в виде рядов Фурье

$$\omega_j(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_{\nu j} (t - \bar{a})^{\nu}.$$

С использованием этого представления функции $\Phi_j'(z_j)$ выражаются в бесконечных рядах, в коэффициенты которых входят $\alpha_{\nu j}$. Для их определения получены две бесконечные системы комплексных линейных алгебраических уравнений.

Численный пример. Для первой основной задачи произведен расчет при следующих данных: $p = 0$; $N(t_0) = 0$ при $|t_0| > l$ и $N(t_0) = 1$ при $|t_0| < l$, $T(t_0) = 0$, $a_0 = -ih$, $\mu_1 = 1.48i$, $\mu_2 = 0.53i$, $l = 1.2$, $h = 1.2$. При этом из четырех бесконечных систем вещественных линейных алгебраических уравнений взято по одиннадцать уравнений. Получены эпюры кольцевых напряжений в точках окружности. Значения кольцевых напряжений в точках окружности приведены ниже

θ	0	40	80	120	180
σ_θ	+10.87	+8.06	+6.97	−4.55	−1.58
σ_θ	+ 5.52	+3.96	+2.84	−3.12	−4.28

В третьей строке даны значения σ_θ для изотропного случая; θ — угол, отсчитываемый от нормали к границе полуплоскости.

Поступила 8 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., Гостехиздат, 1950.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
3. *Амензаде Ю. А.* Вдавливание штампа в полуплоскость с включениями, ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВДАВЛИВАНИЕ ДВУХ ШТАМПОВ В УПРУГИЙ ШАР

В. А. Карпенко

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о вдавливании в упругий шар двух одинаковых осесимметричных штампов. Предполагается, что вне штампов поверхность шара свободна от напряжений, а под штампами отсутствуют касательные напряжения. Методом, изложенным в работе [1], получено решение для произвольных штампов как при заданных, так и при неизвестных заранее границах областей контакта. Дана численная реализация для сферических штампов при внутреннем касании с шаром.

Контактная задача для шара в такой постановке (в случае, когда границы областей контакта известны) впервые изучалась в работе [2]. Задача сводилась к определению некоторых коэффициентов из парных рядов — уравнений, содержащих полиномы Лежандра. Указан способ, позволяющий решение полученных парных рядов — уравнений свести к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. В работе [3] эта задача сведена к интегральному уравнению первого рода, и указана возможная схема приближенного решения полученного уравнения.

1. Рассмотрим контактную задачу о вдавливании в упругий шар $r \leqslant R$ двух осесимметричных штампов (фиг. 1), поверхность которых задана в сферической системе

координат r, θ, φ уравнением

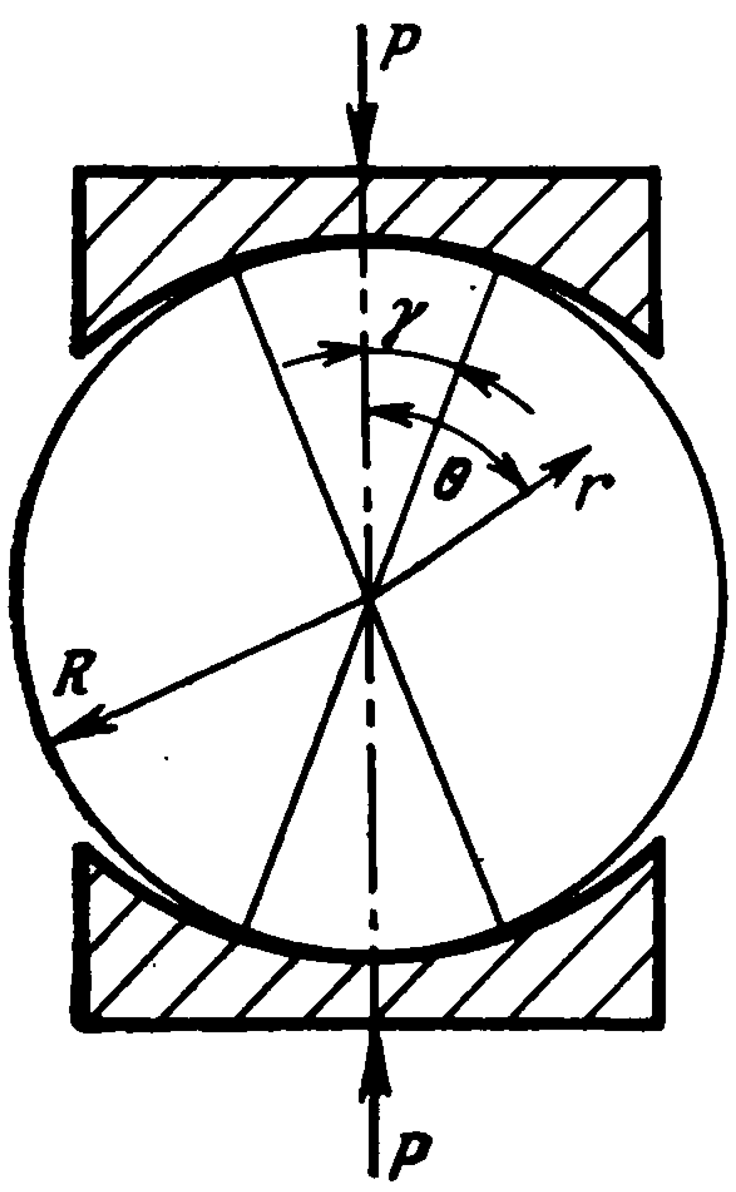
$$r = R\,[1 + \rho(\theta)],\quad \rho(\pi - \theta) = \rho(\theta),\quad \rho(0) = 0 \tag{1.1}$$

