена, Гаусса и Четаева равносильны принципу Даламбера — Лагранжа, и приложимы для управляемых систем с параметрическими связями (1.1), (1.2). Каждый из этих принципов может быть положен в основу динамики управляемых систем.

3. В заключение обсудим кратко свойства одного класса управляемых систем — систем с сервосвязями, общая теория которых разработана Бегеном [7] (см. также почти дословное воспроизведение этой теории в § 470 учебника [10]), а также систем с так называемыми условными связями [11] и остановимся на сопоставлении реакций сервосвязей с реакциями обычных и параметрических связей.

Обычные связи, рассматриваемые в механике, выражают условия контактов между телами как входящими, так и не входящими в систему, причем последние либо неподвижны, либо совершают наперед заданное во времени движение. Силы реакций таких связей являются, очевидно, силами контактного действия, которые, согласно известной классификации, относятся к категории пассивных сил в отличие от сил заданных или активных сил, приложенных к системе, от которых зависят силы реакций.

Параметрические связи также выражают условия контакта, но в отличие от обычных связей их реакции не будут чисто пассивными силами, так как зависят не только от активных сил X_i, но, вообще говоря, и от параметров управления, входящих в уравнения (1.1), (1.2), посредством которых возможно активное воздействие на движение системы.

Для реакций идеальных связей, обычных и параметрических, принимается аксиома (1.10).

Беген [7] заметил, что существуют механизмы, реализующие связи способом, совершенно отличным от указанного, для которых нельзя отвлечься от способа реализации связи. Реализация ими связей обеспечивается не при помощи простого контакта, не пассивно, а с использованием вспомогательных источников энергии, которые автоматически вступают в действие и автоматически регулируются так, чтобы непрерывно осуществлять заданную связь. Такие связи названы Бегеном сервосвязями или связями второго рода, в отличие от обычных связей или связей первого рода, к которым будем относить и параметрические связи.

Силы реакций сервосвязей Φ_i, приложенные к точкам системы, могут быть силами, действующими на расстоянии (например, электромагнитные или иные силы), внутренними усилиями поддающихся сжатию или растяжению тел (сжатый воздух, мускулы живого существа и т. п.), контактными воздействиями посторонних тел, положение которых зависит от ряда координат системы и движение которых автоматически регулируется так, чтобы осуществлялась заданная связь; при этом контактные воздействия зависят как от связей по контакту, так и от сервосвязей. Как и реакции R_i связей первого рода, реакции Φ_i сервосвязей наперед неизвестны, известно лишь, какие значения они должны принимать, чтобы реализовать заданную сервосвязь. Однако силы Φ_i обусловлены, как уже отмечалось, наличием дополнительных источников энергии и в этом смысле относятся к категории активных сил; сервосвязи зависят от действия таких сил.

В отличие от аксиомы (1.10) реакций идеальных связей первого рода сумма элементарных работ реакций сервосвязей на возможных перемещениях, вообще говоря, отлична от нуля, вследствие чего принцип Даламбера — Лагранжа для систем с сервосвязями записывается в виде

$$\sum_i (m_i w_i - X_i - \Phi_i)\,\delta x_i = 0 \tag{3.1}$$

отличном от вида (1.11) этого принципа для систем с идеальными связями первого рода. Это и обусловливает аналитическое различие систем с сервосвязями от систем с обычными или параметрическими связями.

Предполагая, что среди возможных перемещений системы, допускаемых связями первого рода, имеются перемещения вида

$$\sum_i a_{\varkappa i}\delta x_i = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, j) \tag{3.2}$$

для которых работа реакций сервосвязей равна нулю в силу самого способа их действия, Беген записывает принцип Даламбера — Лагранжа для таких перемещений в обычном виде (1.11) и из него выводит уравнения движения систем с сервосвязями, к которым надлежит присоединить уравнения сервосвязей. Задача оказывается определенной, если число ограничительных условий (3.2) равно числу сервосвязей.

