

**ВОЗДЕЙСТВИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ШУМА
НА ПРИЕМНИК ДАВЛЕНИЯ,
РАСПОЛОЖЕННЫЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ**

Л. А. Шенявский, В. И. Шмальгаузен

(Москва)

Рассчитаны корреляционные характеристики поля возмущений в упругой среде, на поверхности которой действуют турбулентные пульсации давления. Определена спектральная плотность шумового сигнала, воспринимаемого плоским приемником под упругим слоем достаточной толщины.

При исследовании шума турбулентности часто приходится располагать приемник звука под слоем упругого вещества. Расчет конкретных систем связан со значительными вычислительными трудностями. Качественные результаты можно получить из анализа решения задачи о распространении в упругом полупространстве случайного сигнала, возбуждаемого на плоскости, ограничивающей это полупространство. Если считать, что приемник, помещенный в упругой среде, не возмущает акустического поля, то можно оценить и спектр принятого сигнала.

1. Введем декартову прямоугольную систему координат $OXYZ$ так, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала с границей полупространства. Ось oz направим по внешней нормали к среде. Пусть давление на границе p является стационарной и стационарно-связанной случайной величиной, для которой известен пространственно-временной спектр $S_p(\omega, k_x, k_y)$ и, следовательно, корреляционная функция $R_p(\tau, \xi, \eta)$. Будем считать, что плоскость гидрофона перпендикулярна оси oz и что гидрофон реагирует только на нормальную к его поверхности составляющую напряжения σ_{zz} так, что для детерминированного воздействия напряжение на гидрофоне

$$(1.1) \quad V = \int_{s_h} \gamma_v(\mathbf{r}) \sigma_{zz}(\mathbf{r}) ds$$

Здесь γ_v — электромеханический коэффициент гидрофона, s_h — площадь гидрофона.

Соотношение между пространственно-временными спектрами S_p и S_σ случайных величин p и σ_{zz} имеет вид $L(\omega, k_x, k_y, z)$ — передаточная функция среды

$$(1.2) \quad S_\sigma(\omega, k_x, k_y, z) = |L(\omega, k_x, k_y, z)|^2 S_p(\omega, k_x, k_y)$$

Плоскость гидрофона перпендикулярна oz , поэтому глубина его погружения в упругую среду $|z|$ является параметром функции L . Пространственно-временную корреляционную функцию величины σ_{zz} выразим следующим образом:

$$(1.3) \quad R_\sigma(\tau, \xi, \eta) = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_\sigma(\omega, k_x, k_y) \exp[i(\omega\tau + k_x\xi + k_y\eta)] d\omega dk_x dk_y$$

Из (1.1) и (1.3) вычислим автокорреляционную функцию сигнала на гидрофоне $R_v(\tau)$

$$(1.4) \quad R_v(\tau) = \int_{s_h} \int_{s_h'} \gamma_v(\mathbf{r}) \gamma_v(\mathbf{r}') R_\sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) ds_h' ds_h$$

Спектр сигнала, принятого гидрофоном, можно найти, взяв обратное преобразование Фурье от (1.4).

Для нахождения функции L рассмотрим случай, когда воздействие на границе имеет вид

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0} &= -p_{z0} \exp[i(\omega t + k_x x + k_y y)] \\ \sigma_{zx}|_{z=0} &= \sigma_{zy}|_{z=0} = 0 \end{aligned}$$

Из уравнений движения упругой среды [1, 2], пользуясь известной методикой, имеем

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{zz} = & -\frac{p_{z0}}{\Delta} [(\omega^2 - 2c_t^2 k_0^2)(k_0^2 - k_{tz}^2) \exp(ik_{tz}z) - \\ & - 4c_t^2 k_0^2 k_{tz} k_{lz} \exp(ik_{tz}z)] \exp[i(k_x x + k_y y + \omega t)] \\ k_0^2 = & k_x^2 + k_y^2 \\ \Delta = & c_l^2 k_l^2 (k_0^2 - k_{tz}^2) - 2c_t^2 k_0^2 (k_0^2 - k_{lz}^2 + 2k_{lz} k_{tz}) \end{aligned}$$

Здесь c_l и c_t — скорости продольных и поперечных волн. Дисперсионные соотношения имеют вид

$$k_l^2 = k_{lz}^2 + k_0^2 = \omega^2 / c_l^2, \quad k_t^2 = k_{tz}^2 + k_0^2 = \omega^2 / c_t^2$$

Равенство Δ нулю соответствует дисперсионному уравнению для поверхностных волн (волн Релея).