Граничные условия (на сфере $r = R$) таковы ($2aR$ — сближение штампов):

$$u_r = R\,[-a\,|\cos\theta\,| + \rho(\theta)],\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \gamma \text{ и } \pi - \gamma \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1.2}$$

$$\sigma_r = 0,\qquad \gamma < \theta < \pi - \gamma$$

$$\tau_{r\theta} = 0,\qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$



Фиг. 1

Требуется определить контактное давление $\sigma(\theta)$ ($0 \leqslant \theta \leqslant \gamma$) и (в случае штампов без угловых точек) величину угла γ, характеризующего размер областей контакта.

Используя замкнутое решение задачи о равновесии упругого шара [4], удовлетворим условиям (1.2). Учитывая, что в силу симметрии $\sigma(\pi - \theta) = \sigma(\theta)$, для определения контактного давления получаем интегральное уравнение

$$\int_0^{\gamma} \sigma(\alpha)\,[H(\theta, \alpha) + H(\theta, \pi - \alpha)]\sin\alpha\, d\alpha = 2\pi G \times \tag{1.3}$$

$$\times\,[-a\,|\cos\theta\,| + \rho(\theta)],\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \gamma$$

или после замены переменных

$$\varepsilon t = \operatorname{tg} {}^1/_2\,\alpha,\quad \varepsilon x = \operatorname{tg} {}^1/_2\,\theta,\quad \varepsilon = \operatorname{tg} {}^1/_2\,\gamma$$

$$\int_0^1 q(t)\left[\frac{4t}{x+t}K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right) + \frac{\varepsilon}{\theta_1}S(x, t)\right]dt = \frac{\varepsilon}{\theta_1} \times \tag{1.4}$$

$$\times\, w(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$S(x, t) = \frac{4\theta_1 t}{1 + \varepsilon^2 xt}K\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{xt}}{1 + \varepsilon^2 xt}\right) + \frac{t}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 x^2)(1 + \varepsilon^2 t^2)}} \times \tag{1.5}$$

$$\times \left\{\frac{-3 - 2\nu + 4\nu^2}{1 + \nu} + \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^1 \left(\frac{A}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right)[U^\circ(y, x, t) + U(y, 2\operatorname{arc\,tg}\varepsilon x,\right.$$

$$\left.\pi - 2\operatorname{arc\,tg}\varepsilon t)]\,dy\right\},\quad q(t) = \frac{4\varepsilon^2\sigma^\circ(t)}{(1 + \varepsilon^2 t^2)^{3/2}G}$$

$$w(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 x^2}}\left[-\frac{1 - \varepsilon^2 x^2}{1 + \varepsilon^2 x^2}a + \rho(2\operatorname{arc\,tg}\varepsilon x)\right]$$

Остальные обозначения в (1.3) — (1.5) совпадают с принятыми в работе [1].

Функция $S(x, t)$ (1.5), как легко видеть, обладает теми же свойствами, что и соответствующая функция (11) в работе [1].

После регуляризации уравнения (1.4), основанной на известном решении осесимметричной контактной задачи для упругого полупространства, для определения функции

$$p(x) = \frac{\pi^2\theta_1}{\varepsilon}\left[q(x) - \frac{c}{\sqrt{1 - x^2}}\right] \tag{1.6}$$

получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, совпадающее по форме с уравнением (24) работы [1]. Решение полученного интегрального уравнения, построенное асимптотическим методом [1,5], можно записать в виде формул (36) — (39) работы [1]. При этом коэффициенты A_{2n} определяются теперь только формой поверхности (1.1) штампов

$$2\,(1 + \varepsilon^2 x^2)^{-1/2}\rho\,(2\operatorname{arc\,tg}\varepsilon x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}\,(\varepsilon x)^{2n} \tag{1.7}$$

