ЛИТЕРАТУРА

1. *Чернина В. С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. М., Изд-во «Наука», 1968, стр. 455.
2. *Соколовский В. В.* Уравнения равновесия безмоментных оболочек. ПММ, 1943, т. 7, вып. 1.
3. *Степанов Р. Д., Богомольный В. М.* К задаче об изгибе сегмента торообразной оболочки. В сб.: Расчеты на прочность, вып. 16. М., «Машиностроение», 1975.
4. *Работнов Ю. Н.* Некоторые решения безмоментной теории оболочек, ПММ, 1946, т. 10, вып. 5.
5. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951, стр. 344.
6. *Гринберг Г. А.* Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных. Изв. АН СССР. Сер. физическая, 1946, т. 10, № 2.

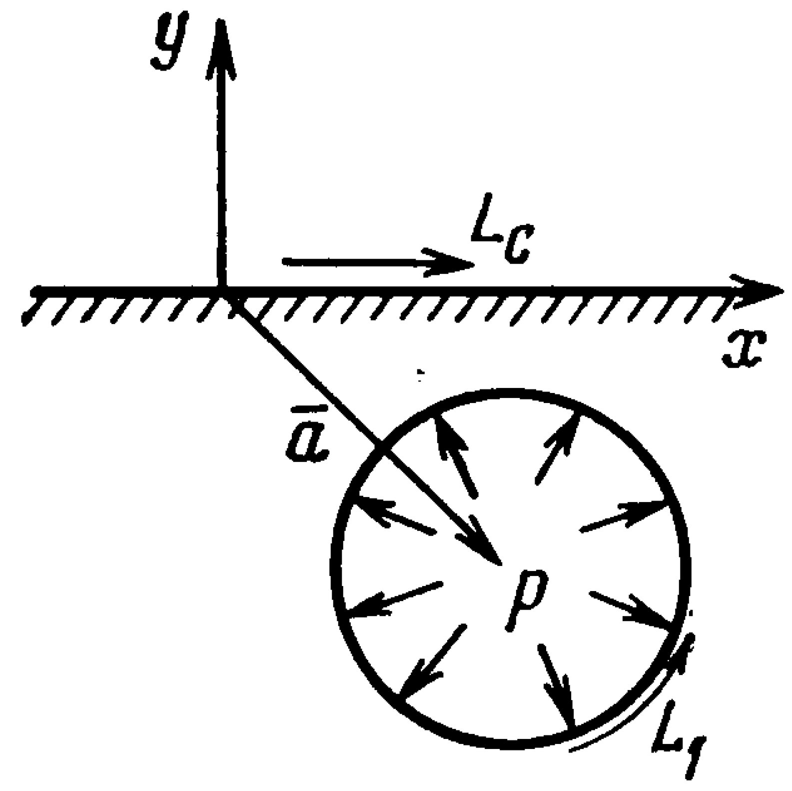
УДК 539.3

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Ю. А. Амензаде, М. Б. Ахундов

(Баку)

Дается прием решения некоторых граничных задач для полуплоскости с круговым отверстием. Предполагается, что материал полуплоскости обладает прямолинейной анизотропией общего вида и существуют плоскости симметрии, перпендикулярные к оси O. Полуплоскость ослаблена круговым отверстием L_1 единичного радиуса, подверженным внутреннему давлению p. Через $\bar{a}$ обозначим аффикс центра L_1 (фигура).



1. Решение задачи состоит в отыскании двух аналитических в соответствующих областях функций $\Phi_j(z_j)$ $(j = 1,2)$, через которые выражаются компоненты напряжения и перемещения [1]. При этом $z_j = x + \mu_j y$ — обобщенные комплексные переменные; здесь μ_1, μ_2 — корни некоторого характеристического уравнения.