В случае «резиноподобных» сред, обычно используемых для защиты приемников, поперечная волна обладает значительным затуханием, поэтому для не слишком малых значений $|z|$ можно ограничиться рассмотрением только продольной волны. В этом приближении передаточная функция L может быть представлена в виде

$$(1.7) \quad \begin{aligned} L(\omega, k_0) = & L_0(\omega, k_0) \exp(i\sqrt{\omega^2/c_l^2 - k_0^2}z) \\ L_0 = & (2k_0^2 - \omega^2/c_t^2)^2 [(2k_0^2 - \omega^2/c_t^2)^2 + 4k_0^2 \times \sqrt{(\omega^2/c_l^2 - k_0^2)(\omega^2/c_t^2 - k_0^2)}]^{-1} \end{aligned}$$

Если случайное давление на поверхности изотропно, то его корреляционная функция зависит от $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, а спектральная плотность от k_0 . Подставив (1.2) в (1.3), заменив переменные и перейдя к преобразованию Фурье — Бесселя, получим

$$(1.8) \quad \begin{aligned} R_\sigma(\tau, \rho) = & \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau) \int_0^{\infty} |L(\omega, k_0, z)|^2 \times \\ & \times S_p(\omega, k_0) J_0(k_0\rho) k_0 dk_0 d\omega \end{aligned}$$

В волновой зоне, т. е. при достаточно больших $|z|$, область интегрирования по k_0 можно ограничить значением ω / c_l , так как при больших k_0 функция $|L|^2$ быстро убывает. Кроме того, как показывает анализ выражения для L_0 в (1.7), при $c_l / c_t \gg 1$ величина $|L_0|^2 \approx 1$, если $0 \leq k_0 \leq \omega / c_l$. Известно, что $c_l / c_t > \sqrt{2}$ для всех сред. Если $c_l / c_t \geq 4$, то в указанном интервале k_0 отличие $|L_0|^2$ от единицы не превышает 6%, а при $c_l / c_t \geq 10$ это отличие не превышает 0.35%.

Таким образом, в волновой зоне при $c_l / c_t \gg 1$ выражение (1.8) можно приближенно представить в виде

$$\begin{aligned} R_\sigma(\tau, \rho) = & \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau) \frac{\omega^2}{c_l^2} \int_0^1 S_p(\omega, \kappa) J_0\left(\rho \frac{\omega}{c_l} \kappa\right) \kappa d\kappa d\omega \\ (\kappa = & c_l k_0 / \omega) \end{aligned}$$

Аналогичный результат получен в работе [3] для акустического случая.

Заметим, что при $0 \leq k_0 \leq \omega / c_l$ из (1.6) следует, что вклад поперечной волны в σ_{zz} имеет порядок малости $(c_l / c_t)^{-3}$ по сравнению со вкладом продольной волны. Это оправдывает сделанное ранее пренебрежение поперечной волной.

2. Рассмотрим случай изотропной турбулентности. Примем следующую аппроксимацию пространственно-временной корреляционной функции:

$$R_p(\tau, \rho) = R_0 \exp[-(\beta|\tau| + \alpha\rho)]$$

Отсюда получим выражение для спектральной плотности

$$(2.1) \quad \begin{aligned} S_p(\omega, k_0) = & S_0 \alpha \beta (\beta^2 + \omega^2)^{-1} (\alpha^2 + k_0^2)^{-3/2} \\ S_0 = & 4R_0 / \pi^2 \end{aligned}$$

Подставив (2.1) в (1.3), учитывая четность подынтегральных функций по ω , получим

$$(2.2) \quad R_{\sigma}(\tau, \rho) = \frac{2R_0\alpha\beta}{\pi c_l^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 \cos(\omega\tau)}{\beta^2 + \omega^2} \int_0^1 \frac{J_0(\rho\omega c_l^{-1}x) x dx}{(\alpha^2 + \omega^2 c_l^{-2} x^2)^{3/2}} d\omega$$

Дисперсия σ_{zz} в волновой зоне равна $R_{\sigma}(0, 0)$. Производя вычисления по формуле (2.2) найдем

$$(2.3) \quad \frac{R_{\sigma}(0, 0)}{R_0} = 1 - \frac{2\gamma}{\pi} \begin{cases} (\gamma^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma^2 - 1}, & \gamma > 1 \\ (1 - \gamma^2)^{-1/2} \ln [(1 + \sqrt{1 - \gamma^2}) \gamma^{-1}], & \gamma < 1 \end{cases}$$

