ЛИТЕРАТУРА

1. *Бондарева В. Ф.* Контактные задачи для упругого шара. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
2. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
3. *Карпенко В. А.* Осесимметричная контактная задача для упругого шара. Изв. АН АрмССР. Механика, 1971, т. 24, № 4.
4. *Бондарева В. Ф.* О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
5. *Александров В. М.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.

УДК 539.376

НОВЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЭЙЛЕРУ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Э. И.-Г. Гольденгершель

(Москва)

Ниже дается подробное изложение механических результатов, анонсированных в [1].

Пусть тонкий вязкоупругий стержень переменного сечения конечной длины l находится под действием продольной сжимающей силы P и под влиянием медленно меняющейся внешней поперечной нагрузки $p(x, t)$ подвергается слабому изгибу [2].

Тогда прогиб $y(x, t)$ оси стержня описывается следующей краевой задачей [2–4]:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P\int_0^t K(t,\tau)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}d\tau = \tag{1}$$

$$= -p(x, t) - \int_0^t K(t,\tau)\,p(x,\tau)\,d\tau, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad 0 \leqslant t < \infty$$

$$U_i[y] = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

Здесь сохранены введенные в [1] обозначения и условия, наложенные на момент инерции $I(x)$, ядро ползучести $K(t, \tau)$ и левые части граничных условий $U_i[y]$. Также исходим из содержащегося в [1] определения устойчивости по Эйлеру и критического значения силы P. (Другой подход к этому вопросу содержится в [5]).

Цель данной работы — получение оценки снизу и точной формулы для критического значения силы P при существенно более общих, чем в [4], условиях. Используется теорема 1 из работы [1] о спектре вольтеррова оператора V

$$(Vf)(t) = \int_0^t K(t, \tau)\,f(\tau)\,d\tau, \qquad 0 \leqslant t < \infty \tag{3}$$

в банаховом пространстве $M_{\langle\alpha(t)\rangle}$ и его подпространствах $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ и $Z_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

Будем предполагать, что $p(x, t)$ принадлежит банахову пространству $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ $(C[0, l])$. В [1,4] это пространство обозначено через $C\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

Как и в [4], сведем краевую задачу (1), (2) к эквивалентному ей интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\left(Q(P)V - \frac{1}{P}I\right)y = \frac{1}{P}M^{-1}(P)(I + V)p \tag{4}$$

Здесь $M(P)$ — дифференциальный оператор, порождаемый дифференциальным выражением

$$l_0[y] \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2}{dx^2}+PI\right)\right)y$$

и краевыми условиями (2), $Q(P)$ — действующий в $C[0, l]$ оператор Фредгольма вида

$$(5)\qquad (Q(P)g)(x) = \int_0^l \frac{\partial^2 Q_0(x, \xi, P)}{\partial \xi^2} g(\xi)\, d\xi$$

$Q_0(x, \xi, P)$ — функция Грина оператора $M(P)$, а V — оператор Вольтерра (3), действующий в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

Существует тесная связь между устойчивостью по Эйлеру с весом $\alpha(t)$ краевой задачи (1), (2) и спектром оператора $Q(P)V$ в пространстве $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(C[0, l])$. Эту связь устанавливает следующая

Лемма. Для того чтобы краевая задача (1), (2) была устойчива по Эйлеру с весом $\alpha(t)$, необходимо и достаточно, чтобы, $1/P$ было регулярной точкой оператора $Q(P)V$ в пространстве $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(C[0, l])$:

Доказательство. Из (4) следует достаточность. Чтобы доказать необходимость, воспользуемся теоремой умножения спектров, согласно которой

$$(6)\qquad \sigma(Q(P)V) = \bigcup_i \bigcup_{\lambda\in\sigma(V)} \frac{\lambda}{P_i - P}$$

где $\sigma(Q(P)V)$ — спектр оператора $Q(P)V$ в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(C[0, l])$.

Если $1/P \in \sigma(Q(P)V)$, то согласно (6) найдется такое $\lambda_0 \in \sigma(V)$ и такое P_{i_0}, что

$$1/P = \lambda_0/(P_{i_0} - P)$$

Значит

$$(P_{i_0} - P)/P \in \sigma(V)$$

Далее повторяем рассуждения, содержащиеся в доказательстве леммы 2 работы [4], с заменой $\Lambda_{\langle e^{-\theta t}\rangle}$ на $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$, чем и заключается доказательство леммы.

Эта лемма и теорема 1 из [1] позволяют доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть $K(t, \tau) = K_0(t, \tau) + K_1(t, \tau)$, причем каждое слагаемое удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы 1 работы [1] и

$$(7)\qquad \lim_{s\to\infty}\sup_{t\geqslant s}\int_s^t |K_1(t, \tau)|\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\,d\tau = 0$$

1) Если $K_0(t, \tau) \geqslant 0$ в области $0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty$, то критическое значение силы P задается формулой

$$(8)\qquad P_{\langle\alpha(t)\rangle} = P_\varepsilon/(1 + T_{k_0})$$

где P_ε — эйлерова критическая сила, соответствующая (1), (2) (напоминаем, что $P_\varepsilon = P_1$ (см. [4])).

