

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
2. *Гузь О. М.* Про один варіаційний принцип тривимірної теорії пружної стійкості при великих докритических деформаціях. Доп. АН УССР. Сер. А, 1971, № 3.
3. *Бабич И. Ю., Гузь О. М.* Варіаційний принцип динамічних лінеаризованих задач теорії пружності для нестисливих тіл при високоеластичних деформаціях. Доп. АН УССР. Сер. А, 1971, № 10.
4. *Бабич И. Ю., Гузь А. Н.* О вариационных принципах типа Ху — Вапицу для линейризованных задач несжимаемых тел при высокоэластических деформациях. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 3.
5. *Гузь А. Н.* Вариационные принципы линейризованных задач теории упругости при больших начальных деформациях. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
6. *Гузь А. Н.* Трехмерная теория упругой устойчивости при конечных докритических деформациях. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 12.
7. *Гузь А. Н.* К вопросу о линейризованных задачах теории упругости. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 1.
8. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев, «Наукова думка», 1973.
9. *Алфутов Н. А., Балабух Л. И.* Энергетический критерий устойчивости упругих тел, не требующий определения начального напряженно-деформированного состояния. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
10. *Болотин В. В.* О вариационных принципах упругой устойчивости. В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., «Судостроение», 1970.
11. *Vujanovic B.* Synge's disturbed equations as a variational problem and their first integrals. Bull. Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci., Sér. 5, 1965, t. 51, No. 6.
12. *Djukić D.* A contribution to the analytical mechanics of the disturbed motion. Bull. Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci. Sér., 5, 1972, t. 58, No 1.
13. *Nemat-Nasser S.* On variational methods in finite and incremental elastic deformation problems with discontinuous fields. Quart. Appl. Math., 1972, vol. 30, No. 2.

УДК 539.3

**РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ СЕКТОРА СЕГМЕНТА ТОРООБРАЗНОЙ ОБОЛОЧКИ**

**В. М. Богомольный, Р. Д. Степанов**

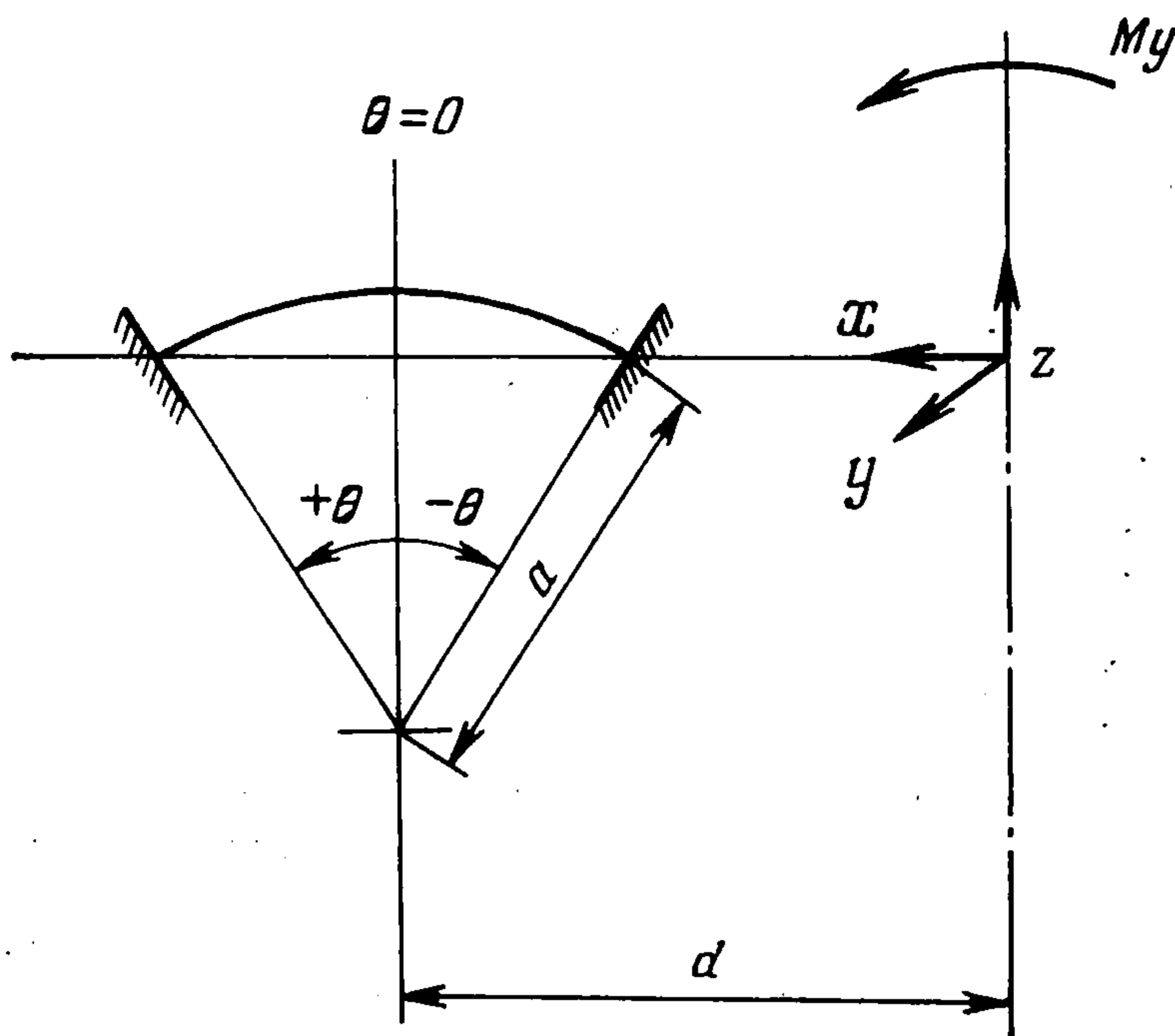
(Москва)

