УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ВАРЬИРУЕМЫМ НАЧАЛЬНЫМ И ВОЗМУЩЕННЫМ СОСТОЯНИЯМИ

Л. Я. Айнола

(Таллин)

Приводятся два вариационных принципа типа Гамильтона для нелинейной теории упругости, представляющие собой совместные вариационные принципы начального и возмущенного состояний движения упругого тела.

Вариационные формулировки задач для определения возмущенного напряженного состояния при заданном начальном линейном состоянии в статике хорошо известны. Недавно рассматривались вариационные формулировки также и для случаев нелинейного и от времени зависящего начального напряженного состояния [1–8]. В соответствующих вариационных принципах варьированию подлежат только величины возмущенного состояния.

Чтобы избежать определения начального напряженного состояния при определении нейтрального состояния равновесия, в статике упругого тела дополнительно вводились [9] варьируемые перемещения второго порядка малости. Показано [10], что этот же результат получается более естественным образом, если к функционалу, соответствующему нейтральному состоянию равновесия, методом множителей Лагранжа присоединить уравнение равновесия. Недавно [11, 12] на базе уравнений аналитической механики дана совместная вариационная формулировка для начального и возмущенного состояний движения систем материальных точек.

Ниже развиваются идеи последних двух групп работ.

1. Исходный вариационный принцип. Рассмотрим упругое тело V, загруженное силами, компоненты которых относительно неподвижных криволинейных систем координат x^1, x^2, x^3 остаются неизменными при деформациях. Предполагаем, что деформации настолько малы, что изменениями площадей и объема при вычислении напряжений можно пренебречь. Тогда геометрически нелинейная задача описывается следующими уравнениями и условиями:

$$\nabla_k [s^{kl} (\delta_l^{\ i} + \nabla_l u^i)] + X^i - \rho \ddot{u}^i = 0, \quad P \in V, \quad t_1 < t < t_2 \tag{1.1}$$

$$s^{ki} = E^{ikjl} e_{jl}, \quad e_{ik} = {}^1/_2 (\nabla_i u_k + \nabla_k u_i + \nabla_i u^l \nabla_k u_l)$$

$$s^{kj} (\delta_j^{\ i} + \nabla_j u^i)\, n_k = Q^i, \quad P \in S_1, \quad t_1 < t < t_2 \tag{1.2}$$

$$u_i = U_i, \quad P \in S_2, \quad t_1 < t < t_2 \tag{1.3}$$

$$u_i (P, t_1) = u_i' (P), \quad u_i (P, t_2) = u_i'' (P), \quad P \in V \tag{1.4}$$

Здесь u_i — компоненты вектора перемещения, e_{ik}, s_{ik} — составляющие тензора деформаций и напряжений, E^{ikjl} — компоненты тензора упругости, $\delta_i^{\ k}$ — символ Кронекера, X^i, Q^i — компоненты вектора объемных сил и поверхностной нагрузки, отнесенных соответственно к единице объема и поверхности недеформированного тела, U_i — заданные компоненты вектора перемещения, u_i', u_i'' — заданные перемещения при $t = t_1$ и $t = t_2$, ρ — плотность недеформируемого упругого тела, P — точка в области V, занимаемой недеформируемым телом, $S = S_1 + S_2$ — граничная поверхность недеформируемого тела, S_1, S_2 — части поверхности, где заданы соответственно внешняя нагрузка и перемещения, n_i — компоненты единичного вектора нормали к поверхности S, ∇_i — знак ковариантного дифференцирования в метрике недеформируемого тела.

Рассматриваемую задачу нелинейной теории упругости можно сформулировать при помощи вариационной задачи, соответствующей принципу Гамильтона следующим образом: найти стационарное значение функционала

$$I(u)=\int_{t_1}^{t_2}\int_V\left(\frac{1}{2}\rho u^{i\cdot}u_i^{\cdot}-\frac{1}{2}s_{t_2}^{ik}e_{ik}+X^iu_i\right)dV\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_1}Q^iu_i\,dS\,dt \tag{1.5}$$

при условиях (1.3), (1.4). Уравнениями Эйлера — Остроградского функционала (1.5) служат уравнения (1.1) и естественные граничные условия (1.2), записанные в перемещениях.

Предположим, что внешние воздействия X^i, Q^i, U_i, $u_i'u_i''$, вызывающие перемещения u_i упругого тела, можно представить в виде суммы (η — малый параметр)

$$\begin{aligned}&X^i=X_0{}^i+\eta Y^i,\quad Q^i=Q_0{}^i+\eta R^i,\quad U_i=U_i{}^0+\eta V_i\\&u_i'=u_i{}^{0\prime}+\eta v_i',\quad u_i''=u_i{}^{0\prime\prime}+\eta v_i''\end{aligned} \tag{1.6}$$