2) Если

$$\alpha(0) = 1,\quad \alpha(t+\tau) \leqslant \alpha(t)\,\alpha(\tau),\quad K_0(t, \tau) = K_0(t-\tau)$$

$$\theta = \lim_{t\to\infty}\frac{\ln\alpha(t)}{-t} < \infty,\qquad \int_0^\infty |K_0(t)|\,\alpha(t)\,dt < \infty$$

то для критического значения силы P имеет место оценка

$$(9)\qquad P\langle\alpha(t)\rangle \geqslant P_\varepsilon/(1+\varkappa_0),\quad (\varkappa_0 = \max_{\mathrm{Re}\, w\geqslant\theta} \mathrm{Re}\, k_0(w) \text{ при } \mathrm{Im}\, k_0(w) = 0)$$

где $k_0(w)$ — преобразование Лапласа от $K_0(t)$.

В оценке (9) равенство достигается при $\alpha(t) = e^{-\theta t}$.

3) Для докритических значений силы P предельный прогиб $(L_\alpha y)(x)$ — решение краевой задачи, получающейся из (1), (2) заменой y на $L_\alpha y$, p на $L_\alpha p$, оператора Вольтерра V (3) — оператором умножения на постоянную T_{k_0}.

Доказательство. Начнем с утверждения 1). Согласно (6) и теореме 1 из [1] спектральный радиус оператора $Q(P)V$ в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(C[0, l])$ равен $T_{k_0} / (P_\varepsilon - P)$. Поэтому при $1 / P > T_{k_0} / (P_\varepsilon - P)$ имеет место устойчивость по Эйлеру с весом $\alpha(t)$. Если же $1 / P = T_{k_0} / (P_\varepsilon - P)$, то $1 / P \in \sigma_{\langle\alpha(t)\rangle}(Q(P)V)$ и поэтому (см. лемму) устойчивость уже не имеет места. Отсюда следует (8).

Докажем 2). Из теоремы 1 работы [1] и следствия теоремы 1 из [6] вытекает, что образ полуплоскости $\operatorname{Re} w \geqslant \theta$, даваемый функцией $k_0(w)$, покрывает спектр оператора V (3) в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$. Отсюда и из (6) следует, что если

$$1 / P > \varkappa_0 / (P_\varepsilon - P) \tag{10}$$

то $1 / P$ — регулярная точка оператора $Q(P)V$ в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(C[0, l])$. Значит, при $P < P_\varepsilon / (1 + \varkappa_0)$ имеет место устойчивость по Эйлеру с весом $\alpha(t)$. Отсюда получается оценка (9).

Рассмотрим случай $\alpha(t) = e^{-\theta t}$. В этом случае

$$\varkappa_0 \in \sigma_{\langle e^{-\theta t}\rangle}(V), \quad \varkappa_0 / (P_\varepsilon - P) \in \sigma_{\langle e^{-\theta t}\rangle}(Q(P)V)$$

Поэтому если в (10) заменить знак больше на знак равенства, то, согласно лемме устойчивость уже не имеет места, и правая часть неравенства (9) дает выражение для критической силы $P^{\langle e^{-\theta t}\rangle}$.

Утверждение 3) — непосредственное следствие леммы 1 из работы [4], леммы данной работы и легко доказываемого равенства $T_k = T_{k_0}$ — дает обоснование метода расчета на ползучесть по длительному модулю при более общих, чем в [4], условиях.

Поступила 6 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденгершель Э. И.* Спектр вольтеррова оператора на полуоси и устойчивость по Эйлеру вязкоупругих стержней. Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М., Физматгиз, 1965.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
4. *Гольденгершель Э. И.* Об устойчивости по Эйлеру вязкоупругого стержня. ПММ, 1973, т. 38, вып. 1.
5. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об устойчивости вязкоупругих стержней. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2.
6. *Гольденгершель Э. И.* Спектр вольтеррова оператора на полуоси и тауберовы теоремы типа Палея — Винера. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 5.
7. *Гольденгершель Э. И.* Об устойчивости по Эйлеру вязкоупругого стержня. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 2.
8. *Distefano J. N.* Creep buckling of slender columns. J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engirs, 1965, vol. 91, No. 3, pt 1, p. 127—149.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 26/V-1976 г. Т-09074 Подписано к печати 23/VII-1976 г. Тираж 2845 экз.
Зак. 662 Формат бумаги 70 × 108 1/16 Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6,0 Уч.-изд. л. 16,2

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10