Мембранные усилия в сегменте тонкой торообразной оболочки при нагружении краевой изгибающей нагрузкой определяются из частного решения основного дифференциального уравнения. С учетом асимптотического приближения специальной функции, через которое выражается частное решение, в работе [1] показано, что для тонкой торообразной оболочки частное решение совпадает с безмоментным. В общем случае в незамкнутой по двум координатам оболочке растягивающие усилия определяются по безмоментной теории; моментное напряженное состояние определяется с учетом полученного решения. Для решения задачи применяется метод характеристик, использованный в [2] для анализа безмоментных оболочек. Основное дифференциальное уравнение решается при помощи специального интегрального преобразования с применением рядов Фурье. Приводятся результаты численного расчета на ЭВМ и эксперимента.

Рассматривается тонкая, упругая торообразная оболочка, ограниченная координатами  $0 \leq \varphi \leq \pi$  и  $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$ . К краю  $\theta = -\pi/6$  через жесткий диск, который поворачивается на угол  $\omega_y$  вокруг оси  $y$ , приложен внешний краевой момент  $M_y$ . Наружный край  $\theta = \pi/6$  жестко заделан и остается неподвижным. Края  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  свободны от внешних усилий (см. фиг. 1).

Основное дифференциальное уравнение торообразной оболочки при изгибающей нагрузке имеет вид [1]

$$(1) \quad (\lambda + \sin \theta) \frac{d^2 Y}{d\theta^2} - 3 \frac{dY}{d\theta} \cos \theta - i2\gamma^2 Y \sin \theta = 4\gamma^4 \Phi(\theta) (\lambda + \sin \theta)^3$$



Фиг. 1

Для тонких оболочек с отношением  $h/R_1 \leq 1/400$  мембранные усилия определяются в основном частным решением уравнения (1) [3], которое совпадает с безмоментным решением, полученным делением правой части (1) на коэффициент при  $Y$  [1]. Поэтому для определения растягивающих усилий в незамкнутой по двум координатам тонкой торообразной оболочке может быть применена безмоментная теория. Возможность такой постановки задачи при крайних условиях, заданных в усилиях, отмечена в работе [4].

Основное уравнение безмоментной торообразной оболочки при крайнем нагружении имеет вид [5]

$$(2) \quad \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$U = -T_2 R_1 \sin \theta$$

Для торообразной оболочки  $R_1 = a$ ,  $R_2 = a/\sin \theta$ . После дифференцирования уравнение (2) примет вид

$$(3) \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} (\lambda + \sin \theta) \sin \theta + \frac{\partial T_2}{\partial \theta} (3\lambda + 5 \sin \theta) \cos \theta + T_2 [4 \cos^2 \theta - 2(\lambda + \sin \theta) \sin \theta] + \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} = 0$$

Решая уравнение характеристик основного уравнения (3) относительно  $\varphi$ , находим ординату точки пересечения характеристики, проходящей через начало координат, с линией  $\theta = \pi/6$

$$\varphi_0 = \int_0^{-\pi/6} \frac{d\theta}{\sqrt{-(\lambda + \sin \theta) \sin \theta}}$$

В частности, при  $\lambda = 3.44$  получим  $\varphi_0 \approx \pi/4$ .