Составляющие напряжения на площадке с нормалью n определяются по формулам

$$
\begin{gathered}
\sigma_n = \delta_1^2\Phi_1'(z_1) + \bar{\delta}_1^2\overline{\Phi_1'(z_1)} + \delta_2^2\Phi_2'(z_2) + \bar{\delta}_2^2\overline{\Phi_2'(z_2)} \\
\tau_n = \delta_1\gamma_1\Phi_1'(z_1) + \bar{\delta}_1\bar{\gamma}_1\overline{\Phi_1'(z_1)} + \delta_2\gamma_2\Phi_2'(z_2) + \bar{\delta}_2\bar{\gamma}_2\overline{\Phi_2'(z_2)} \\
\delta_j = \cos(n, y) - \mu_j\cos(n, x), \quad \gamma_j = \cos(n, y) + \mu_j\cos(n, x)
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Полуплоскости S^-, ослабленной круговым отверстием L_1, в комплексной плоскости z_j соответствует полуплоскость S_j^-, ограниченная той же прямой L_0 и ослабленная эллиптическим отверстием γ_j с центром в точке $\bar{a}_j$.

Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллипса, имеет вид

$$
z_j = \bar{a}_j + {}^1/_2\, c_j e^{i\theta_j}\left[\rho_j\zeta_j + (\rho_j\zeta_j)^{-1}\right]
$$

$$
\rho_j = \sqrt{\frac{b_j + d_j}{b_j - d_j}}, \qquad c_j = \sqrt{b_j^2 - d_j^2}
$$

Здесь b_j, d_j — большая и малая полуоси эллипса, θ_j — угол наклона большой полуоси к Ox. Обратная к ней функция представляется следующим образом:

$$\zeta_j = \chi_j(z_j) = \frac{z_j - \bar{a}_j + \sqrt{(z_j - \bar{a}_j)^2 - c_j^2 e^{2i\theta_j}}}{\rho_j c_j e^{i\theta_j}}$$

На контуре единичного круга L_1 справедливы соотношения

$$\delta_j(t_j) = \frac{1}{2}(i + \mu_j)\,\chi_j^{-1}(t_j)\left(\frac{i - \mu_j}{i + \mu_j} - \chi_j^2(t_j)\right)$$

$$\gamma_j(t_j) = \frac{1}{2}(i - \mu_j)\,\chi_j^{-1}(t_j)\left(\frac{i + \mu_j}{i - \mu_j} - \chi_j^2(t_j)\right)$$

Здесь точка $\chi_j(t_j)$ принадлежит L_1, а t_j — точка γ_j.

2. *Первая граничная задача.* На прямолинейной границе полуплоскости L_0 заданы нормальные $N(t_0)$ и касательные $T(t_0)$ силы, суммируемые на L_0. Тогда имеем

$$\Phi_1'(t_0) + \Phi_2'(t_0) + \overline{\Phi_1'(t_0)} + \overline{\Phi_2'(t_0)} = -N(t_0) \quad \text{на } L_0 \tag{2.1}$$

$$\mu_1\Phi_1'(t_0) + \mu_2\Phi_2'(t_0) + \bar{\mu}_1\overline{\Phi_1'(t_0)} + \bar{\mu}_2\overline{\Phi_2'(t_0)} = T(t_0) \quad \text{на } L_0 \tag{2.2}$$

$$\xi_1(t_1)\,\Phi_1'(t_1) + \xi_2(t_2)\,\Phi_2'(t_2) + \eta_1(t_1)\,\overline{\Phi_1'(t_1)} + \eta_2(t_2)\,\overline{\Phi_2'(t_2)} = -p \text{ на } L_1 \tag{2.3}$$

$$\xi_j(t_j) = \delta_j(t_j)\,(\delta_j(t_j) + i\gamma_j(t_j)), \quad \eta_j(t_j) = \overline{\delta_j(t_j)}\,\overline{(\delta_j(t_j) + i\gamma_j(t_j))}$$

На L_1 введем неизвестные вспомогательные функции

$$2\xi_1(t_1)\,\omega_1(t) = \xi_1(t_1)\Phi_1'(t_1) - \xi_2(t_2)\,\Phi_2'(t_2) - \eta_1(t_1)\,\overline{\Phi_1'(t_1)} - \eta_2(t_2)\,\overline{\Phi_2'(t_2)} \tag{2.4}$$

$$2\xi_2(t_2)\,\omega_2(t) = -\xi_1(t_1)\,\Phi_1'(t_1) + \xi_2(t_2)\,\Phi_2'(t_2) - \eta_1(t_1)\,\overline{\Phi_1'(t_1)} - \eta_2(t_2)\,\overline{\Phi_2'(t_2)} \tag{2.5}$$