Уравнениям движения системы с сервосвязями можно придать форму уравнений Лагранжа или Аппеля [7]. Замечательно, что в случае, когда реакции сервосвязей состоят исключительно из реакций подвижных тел, положения которых зависят от некоторого числа координат системы, равного числу сервосвязей, решение задачи не зависит от инерции этих тел и приложенных к ним сил. Точно так же, если в системе можно выделить две части Σ и Σ_1, такие, что на систему Σ не действуют никакие реакции сервосвязей, кроме реакций системы Σ_1, и число координат, от которых зависит последняя, равно числу сервосвязей, то инерция системы Σ_1 и приложенные к ней силы не влияют на движение системы Σ. В подобных случаях можно ограничиться составлением уравнений движения лишь системы Σ, если не представляют интереса реакции сервосвязей.

Отметим, что из принципа Даламбера — Лагранжа для возможных перемещений, удовлетворяющих условиям (3.2), для систем с сервосвязями можно вывести [12] неравенства Маха и обобщенный принцип Гаусса без явно входящих в него реакций сервосвязей.

К задаче о движении систем с сервосвязями близка следующая задача [11]. Пусть задано некоторое число соотношений

$$\begin{aligned} &\Phi_\sigma (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k, t) = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, h) \\ &\Phi_{h+\pi} (x_1, \ldots, x_n, x_i^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}, u_1, \ldots, u_k, t) = 0 \quad (\pi = 1, \ldots, g) \end{aligned} \tag{3.3}$$

и путем соответствующего управления системой требуется точно выполнить эти соотношения в процессе движения. Соотношения (3.3) названы [11] условными связями; их реакции должны быть тождественно равными нулю.

Для решения данной задачи в работе [11] рекомендуются два этапа: 1) составить уравнения движения системы с учетом всех ее связей как действительных (1.1) и (1.2), так и условных (3.3), трактуя последние как связи действительные; 2) освободить систему от условных связей, дополняя совокупность ее обобщенных координат и квазикоординат необходимым числом новых координат и квазикоординат, составить уравнения движения освобожденной системы, соответствующие новым координатам и квазикоординатам, в которых затем формально учесть уравнения условных связей. Первая группа полученных таким образом уравнений названа уравнениями движения системы с условными связями, а вторая — динамическими условиями выполнения условных связей, «учитывая, что это в конечном итоге условия на силы, чтобы условные связи выполнялись» (см. [11], стр. 438).

Замечание 3.1. Такая терминология не вполне удачна, так как ниже на примере будет показано, что результат может оказаться противоположным: вторая группа уравнений дает уравнения движения, а первая — условия на управляющие силы.

По существу целесообразнее ограничиться одним этапом: составить уравнения движения системы с учетом лишь связей (1.1), (1.2) и в полученных уравнениях учесть затем уравнения (3.3), таким образом получим и уравнения движения, и условия на управляющие силы.

В работе [11] условные связи отождествляются с сервосвязями Бегена, так как те и другие «осуществляются как бы принудительно при помощи подходящего управления системой». Хотя последнее и верно, тем не менее между сервосвязями и условными связями имеется тонкое различие в их аналитической трактовке.

В работе [7] сервосвязи трактуются именно как связи, реакции Φ_i которых наперед неизвестны, но в силу самого способа их реализации известны перемещения (3.2), на которых реакции сервосвязей не работают. Благодаря этому Бегену удается получить уравнения движения системы с сервосвязями без явно входящих в них реакций Φ_i сервосвязей, как и в случае идеальных связей первого рода.

В трактовке В. И. Киргетова, исходящего из принципа Даламбера — Лагранжа в его обычной форме (1.11), предполагается, что «выполнение условных связей достигается исключительно за счет действующих на систему внешних активных сил и реакций действительных параметрических связей» (см. [11], стр. 438). Иначе говоря, предполагаются известными выражения сил Φ_i, относимых не к числу реакций, а к числу внешних активных сил X_i, с помощью которых реализуются соотношения (3.3), благодаря чему соотношение (3.1) может быть записано в виде (1.11). В случаях же, когда выражения сил Φ_i, прикладываемых к системе для реализации сервосвязей, заранее неизвестны, эти силы могут быть отнесены к числу заданных сил X_i лишь чисто формально, с последующим обязательным определением их выражений из уравнений, получаемых из принципа Даламбера — Лагранжа в форме (1.11).