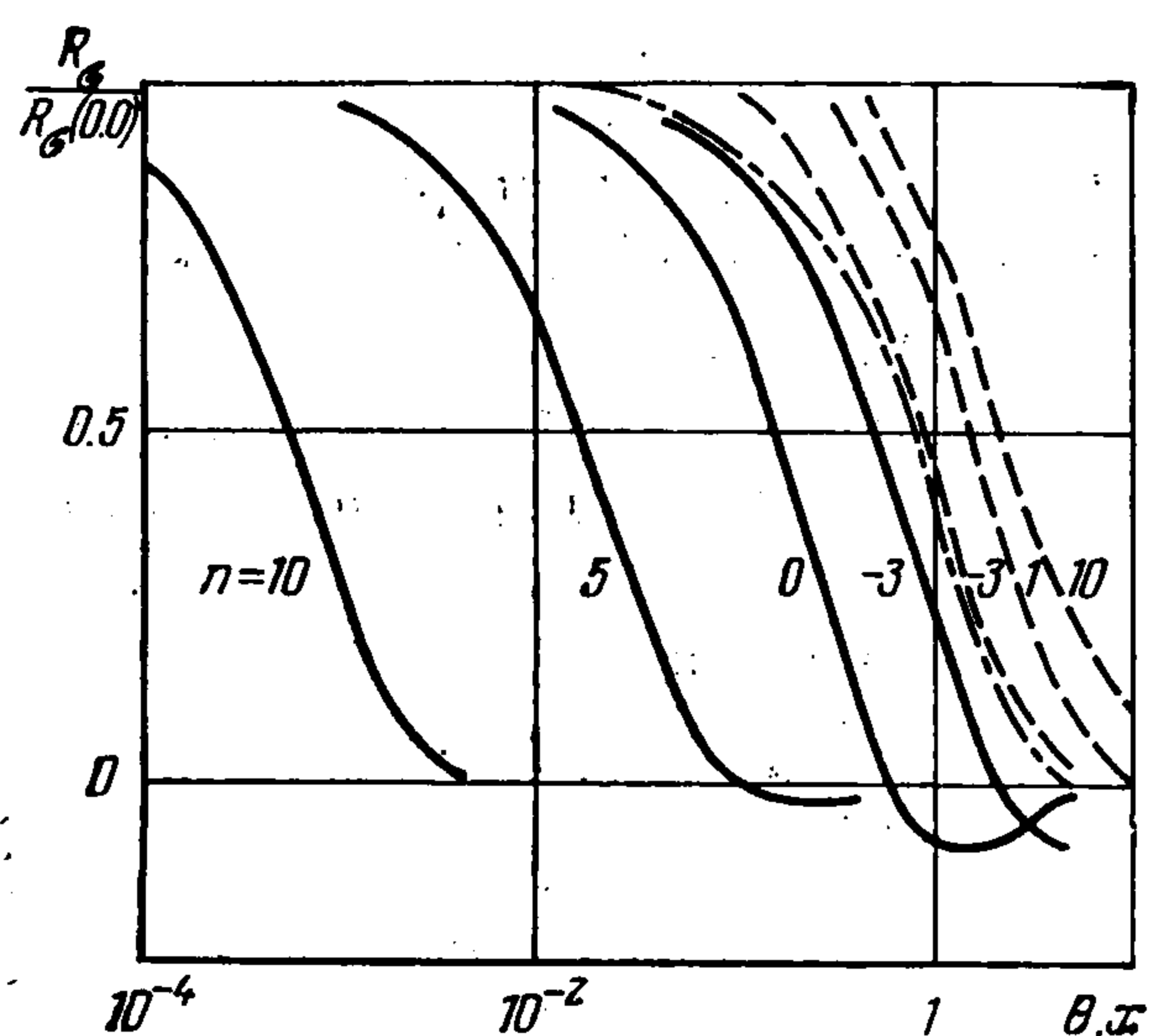
$$\gamma = \alpha c_l / \beta$$

Сравнительно просто из (2.2) выражаются величины $R_{\sigma}(\tau, 0)$ и $R_{\sigma}(0, \rho)$. Имеем