Задавая значение искомой функции  $T_2$  на отрезках координат точки пересечения характеристики с линией  $\theta = -\pi/6$ , получим решение основного уравнения (3).

Доказательство условий существования и единственности решения в этом случае дается теоремой Коши — Римана.

Из условия существования решения определяется область, в которой может быть решена задача. При  $\varphi < \varphi_0$  необходимо учитывать влияние свободного края  $\varphi = 0$ , вне области, ограниченной координатой  $\varphi = \varphi_0$ , влияние края  $\varphi = 0$  несущественно, и расчет оболочки при  $\varphi > \varphi_0$  не отличается от решения аналогичной задачи для замкнутой по окружной координате оболочки.

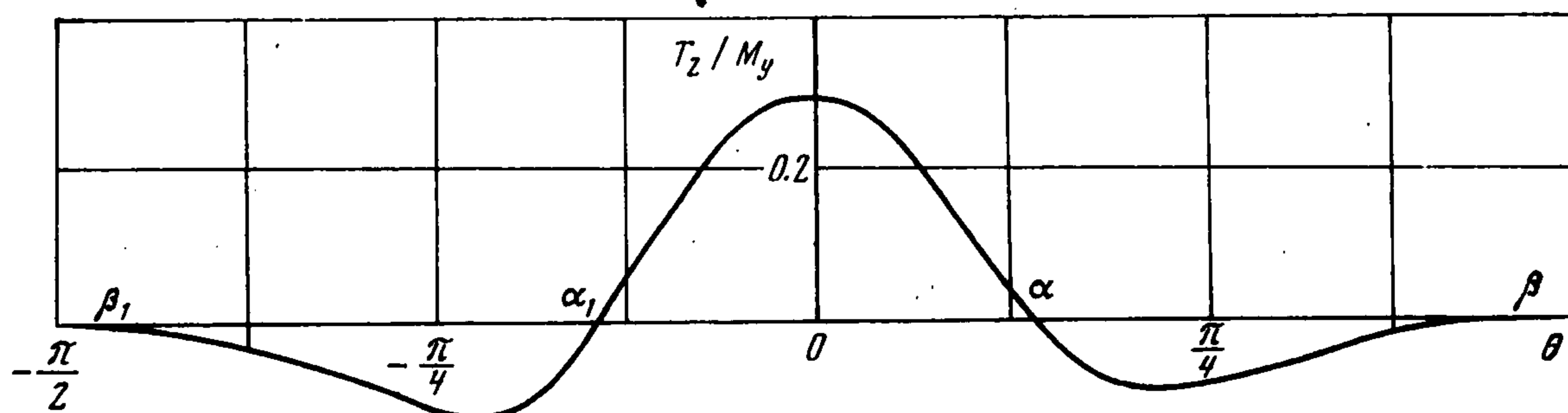
Эпюра окружных усилий  $T_2$  в замкнутом по  $\varphi$  сегменте тора в сечении  $\varphi = \varphi_0$  при нагружении моментом  $M_y$  дана на фиг. 2. Для участка оболочки, ограниченного

координатами  $\alpha_1 \leq \theta \leq \beta_1$ , краевые условия формулируются в следующем виде:

$$(4) \quad T_2|_{\varphi=0} = 0, \quad T_2|_{\varphi=\varphi_0} = f(\theta)$$

$$(5) \quad T_2|_{\theta=\alpha_1} = 0, \quad T_2|_{\theta=\beta_1} = 0$$

где  $f(\theta)$  — заданная функция, величина усилий  $T_2$  в замкнутой по  $\varphi$  оболочке.



Фиг. 2

Решение основного уравнения (3) определяется рядом Фурье [6]

$$(6) \quad T_2 = \sum_{s=1}^{s=\infty} T_s \sin \frac{\pi s \varphi}{\varphi_0}, \quad T_s = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} T_2 \sin \frac{\pi s \varphi}{\varphi_0} d\varphi$$

где функция  $T_s$  определяется из решения обыкновенного дифференциального уравнения, полученного из (3) преобразованием, которое определяется вторым выражением (6).