Сложив соответственно (2.3) с (2.4) и (2.3) с (2.5), получим

$$\Phi_j'(t_j) = \omega_j(t) - \frac{p}{2\xi_j(t_j)} \quad (j = 1, 2) \tag{2.6}$$

На основании свойств интегралов типа Коши из (2.6) найдем, что регулярная в области, находящейся вне эллипса γ_j, функция

$$\Phi_{j*}'(z_j) = \Phi_j'(z_j) + I_{1j}(z_j) - I_{2j}(z_j) \tag{2.7}$$

$$I_{1j}(z_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{\omega_j(t)\,dt_j}{t_j - z_j}; \quad I_{2j}(z_j) = \frac{p}{2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{\xi_j^{-1}(t_j)\,dt_j}{t_j - z_j}$$

аналитически продолжима внутрь эллипса γ_j.

Подставим (2.7) в (2.1) и (2.2), тогда относительно регулярных во всей нижней полуплоскости функций $\Phi_{j*}'(z_j)$ получим

$$\begin{gathered}\Phi_{1*}'(t_0) + \Phi_{2*}'(t_0) + \overline{\Phi_{1*}'(t_0)} + \overline{\Phi_{2*}'(t_0)} = -N(t_0) + R_*(t_0)\\ \mu_1\Phi_{1*}'(t_0) + \mu_2\Phi_{2*}'(t_0) + \bar{\mu}_1\overline{\Phi_{1*}'(t_0)} + \bar{\mu}_2\overline{\Phi_{2*}'(t_0)} = T(t_0) + Q_*(t_0)\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$R_*(t_0) = I_{11}(t_0) - I_{21}(t_0) + I_{12}(t_0) - I_{22}(t_0) + \overline{I_{11}(t_0)} - \overline{I_{21}(t_0)} + \overline{I_{12}(t_0)} - \overline{I_{22}(t_0)} \tag{2.9}$$

$$Q_*(t_0) = \mu_1[I_{11}(t_0) - I_{21}(t_0)] + \mu_2[I_{12}(t_0) - I_{22}(t_0)] + \bar{\mu}_1[\overline{I_{11}(t_0)} - \overline{I_{21}(t_0)}] + \bar{\mu}_2[\overline{I_{12}(t_0)} - \overline{I_{22}(t_0)}]$$

Умножим (2.8) на ядро Коши и проинтегрируем по L_0, тогда

$$\Phi_{1*}'(z_1)=\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[\varphi_1(z_1)-\varphi_2(z_1)],\quad \Phi_{2*}'(z_1)=\frac{-1}{\mu_2-\mu_1}[\psi_1(z_2)-\psi_2(z_2)]$$

$$\varphi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\mu_2N(t_0)+T(t_0)}{t_0-z_1}dt_0,\quad \varphi_2(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\mu_2R_*(t_0)-Q_*(t_0)}{t_0-z_1}dt_0$$

$$\psi_1(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\mu_1N(t_0)+T(t_0)}{t_0-z_2}dt_0,\quad \psi_2(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\mu_1R_*(t)-Q_*(t_0)}{t_0-z_2}dt_0$$

3. *Смешанная граничная задача.* Штамп с плоским основанием вдавливается силой P в полуплоскость с круговым отверстием. Между основанием штампа и границей L_0 предполагается наличие сил сухого трения ($T=\rho_*P$). Принимается, что штамп перемещается поступательно. Тогда на L_0 имеем

(3.1)
$$\Phi_1'(t_0)+\Phi_2'(t_0)+\overline{\Phi_1'(t_0)}+\overline{\Phi_2'(t_0)}=0$$

$$\mu_1\Phi_1'(t_0)+\mu_2\Phi_2'(t_0)+\bar\mu_1\overline{\Phi_1'(t_0)}+\bar\mu_2\overline{\Phi_2'(t_0)}=0,\quad |t_0|>l$$

$$q_1\Phi_1'(t_0)+q_2\Phi_2'(t_0)+\bar q_1\overline{\Phi_1'(t_0)}+\bar q_2\overline{\Phi_2'(t_0)}=0$$
$$-[\mu_1\Phi_1'(t_0)+\mu_2\Phi_2'(t_0)+\bar\mu_1\overline{\Phi_1'(t_0)}+\bar\mu_2\overline{\Phi_2'(t_0)}]=$$
$$=\rho_*[\Phi_1'(t_0)+\Phi_2'(t_0)+\overline{\Phi_1'(t_0)}+\overline{\Phi_2'(t_0)}],\quad |t_0|<l$$

Постоянные q_1, q_2 выражаются через константы материала [1].