Коэффициенты c_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ принимают следующие значения:

$$c_0 = \frac{-2-2\nu+3\nu^2}{1+\nu} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\operatorname{Re} A\int_0^1 \frac{y^{2-\lambda}}{1+y}\,dy - \frac{1}{2}\operatorname{Re} A\int_0^1 \frac{1-y^{2-\lambda}}{1-y}\,dy \tag{1.8}$$

$$c_1 = (1-16\nu^2)\,\theta_1,\quad c_2 = 4 + 6\nu + 4\nu(1-\nu)\,/\,(3-16\nu^2)$$

$$c_3 = -2c_0 + \frac{5}{2} - 4\ln 2 + 6\nu - 32\nu(1-\nu)(1-2\nu) - 4\operatorname{Re} A\int_0^1 y^{2-\lambda}\times$$

$$\times\frac{3+3y+y^2}{(1+y)^3}\,dy - 4\operatorname{Re} A\int_0^1\Big[y^{2-\lambda} - 1 + (2-\lambda)(1-y) -$$

$$-\frac{1}{2}(2-\lambda)(1-\lambda)(1-y)^2\Big]\frac{3-3y+y^2}{(1-y)^2}\,dy$$

Остальные обозначения те же, что в работе [1]. Численные значения коэффициентов c_i (1.8) при разных значениях коэффициента Пуассона ν приведены ниже

ν	c_0	c_1	c_2	c_3
0	—2.9309	0.1592	4.0000	0.980
0.1	—2.3888	0.1203	5.6224	2.136
0.2	—1.8494	0.0458	6.7104	3.932
0.3	—1.3503	—0.0490	7.1104	5.622
0.4	—0.9216	—0.1490	6.8224	6.677
0.5	—0.5885	—0.2387	6.0000	6.845

Постоянная c в (1.6) определяется из соотношения (28) работы [1]. Для штампов без угловых точек это соотношение (принимающее при $c = 0$ вид (40) [1]) служит для определения величины $\varepsilon = \operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\gamma$, характеризующей размер областей контакта.

Из условия равновесия штампа можно найти величину силы P (фиг. 1), действующей на штамп. При $c = 0$ равнодействующая Z контактного давления, равная по величине силе P, определяется по формуле (41) [1] с учетом (1.7) и (1.8).

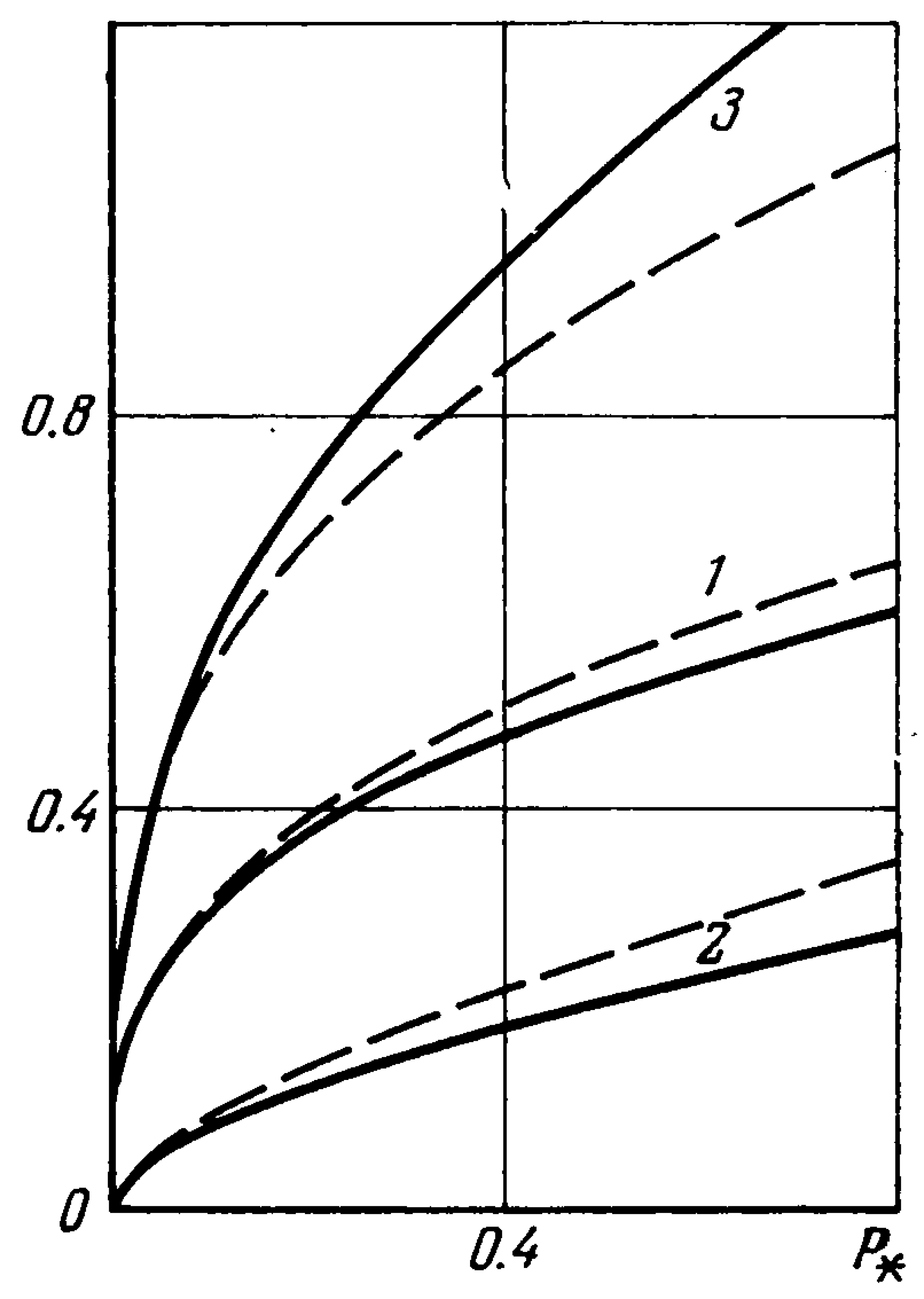
2. В качестве примера рассмотрим задачу о вдавливании в упругий шар двух сферических штампов радиуса $R\,(1 + \Delta)$, поверхность которых задана уравнением