На крае  $\varphi = \varphi_0$  полученные ряды не удовлетворяют второму краевому условию (4). Для получения окончательного решения к ряду (6) необходимо прибавить соответствующий ряд (по функциям  $\sin \pi s \varphi / \varphi_0$ ) для вспомогательной функции  $F$ , принимающей на границах интервала  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_0$  те же значения, что и искомая функция  $T_2$ .

Эпюра  $T_2$  в сечении  $\theta = -0.4$  — результат расчета по приведенному методу на ЭВМ — приводится на фиг. 3 (кривая 1).

Для качественной оценки можно использовать следующие приближенные методы. При  $\theta = 0$  основное уравнение (3) вырождается в параболическое уравнение

$$(7) \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} + 4T_2 + 3\lambda \frac{\partial T_2}{\partial \theta} = 0$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение по  $\theta$ , получим

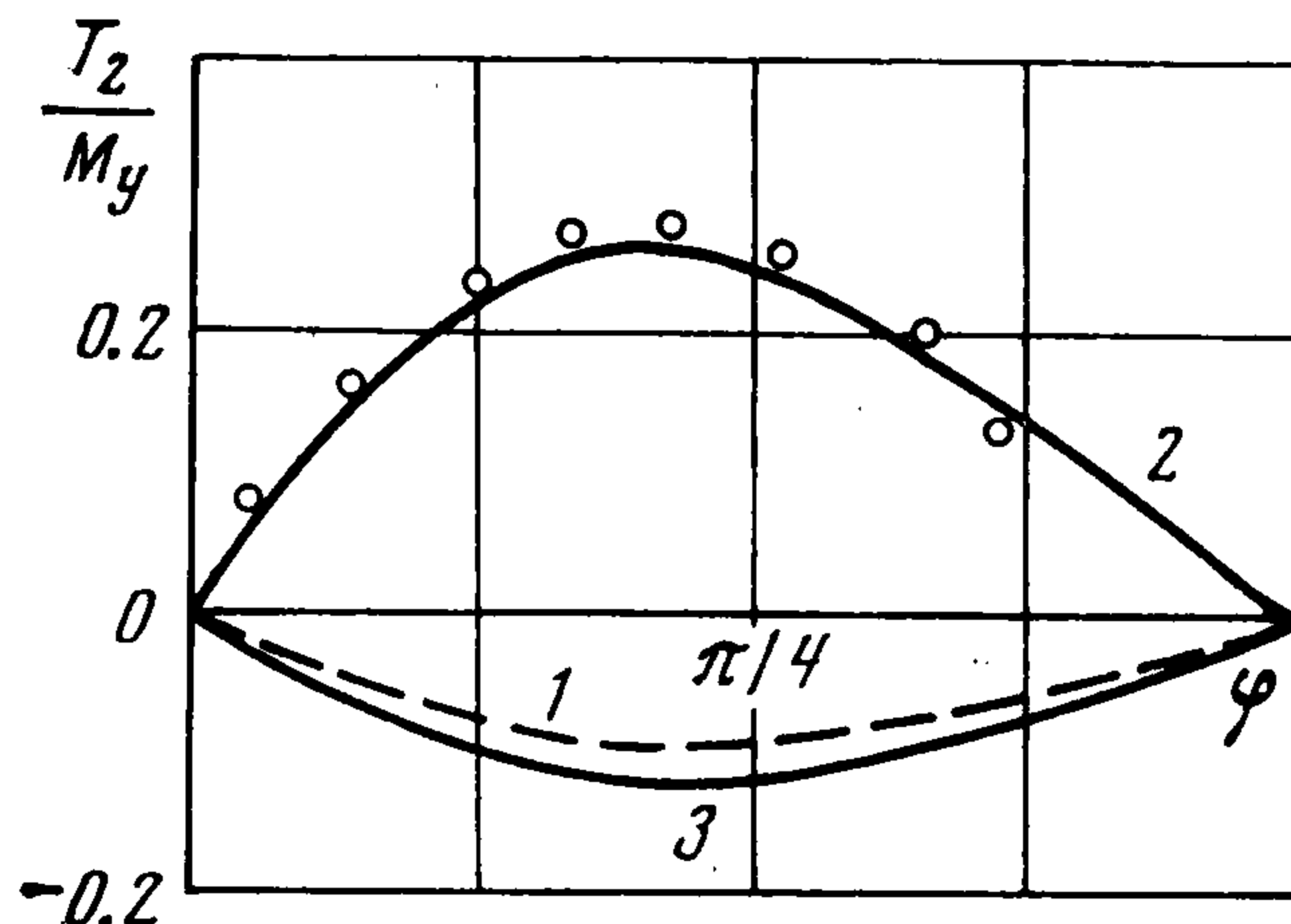
$$(8) \quad \int \frac{dz}{z} = -\frac{R^2}{3\lambda} \int d\theta, \quad \ln |z| = -\frac{R^2}{3\lambda} \theta$$