Исходя из построенных в п. 2 функций $\Phi_{j*}'(z_j)$, сведем данную задачу к задаче о вдавливании штампа в сплошную полуплоскость. Учитывая (2.7) и представив $\Phi_{j*}'(z_j)$ в виде

$$\Phi_{j*}'(z_j)=\varphi_{j*}'(z_j)+\psi_{j*}'(z_j)$$

где $\psi_{j*}'(z_j)$ — решение первой краевой задачи для сплошной анизотропной полуплоскости, когда к границе полуплоскости приложены некоторые силы $R_*(t_0)$, $Q_*(t_0)$, из (3.1) для $\varphi_{j*}'(z_j)$ имеем

(3.2)
$$\varphi_{1*}'(t_0)+\varphi_{2*}'(t_0)+\overline{\varphi_{1*}'(t_0)}+\overline{\varphi_{2*}'(t_0)}=0$$

$$\mu_1\varphi_{1*}'(t_0)+\mu_2\varphi_{2*}'(t_0)+\bar\mu_1\overline{\varphi_{1*}'(t_0)}+\bar\mu_2\overline{\varphi_{2*}'(t_0)}=0,\quad |t_0|>l$$

$$q_1\varphi_{1*}'(t_0)+q_2\varphi_{2*}'(t_0)+\bar q_1\overline{\varphi_{1*}'(t_0)}+\bar q_2\overline{\varphi_{2*}'(t_0)}=M'(t_0)$$

$$-[\mu_1\varphi_{1*}'(t_0)+\mu_2\varphi_{2*}'(t_0)+\bar\mu_1\overline{\varphi_{1*}'(t_0)}+\bar\mu_2\overline{\varphi_{2*}'(t_0)}]=$$

$$=\rho_*[\varphi_{1*}'(t_0)+\varphi_{2*}'(t_0)+\overline{\varphi_{1*}'(t_0)}+\overline{\varphi_{2*}'(t_0)}],\quad |t_0|<l$$

$$M'(t_0)=M_0'(t_0)-q_1\psi_{1*}'(t_0)-q_2\psi_{2*}'(t_0)-\bar q_1\overline{\psi_{1*}'(t_0)}-\bar q_2\overline{\psi_{2*}'(t_0)}$$

$$M_0(t_0)=q_1[I_{11}(t_0)-I_{21}(t_0)]+q_2[I_{12}(t_0)-I_{22}(t_0)]+$$
$$+\bar q_1[\overline{I_{11}(t_0)}-\overline{I_{21}(t_0)}]+\bar q_2[\overline{I_{12}(t_0)}-\overline{I_{22}(t_0)}]$$

Следуя [2], аналитические в нижней полуплоскости функции $\varphi_{j*}'(z_j)$ представим в виде

$$\varphi_{1*}'(z_1)=-\frac{\mu_2+\rho_*}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)}w_1(z_1),\quad \varphi_{2*}'(z_2)=\frac{\mu_1+\rho_*}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)}w_1(z_2)$$

Для определения $w_1(z)$ построена задача Римана — Гильберта

$$w_1^+(t_0)+\frac{\varkappa_1+i\varkappa_2}{\varkappa_1-i\varkappa_2}w_1^-(t_0)=\frac{2M'(t_0)}{\varkappa_1-i\varkappa_2},\quad |t_0|<l$$

$$w_1^+(t_0)-w_1^-(t_0)=0,\quad |t_0|>l$$

$$\varkappa_1=\frac{1}{\pi}(A_3+\rho_*A_4),\quad \varkappa_2=\frac{1}{\pi}(B_3+\rho_*B_4)$$

Здесь A_3, A_4, B_3, B_4 выражаются через константы материала [2].