Замечание 3.2. По существу и сервосвязи и условные связи представляют собою инвариантные соотношения уравнений движения управляемых систем, впервые определенные Пуанкаре [13] для автономных систем дифференциальных уравнений, не содержащих параметров управления. Для управляемых систем появляется, очевидно, больше возможностей для существования инвариантных соотношений благодаря возможности надлежащего выбора управляющих параметров. Разница между сервосвязями и условными связями при этом заключается в том, что первые реализуются с помощью дополнительных к заданным активным силам X_i сил Φ_i, а вторые — с помощью только заданных активных сил X_i и параметрических связей. Следует, однако, иметь в виду возможность существования инвариантных соотношений для неуправляемой системы.

Пример 3.1. Проиллюстрируем изложенное выше на анализе решения задачи Бегена о плоском движении пластинки, шарнирно связанной с круглым диском (сохраняя при этом все обозначения п. 17 работы [7]). Опираясь на развитую им теорию, Беген применяет уравнение Лагранжа отдельно к пластинке и получает следующее уравнение ее движения:

$$M(b^2+k^2)\ddot\beta - MRb\dot\beta^2 + Fa\sin\beta = 0 \tag{3.4}$$

отмечая при этом, что если бы связь $\alpha - \beta = \pi / 2$ осуществлялась непосредственным касанием пластинки и диска, то движение системы определялось бы уравнением

$$[M(R^2+b^2+k^2)+I_1]\ddot\beta + F(a\sin\beta + R\cos\beta) = 0 \tag{3.5}$$

Рассматривая задачу Бегена с точки зрения развитой в работе [11] трактовки сервосвязей как условных связей, В. И. Киргетов приходит к выводу, что Беген «в данном случае не прав» и утверждает, что уравнением движения системы будет уравнение

$$[M(R^2+b^2+k^2)+I_1]\ddot\beta + F(a\sin\beta + R\cos\beta) = u \tag{3.6}$$

которое отличается от уравнения (3.5) лишь правой частью, а уравнение (3.4) «является динамическим условием выполнения наложенной на систему условной связи».

В действительности же, Беген прав. В самом деле, уравнение (3.4) не может служить динамическим условием выполнения условной связи, так как не содержит управляющей силы u. Уравнение (3.6) являлось бы уравнением движения системы, если бы правая часть его была заданной функцией. Очевидно, однако, что не при всяком заданном моменте u может быть реализована рассматриваемая условная связь. В действительности, уравнение (3.6) может служить для определения выражения момента u, которое легко получить подстановкой в уравнение (3.6) условной связи и учетом уравнения движения пластинки (3.4).

Поступила 6 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грдина Я. И.* К динамике живых организмов. Екатеринослав, 1911.
2. *Грдина Я. И.* Заметки по динамике живых организмов. Екатеринослав, 1916.
3. *Киргетов В. И.* О кинематически управляемых механических системах. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
4. *Киргетов В. И.* Об уравнениях движения управляемых механических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
5. *Румянцев В. В.* О совместимости двух основных принципов динамики и о принципе Четаева. В сб.: Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М., «Наука», 1975.
6. *Четаев Н. Г.* О принципе Гаусса. Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те, Сер. 3, 1932—1933, т. 6.
7. *Беген А.* Теория гироскопических компасов. М., «Наука», 1967.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
9. *Четаев Н. Г.* Одно видоизменение принципа Гаусса. ПММ, 1941, т. 5, вып. 1.
10. *Аппель П.* Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960.
11. *Киргетов В. И.* О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями). ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
12. *Румянцев В. В.* О движении некоторых систем с неидеальными связями. Вестн. МГУ. Сер. 1, 1961, № 5.
13. *Пуанкаре А.* Избранные труды, т. 1. М., «Наука», 1971.