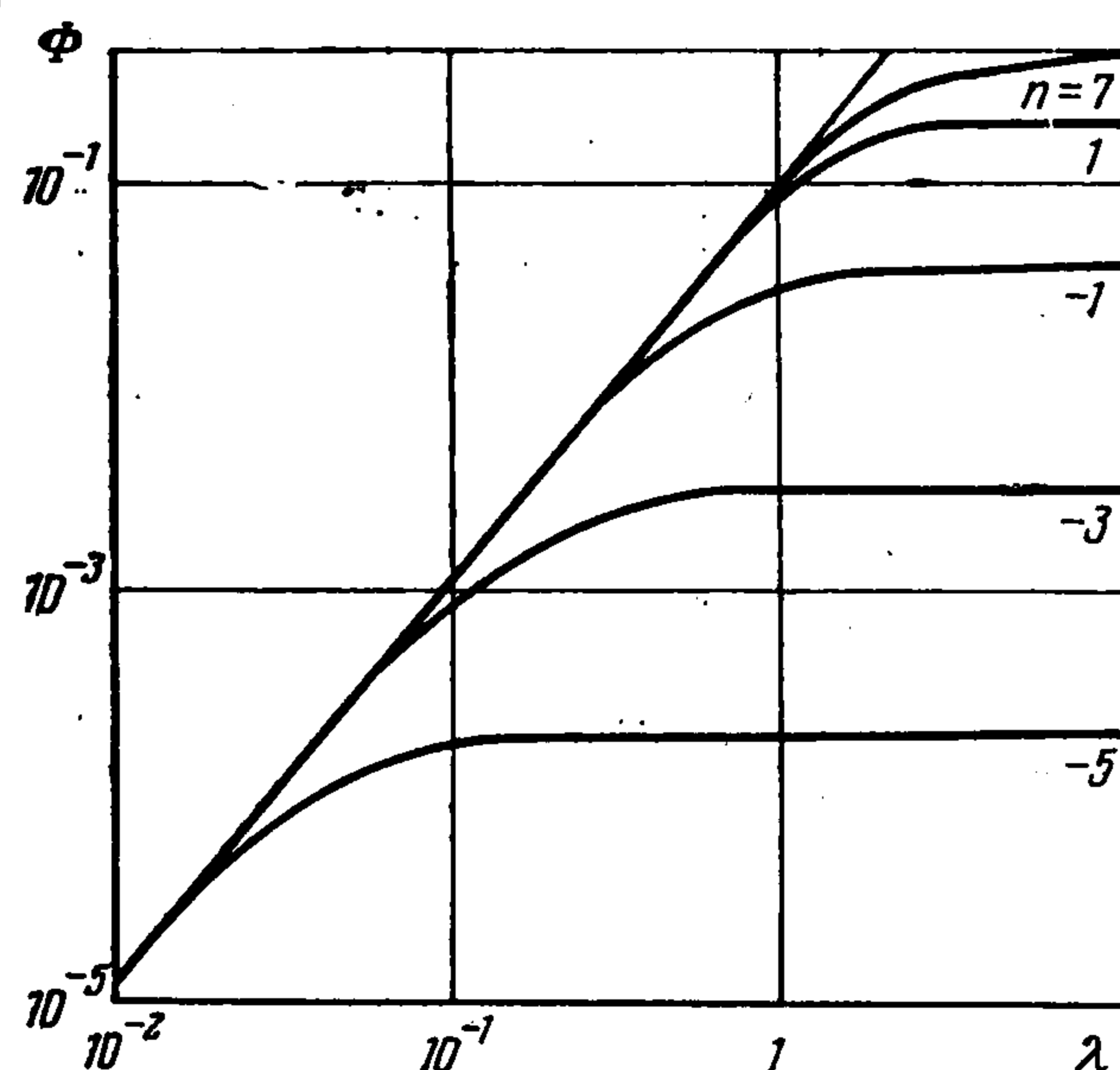
$$(2.4) \quad R_{\sigma}(\tau, 0) = R_p(\tau, 0) - R_0 \frac{2\alpha\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega\tau) d\omega}{(\beta^2 + \omega^2) \sqrt{\alpha^2 + \omega^2 c_l^{-2}}}$$

$$R_{\sigma}(0, \rho) = R_p(0, \rho) - R_0 \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(c_l \beta^{-1} k_0) J_0(\rho k_0)}{(\alpha^2 + k_0^2)^{3/2}} k_0 dk_0$$

Введем безразмерные время $\theta = \beta\tau$ и координату $x = \alpha\rho$, тогда выражения (2.4) будут зависеть от одного параметра $\gamma = \alpha c_l / \beta$. На фиг. 1 приведены полученные численно графики зависимости $R_{\sigma}(\theta, 0) / R_{\sigma}(0, 0)$ (сплошные линии) и $R_{\sigma}(0, x) / R_{\sigma}(0, 0)$ (пунктир) от θ и x соответственно для разных значений $\gamma = 2^n$. Штрихпунктирной линией показан график e^{-x} .