Решение полученной задачи представляется в виде

$$w_1(z) = \frac{X_0(z)}{\pi i(\varkappa_1 - i\varkappa_2)} \int_{-l}^{l} \frac{M'(t_0)\,dt_0}{X_0^+(t_0)(t_0 - z)} + C_1 X_0(z)$$

$$X_0(z) = (z+l)^{-\gamma^\circ}(z-l)^{\gamma^\circ - 1}, \quad \gamma^\circ = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(-\frac{\varkappa_1 + i\varkappa_2}{\varkappa_1 - i\varkappa_2}\right)$$

4. Пусть под штампом имеет место полное сцепление, а граница вне штампа свободна от усилий; тогда

$$\Phi_1'(t_0) + \Phi_2'(t_0) + \overline{\Phi_1'(t_0)} + \overline{\Phi_2'(t_0)} = 0 \tag{4.1}$$

$$\mu_1\Phi_1'(t_0) + \mu_2\Phi_2'(t_0) + \bar\mu_1\overline{\Phi_1'(t_0)} + \bar\mu_2\overline{\Phi_2'(t_0)} = 0, \quad |t_0| > l$$

$$p_1\Phi_1'(t_0) + p_2\Phi_2'(t_0) + \bar p_1\overline{\Phi_1'(t_0)} + \bar p_2\overline{\Phi_2'(t_0)} = 0$$

$$q_1\Phi_1'(t_0) + q_2\Phi_2'(t_0) + \bar q_1\overline{\Phi_1'(t_0)} + \bar q_2\overline{\Phi_2'(t_0)} = 0, \quad |t_0| < l$$

Подставляя в (4.1) выражения (2.7), получим

$$\Phi_{1*}'(t_0) + \Phi_{2*}'(t_0) + \overline{\Phi_{1*}'(t_0)} + \overline{\Phi_{2*}'(t_0)} = R_*(t_0)$$

$$\mu_1\Phi_{1*}'(t_0) + \mu_2\Phi_{2*}'(t_0) + \bar\mu_1\overline{\Phi_{1*}'(t_0)} + \bar\mu_2\overline{\Phi_2'(t_0)} = Q_*(t_0), \quad |t_0| > l$$

$$p_1\Phi_{1*}'(t_0) + p_2\Phi_{2*}'(t_0) + \bar p_1\overline{\Phi_{1*}'(t_0)} + \bar p_2\overline{\Phi_{2*}'(t_0)} = N_0(t_0)$$

$$q_1\Phi_{1*}'(t_0) + q_2\Phi_{2*}'(t_0) + \bar q_1\overline{\Phi_{1*}'(t_0)} + \bar q_2\overline{\Phi_{2*}'(t_0)} = M_0(t_0), \quad |t_0| < l$$

$$N_0(t_0) = p_1[I_{11}(t_0) - I_{21}(t_0)] + p_2[I_{12}(t_0) - I_{22}(t_0)] + \bar p_1[\overline{I_{11}(t_0)} - \overline{I_{21}(t_0)}] + \\ + \bar p_2[\overline{I_{12}(t_0)} - \overline{I_{22}(t_0)}]$$

где $R_*(t_0)$, $Q_*(t_0)$ и $M_0(t_0)$ определяются из (2.9) и последней формулы (3.2).

Эти условия соответствуют смешанной граничной задаче для сплошной полуплоскости. Следуя [2], находим

$$\Phi_{1*}'(z_1) = \frac{(1 - \bar S\mu_2)w_2(z_1) - (1 - S\mu_2)w_3(z_1)}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)(\bar S - S)}$$

$$\Phi_{2*}'(z_2) = \frac{(1 - \bar S\mu_1)w_2(z_2) - (1 - S\mu_1)w_3(z_2)}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)(\bar S - S)}$$