При  $\theta = 0, z = 1$  решение уравнения (7) примет вид

$$T_2 = C_1 \sin \delta \varphi + C_2 \cos \delta \varphi, \quad \delta = \sqrt{4 - R^2} \quad (R \text{ — постоянная, полученная, при разделении переменных}).$$

Для уравнения (7) принимаем краевые условия (4). С учетом первого условия (4) получим

$$(9) \quad T_2 = C_1 \sin \delta \varphi$$



Фиг. 3

При периодическом напряженном состоянии в замкнутой по  $\varphi$  оболочке при нагружении краевым моментом  $M_y$  в сечении  $\varphi = \varphi_0$  для функций  $T_2^*$  и  $dT_2^*/d\varphi$  имеем

$$(10) \quad T_2^* |_{\varphi=\varphi_0} = T_{2(1)}^* \cos \varphi_0, \quad \left. \frac{dT_2^*}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -T_2^* \sin \varphi_0$$

где  $T_{2(1)}$  — величина  $T_2$  в сечении  $\varphi = 0$  в замкнутом по  $\varphi$  сегменте тора.

В секторе сегмента тора с учетом (9) имеем

$$(11) \quad T_2 |_{\varphi=\varphi_0} = C_1 \sin \delta \varphi_0, \quad \left. \frac{dT_2}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = C_1 \delta \sin \left( \delta \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right)$$

Приравнивая искомую функцию  $T_2$  и ее производную аналогичным известным величинам для замкнутой по  $\varphi$  оболочки, для определения  $\delta$  из (10) и (11) получим трансцендентное уравнение

$$- \operatorname{tg} \varphi_0 \sin \delta \varphi_0 = \delta \sin (\delta \varphi_0 + \pi/2)$$

Из этого уравнения в рассматриваемом случае  $\delta = 2.4$ . График функции  $T_2$  в сечении  $\theta = 0$  приводится на фиг. 3 (кривая 2). На этом графике показаны данные эксперимента, проведенного на оболочках толщиной  $h = 0.01$  см при геометрических параметрах  $a = 3.2$  см,  $d = 11$  см, выполненных из стали марки 12Х18Н10Т.

При изменении угла  $\theta$  в пределах  $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$ , принимая в уравнении (3)  $\sin \theta \approx \theta$  и  $\cos \theta \approx 1$ , получим

$$(12) \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} (\lambda + \theta) \theta + \frac{\partial T_2}{\partial \theta} (3\lambda + 5\theta) + T_2 [4 - 2(\lambda + \theta) \theta] + \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} = 0$$

С отклонением величин коэффициентов уравнения на 6% от точного значения принимаем в (12) коэффициент при первой производной равным  $3\lambda + 3\theta$ , а величину  $\lambda + \theta = (\lambda + \theta)_*$  (средней на рассматриваемом интервале).

Разделяя в (12) переменные, получим два уравнения

$$\theta \frac{d^2 X}{d\theta^2} + a \frac{dX}{d\theta} + X (b + c\theta) = 0, \quad \frac{d^2 Y}{d\varphi^2} + R^2 Y = 0$$

$$a = 3, \quad c = -2, \quad b = (4 - R^2)/(\lambda + \theta)_*$$

Вводя в первом из этих уравнений новую функцию  $X = \theta^{-a/2} U(\theta)$  и замену  $\xi = \theta \sqrt{-4c}$ , получим уравнение Уиттекера

$$4\xi^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} = (\xi^2 - 4n\xi + 4m^2 - 1) U$$

$$n = \frac{b}{\sqrt{-4c}}, \quad 4m^2 - 1 = 2a + a^2$$

Общее решение уравнения (12) с учетом первого краевого условия (4) имеет вид ( $\Phi, \Psi$  — вырожденные гипергеометрические функции)

$$T_2 = \theta^{-a/2} [C_1 M_{n,m}(\xi) + C_2 W_{n,m}(\xi)] \sin R\varphi$$

$$M_{n,m}(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{m+1/2} \Phi(m-n+1/2, 2m+1, \xi)$$

$$W_{n,m}(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{m+1/2} \Psi(m-n+1/2, 2m+1, \xi)$$