Соответственно предположим, что перемещения u_i можно разложить в степенной ряд по малому параметру

$$u_i=u_i{}^0+\eta v_i+\eta^2w_i+\ldots \tag{1.7}$$

Подставляя величины X^i, Q^i, U_i, u_i', u_i'', u_i, выраженные через соотношения (1.6), (1.7), в функционал (1.5), имеем

$$I(u)=I_0(u_0)+\eta I_1(u_0,\ v)+\eta^2I_2(u_0,\ v,\ w)+\ldots \tag{1.8}$$

Применяя метод малого параметра и ограничиваясь первыми тремя членами в разложении (1.8), видим, что из вариационного принципа

$$\delta I(u)=0 \tag{1.9}$$

вытекают следующие вариационные принципы:

$$\delta I_0(u_0)=0,\quad \delta I_1(u_0,\ v)=0,\quad \delta I_2(u_0,\ v,\ w)=0 \tag{1.10}$$

Видно, что первый из этих принципов отличается от исходного вариационного принципа (1.9) только обозначениями. (В уравнениях (1.1) — (1.5) соответствующим величинам приписываются нулевые индексы.)

2. Первый вариационный принцип с варьируемым начальным и возмущенным состояниями движения. Выпишем функционал $I_1(u_0,\ v)$, соответствующий второму из вариационных принципов (1.10)

$$\begin{aligned}I_1(u_0,\ v)=&\int_{t_1}^{t_2}\int_V(\rho u_0{}^{i\cdot}v_i^{\cdot}-s_0{}^{ik}\varepsilon_{ik}+X_0{}^iv_i+Y^iu_i{}^\circ)\,dV\,dt+\\&+\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_1}(Q_0{}^iv_i+R^iu_i{}^\circ)\,dS\,dt\\&\varepsilon_{ik}={}^1/_2(\nabla_iv_k+\nabla_kv_i+\nabla_iu_0{}^l\nabla_kv_l+\nabla_iv^l\nabla_ku_l{}^\circ)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Варьируемые величины $u_i{}^\circ$, v_i должны удовлетворять соответственно условиям (1.3), (1.4) и условиям, вытекающим из условий (1.3), (1.4) с учетом соотношений (1.6) и (1.7)

$$\begin{aligned}&v_i=V_i,\quad P\in S_2,\quad t_1<t<t_2\\&v_i(P,\ t_1)=v_i'(P),\quad v_i(P,\ t_2)=v_i''(P),\quad P\in V\end{aligned} \tag{2.2}$$

Условиями стационарности функционала (2.1) служат уравнения начального состояния движения (первое уравнение (1.1)) и уравнения

$$\begin{aligned}&\nabla_k[\sigma^{kl}(\delta_l{}^i+\nabla_lu_0{}^i)]+\nabla_k(s_0{}^{kl}\nabla_lv^i)+X^i-\rho v^{i\cdot\cdot}=0\\&P\in V,\quad t_1<t<t_2\end{aligned} \tag{2.3}$$

а также граничные условия для начального состояния (1.2) и условия

$$\sigma^{kl}(\delta_l^{\,i} + \nabla_l u_0^{\,i})\, n_k + (s_0^{\,kl}\nabla_l v^i)\, n_k = R^i, \quad \sigma^{ik} = E^{ikjl}\varepsilon_{jl} \qquad (2.4)$$
$$P \in S_1, \quad t_1 < t < t_2$$

Итак, из функционала (2.1) вытекают уравнения и условия как начального, так и возмущенного состояний. Следовательно, вариационный принцип (1.10) представляет собой совместную вариационную формулировку одновременно для этих состояний.

Отметим, что для уравнений аналитической механики аналогичный вариационный принцип постулирован в работах [11, 12]. Попытка сформулировать вариационный принцип одновременно для начального и возмущенного состояний для задач статики теории упругости сделана в работе [13], но только с помощью одного варьируемого состояния, что не дает возможности получить желаемые результаты.

3. Второй вариационный принцип с варьируемым начальным и возмущенным состояниями движения. Выпишем функционал

$$I_2(u_0, v, w) = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \Big(\rho u_0^{\,i\cdot} u_i^{\,\cdot} + \frac{1}{2}\rho v^{i\cdot} v_i^{\,\cdot} - s_0^{\,ik}\mu_{ik} - \qquad (3.1)$$
$$- \frac{1}{2}\sigma^{ik}\varepsilon_{ik} + X_0^{\,i} w_i + Y^i v_i\Big)\, dV\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{S_1} (Q_0^{\,i} w_i + R^i v_i)\, dS\, dt$$

$$\mu_{ik} = {}^1/_2\ (\nabla_i w_k + \nabla_k w_i + \nabla_i u_0^{\,l}\nabla_k w_l + \nabla_i w^l \nabla_k u_l^{\,0} + \nabla_i v^l \nabla_k v_l)$$

В функционале (3.1) варьируемыми величинами являются u_i°, v_i, w_i, причем функции u_i°, v_i, w_i должны удовлетворять условиям (1.3), (1.4), (2.2) и

$$w_i = 0, \quad P \in S_2, \quad t_1 < t < t_2 \qquad (3.2)$$
$$w_i(P, t_1) = 0, \quad w_i(P, t_2) = 0, \quad P \in V$$