Для функций $w_2(z)$ и $w_3(z)$ построены задачи Римана — Гильберта

$$w_j^+(t_0) + \frac{K_j + iQ_j}{K_j - iQ_j} w_j^-(t_0) = \frac{2\pi}{K_j - iQ_j}[N_0(t_0) + \lambda_j M_0(t_0)], \quad |t_0| < l$$

$$w_j^+(t_0) - w_j^-(t_0) = 2\pi i[R_*(t_0) + S_j Q_*(t_0)], \quad |t_0| > l$$

$$K_2 = \bar K_3 = K, \quad Q_2 = \bar Q_3 = Q, \quad S_2 = \bar S_3 = S, \quad \lambda_2 = \bar\lambda_3 = \lambda$$

(постоянные K, Q, λ, S выражаются через константы материала [2]). Решения этих задач имеют вид

$$w_j(z) = \frac{X_{0j}(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f_j(t_0)\,dt_0}{X_{0j}^+(t_0)(t_0 - z)} + C_j X_{0j}(z), \quad j = 2, 3$$

$$f_j(t_0) = \begin{cases} 2\pi i[R_*(t_0) + S_j Q_*(t_0)], & |t_0| > l \\ \dfrac{2\pi}{K_j - iQ_j}[N_0(t_0) + S_j M_0(t_0)], & |t_0| < l \end{cases}$$

$$X_{0j}(z) = (z+l)^{-\gamma_j^\circ}(z-l)^{\gamma_j^\circ - 1}, \quad \gamma_j^\circ = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(-\frac{K_j + iQ_j}{K_j - iQ_j}\right)$$

Постоянные C_j определяются из предельных условий для $w_j(z_j)$ на бесконечности [2]; они равны силе P, действующей на штамп. Для нахождения $\omega_j(t)$ представим их в виде рядов Фурье

$$\omega_j(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_{\nu j} (t - \bar{a})^{\nu}.$$

С использованием этого представления функции $\Phi_j'(z_j)$ выражаются в бесконечных рядах, в коэффициенты которых входят $\alpha_{\nu j}$. Для их определения получены две бесконечные системы комплексных линейных алгебраических уравнений.

Численный пример. Для первой основной задачи произведен расчет при следующих данных: $p = 0$; $N(t_0) = 0$ при $|t_0| > l$ и $N(t_0) = 1$ при $|t_0| < l$, $T(t_0) = 0$, $a_0 = -ih$, $\mu_1 = 1.48i$, $\mu_2 = 0.53i$, $l = 1.2$, $h = 1.2$. При этом из четырех бесконечных систем вещественных линейных алгебраических уравнений взято по одиннадцать уравнений. Получены эпюры кольцевых напряжений в точках окружности. Значения кольцевых напряжений в точках окружности приведены ниже

θ	0	40	80	120	180
σ_θ	+10.87	+8.06	+6.97	−4.55	−1.58
σ_θ	+ 5.52	+3.96	+2.84	−3.12	−4.28

В третьей строке даны значения σ_θ для изотропного случая; θ — угол, отсчитываемый от нормали к границе полуплоскости.

Поступила 8 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., Гостехиздат, 1950.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
3. *Амензаде Ю. А.* Вдавливание штампа в полуплоскость с включениями, ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВДАВЛИВАНИЕ ДВУХ ШТАМПОВ В УПРУГИЙ ШАР

В. А. Карпенко

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о вдавливании в упругий шар двух одинаковых осесимметричных штампов. Предполагается, что вне штампов поверхность шара свободна от напряжений, а под штампами отсутствуют касательные напряжения. Методом, изложенным в работе [1], получено решение для произвольных штампов как при заданных, так и при неизвестных заранее границах областей контакта. Дана численная реализация для сферических штампов при внутреннем касании с шаром.

Контактная задача для шара в такой постановке (в случае, когда границы областей контакта известны) впервые изучалась в работе [2]. Задача сводилась к определению некоторых коэффициентов из парных рядов — уравнений, содержащих полиномы Лежандра. Указан способ, позволяющий решение полученных парных рядов — уравнений свести к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. В работе [3] эта задача сведена к интегральному уравнению первого рода, и указана возможная схема приближенного решения полученного уравнения.

1. Рассмотрим контактную задачу о вдавливании в упругий шар $r \leqslant R$ двух осесимметричных штампов (фиг. 1), поверхность которых задана в сферической системе