Эпюра  $T_2$  в сечении  $\theta = -0.4$ , полученная по этому методу, приводится на фиг. 3 (кривая 3).

Моментное напряженное состояние в секторе сегмента тонкой торообразной оболочки соответствует характеру изменения мембранных усилий и определяется на основании полученного безмоментного решения. Зная общий характер изменения напряженного состояния и величину моментов в сечении  $\varphi = \varphi_0$  (из решения известной задачи для замкнутой по окружной координате оболочки), можно определить величину изгибающих моментов на участке  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чернина В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М., Изд-во «Наука», 1968, стр. 455.
2. Соколовский В. В. Уравнения равновесия безмоментных оболочек. ПММ, 1943, т. 7, вып. 1.
3. Степанов Р. Д., Богомольный В. М. К задаче об изгибе сегмента торообразной оболочки. В сб.: Расчеты на прочность, вып. 16. М., «Машиностроение», 1975.
4. Работнов Ю. Н. Некоторые решения безмоментной теории оболочек, ПММ, 1946, т. 10, вып. 5.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951, стр. 344.
6. Гринберг Г. А. Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных. Изв. АН СССР. Сер. физическая, 1946, т. 10, № 2.

УДК 539.3

## ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Ю. А. Амензаде, М. Б. Ахундов

(Баку)

Дается прием решения некоторых граничных задач для полуплоскости с круговым отверстием. Предполагается, что материал полуплоскости обладает прямолинейной анизотропией общего вида и существуют плоскости симметрии, перпендикулярные к оси  $O$ . Полуплоскость ослаблена круговым отверстием  $L_1$  единичного радиуса, подверженным внутреннему давлению  $p$ . Через  $\bar{a}$  обозначим абсциссу центра  $L_1$  (фигура).

1. Решение задачи состоит в отыскании двух аналитических в соответствующих областях функций  $\Phi_j(z_j)$  ( $j = 1, 2$ ), через которые выражаются компоненты напряжения и перемещения [1]. При этом  $z_j = x + \mu_j y$  — обобщенные комплексные переменные; здесь  $\mu_1, \mu_2$  — корни некоторого характеристического уравнения.

Составляющие напряжения на площадке с нормалью  $n$  определяются по формулам

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_n &= \delta_1^2 \Phi_1'(z_1) + \bar{\delta}_1^2 \overline{\Phi_1'(z_1)} + \delta_2^2 \Phi_2'(z_2) + \bar{\delta}_2^2 \overline{\Phi_2'(z_2)} \\ \tau_n &= \delta_1 \gamma_1 \Phi_1'(z_1) + \bar{\delta}_1 \bar{\gamma}_1 \overline{\Phi_1'(z_1)} + \delta_2 \gamma_2 \Phi_2'(z_2) + \bar{\delta}_2 \bar{\gamma}_2 \overline{\Phi_2'(z_2)} \\ \delta_j &= \cos(n, y) - \mu_j \cos(n, x), \quad \gamma_j = \cos(n, y) + \mu_j \cos(n, x) \end{aligned}$$

Полуплоскости  $S^-$ , ослабленной круговым отверстием  $L_1$ , в комплексной плоскости  $z_j$  соответствует полуплоскость  $S_j^-$ , ограниченная той же прямой  $L_0$  и ослабленная эллиптическим отверстием  $\gamma_j$  с центром в точке  $\bar{a}_j$ .

Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллипса, имеет вид

$$\begin{aligned} z_j &= \bar{a}_j + 1/2 c_j e^{i\theta_j} [\rho_j \zeta_j + (\rho_j \zeta_j)^{-1}] \\ \rho_j &= \sqrt{\frac{b_j + d_j}{b_j - d_j}}, \quad c_j = \sqrt{b_j^2 - d_j^2} \end{aligned}$$