Условиями стационарности функционала (3.1) служат следующие три группы уравнений: уравнения начального состояния движения (первое уравнение (1.1)), уравнение возмущенного состояния движения (2.3) и уравнения

$$\nabla_k[\tau^{kl}(\delta_l^{\,i} + \nabla_l u_0^{\,i})] + \nabla_k(s_0^{\,kl}\nabla_l w^i) + \nabla_k(\sigma^{kl}\nabla_l v^i) - \rho w^{i\cdot\cdot} = 0 \qquad (3.3)$$
$$P \in V, \quad t_1 < t < t_2$$

а также соответствующие граничные условия (1.2), (2.4) и

$$\tau^{kl}(\delta_l^{\,i} + \nabla_l u_0^{\,i})\, n_k + (s_0^{\,kl}\nabla_l w^i)\, n_k + (\sigma^{kl}\nabla_l v^i)\, n_k = 0 \qquad (3.4)$$
$$\tau^{ik} = E^{ikjl}\mu_{jl}, \quad P \in S_1, \quad t_1 < t < t_2$$

Считаем теперь все возмущения внешних воздействий равными нулю, т. е. рассматриваем задачу об устойчивости упругого тела. Если в этом случае предположить, что перемещения начального состояния удовлетворяют первому уравнению (1.1) и начальным и граничным условиям (1.2), (1.4), то функционалу (3.1) можно придать хорошо известный вид, не содержащий варьируемых перемещений w_i

$$I_2'(v) = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \left(\frac{1}{2}\rho v^{i\cdot} v_i^{\,\cdot} - s_0^{\,ik}\nabla_i v^l \nabla_k v_l - \frac{1}{2}\sigma^{ik}\varepsilon_{ik}\right) dV\, dt$$

Существует и другая возможность преобразования функционала (3.1), где вместо дополнительных условий (1.1) — (1.4) используются дополнительные условия (3.2) — (3.4). Для линеаризованных задач соответствующий функционал приведен в работах [9, 10]. В общем нелинейном случае это преобразование никакого существенного упрощения функционала (3.1) не дает.

Поступила 6 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
2. *Гузь О. М.* Про один варіаційний принцип тривимірної теорії пружної стійкості при великих докритических деформаціях. Доп. АН УССР. Сер. А, 1971, № 3.
3. *Бабич И. Ю., Гузь О. М.* Варіаційний принцип динамічных лінеаризованих задач теорії пружності для нестисливых тіл при високоеластичных деформаціях. Доп. АН УССР. Сер. А, 1971, № 10.
4. *Бабич И. Ю., Гузь А. Н.* О вариационных принципах типа Ху — Вашицу для линеаризированных задач несжимаемых тел при высокоэластических деформациях. Прикл. механ., 1972, т. 8. вып. 3.
5. *Гузь А. Н.* Вариационные принципы линеаризированных задач теории упругости при больших начальных деформациях. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
6. *Гузь А. Н.* Трехмерная теория упругой устойчивости при конечных докритических деформациях. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 12.
7. *Гузь А. Н.* К вопросу о линеаризированных задачах теории упругости. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 1.
8. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев, «Наукова думка», 1973.
9. *Алфутов Н. А., Балабух Л. И.* Энергетический критерий устойчивости упругих тел, не требующий определения начального напряженно-деформированного состояния. ПММ. 1968. т. 32. вып. 4.
10. *Болотин В. В.* О вариационных принципах упругой устойчивости. В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., «Судостроение», 1970.
11. *Vujanovic B.* Synge's disturbed equations as a variational problem and their first integrals. Bull. Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci., Sér. 5, 1965, t. 51, No. 6.
12. *Djukič D.* A contribution to the analytical mechanics of the disturbed motion. Bull. Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci. Sér., 5, 1972, t. 58, No 1.
13. *Nemat-Nasser S.* On variational methods in finite and incremental elastic deformation problems with discontinuous fields. Quart. Appl. Math., 1972, vol. 30, No. 2.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЕКТОРА СЕГМЕНТА ТОРООБРАЗНОЙ ОБОЛОЧКИ

В. М. Богомольный, Р. Д. Степанов

(Москва)

Мембранные усилия в сегменте тонкой торообразной оболочки при нагружении краевой изгибающей нагрузкой определяются из частного решения основного дифференциального уравнения. С учетом асимптотического приближения специальной функции, через которое выражается частное решение, в работе [1] показано, что для тонкой торообразной оболочки частное решение совпадает с безмоментным. В общем случае в незамкнутой по двум координатам оболочке растягивающие усилия определяются по безмоментной теории; моментное напряженное состояние определяется с учетом полученного решения. Для решения задачи применяется метод характеристик, использованный в [2] для анализа безмоментных оболочек. Основное дифференциальное уравнение решается при помощи специального интегрального преобразования с применением рядов Фурье. Приводятся результаты численного расчета на ЭВМ и эксперимента.

Рассматривается тонкая, упругая торообразная оболочка, ограниченная координатами $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $-\pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/6$. К краю $\theta = -\pi/6$ через жесткий диск, который поворачивается на угол ω_y вокруг оси y, приложен внешний краевой момент M_y. Наружный край $\theta = \pi/6$ жестко заделан и остается неподвижным. Края $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ свободны от внешних усилий (см. фиг. 1).