$$r = \left(\sqrt{1 - 2\Delta + \Delta^2\cos^2\theta} - \Delta\,|\cos\theta|\right)$$

В этом случае

$$A_0 = 0,\quad A_2 = \frac{4\Delta}{1+\Delta},$$

$$A_4 = -2\Delta\,\frac{3+4\Delta-\Delta^2}{(1+\Delta)^3}$$



Фиг. 2

На фиг. 2 кривым *1*, *2*, *3* соответствуют зависимости величины 2ε, $(1 + \Delta)\,\Delta^{-1} a$, $(1 + \Delta)\cdot(G\Delta)^{-1}\,\sigma(0)$ от величины $P_* = (1 + \Delta)\,(R^2G\Delta)^{-1}\,P$ при $\nu = 0.3$, $A_4 / A_2 \approx -{}^3\!/_2$, $c = 0$. Пунктирными линиями представлены соответствующие зависимости, полученные на основе решения Герца. Сравнение показывает, что при больших областях контакта использование решения Герца приводит к существенным ошибкам.

Поступила 20 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бондарева В. Ф.* Контактные задачи для упругого шара. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
2. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
3. *Карпенко В. А.* Осесимметричная контактная задача для упругого шара. Изв. АН АрмССР. Механика, 1971, т. 24, № 4.
4. *Бондарева В. Ф.* О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
5. *Александров В. М.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.

УДК 539.376

НОВЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЭЙЛЕРУ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Э. И.-Г. Гольденгершель

(Москва)

Ниже дается подробное изложение механических результатов, анонсированных в [1].

Пусть тонкий вязкоупругий стержень переменного сечения конечной длины l находится под действием продольной сжимающей силы P и под влиянием медленно меняющейся внешней поперечной нагрузки $p(x, t)$ подвергается слабому изгибу [2].

Тогда прогиб $y(x, t)$ оси стержня описывается следующей краевой задачей [2–4]:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P\int_0^t K(t,\tau)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,d\tau = \tag{1}$$

$$= -p(x, t) - \int_0^t K(t,\tau)\,p(x,\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty$$

$$U_i[y] = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

Здесь сохранены введенные в [1] обозначения и условия, наложенные на момент инерции $I(x)$, ядро ползучести $K(t, \tau)$ и левые части граничных условий $U_i[y]$. Также исходим из содержащегося в [1] определения устойчивости по Эйлеру и критического значения силы P. (Другой подход к этому вопросу содержится в [5]).

Цель данной работы — получение оценки снизу и точной формулы для критического значения силы P при существенно более общих, чем в [4], условиях. Используется теорема 1 из работы [1] о спектре вольтеррова оператора V

$$(Vf)(t) = \int_0^t K(t, \tau) f(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{3}$$

в банаховом пространстве $M_{\langle\alpha(t)\rangle}$ и его подпространствах $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ и $Z_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

Будем предполагать, что $p(x, t)$ принадлежит банахову пространству $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ $(C[0, l])$. В [1, 4] это пространство обозначено через $C\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

Как и в [4], сведем краевую задачу (1), (2) к эквивалентному ей интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\left(Q(P)V - \frac{1}{P}I\right)y = \frac{1}{P}M^{-1}(P)(I + V)p \tag{4}$$