Фиг. 1



Фиг. 2

Из графиков следует, что в волновой зоне время корреляции уменьшается, а радиус корреляции возрастает. Эти изменения тем значительнее, чем больше γ .

Спектр сигнала, принимаемого гидрофоном, подсчитаем для идеализированного случая. Приемник будем считать кругом радиуса r_0 с идеальной акустической изоляцией. Чувствительность приемника будем считать постоянной на его поверхности. Обозначим точку приложения напряжения M , тогда величина γ_v из (1.1) определяется следующим образом (s_h — поверхность гидрофона):

$$(2.5) \quad \gamma_v = \begin{cases} \gamma_v = \text{const}, & M \subset s_h \\ 0, & M \not\subset s_h \end{cases}$$

Подставив выражение для γ_v в (1.4), учитывая изотропность шума, перейдем к полярным координатам. Вычисления, аналогичные проведенным в работе [4], дают

$$(2.6) \quad R_v(\tau) = 4\pi^2 \gamma_v^2 r_0^2 \int_0^{2r_0} R_\sigma(\tau, \rho) K(\rho) \rho d\rho$$

$$K(\rho) = \arccos \frac{\rho}{2r_0} - \frac{\rho}{2r_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{2r_0}\right)^2}$$

Подставив (2.2) в (2.6), преобразуем по Фурье полученное выражение. Представим спектр сигнала на гидрофоне следующим образом:

$$(2.7) \quad S_v(\omega) = 16 (\pi r_0^2)^2 \gamma_v^2 S_0 \frac{\mu\beta}{\beta^2 + \omega^2} \int_0^{2\lambda} \frac{F(\eta) \eta d\eta}{[(2\mu)^2 + \eta^2]^{3/2}}$$

$$\lambda = r_0 \omega / c_l, \quad \mu = r_0 \alpha$$

$$F(\eta) = \int_0^1 J_0(\eta\xi) (\arccos \xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2}) \xi d\xi = \pi \eta^{-2} \left[J_1\left(\frac{\eta}{2}\right) \right]^2$$

Для точечного приемника, т. е. при $\mu \rightarrow 0$, интеграл в (2.7) возрастает как $1/\mu$, поэтому $S_v(\omega)$ остается конечным. Для описания спектра сигнала, принятого гидрофоном, удобно ввести функцию двух переменных

$$(2.8) \quad \Phi(\lambda, \mu) = \mu^3 \int_0^\lambda \frac{[J_1(\xi)]^2 d\xi}{\xi (\mu^2 + \xi^2)^{3/2}}$$

Нетрудно убедиться, что при $\lambda \rightarrow \infty$, если $\mu \ll 1$, то $\Phi \rightarrow \mu^2/4$. Если же при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем $\mu \gg \lambda$, то Φ мало зависит от параметров и в пределе стремится к $1/2$.

На фиг. 2 приведены графики значений Φ как функции λ , вычисленные по формуле (2.8) при разных значениях $\mu = 2^n$.

Учитывая (2.8), формулу (2.7) можно записать в виде

$$(2.9) \quad S_v(\omega) = 2\pi (\pi r_0^2)^2 \gamma_v^2 \frac{S_0 \beta}{\alpha^2 (\beta^2 + \omega^2)} \Phi\left(\frac{r_0 \omega}{c_l}, r_0 \alpha\right)$$

Дисперсию сигнала, принятого гидрофоном, вычислим из (2.6), положив $\tau = 0$. Подставив в (2.6) выражение (2.2) и произведя необходимые вычисления, найдем

$$D_v = R_v(0) = 2\pi (\pi r_0^2)^2 \gamma_v^2 S_0 \Phi(r_0 \alpha, \gamma)$$

$$\Phi(\mu, \gamma) = \mu \int_0^\infty \frac{[J_1(\xi)]^2 \operatorname{arctg}(\xi\gamma/\mu)}{\xi (\mu^2 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

Результаты расчетов в виде графика семейства функции $\Phi(\gamma)$ для разных значений параметра $r_0 \alpha = 2^n$ приведены на фиг. 3.

3. Рассмотрим более общий случай, когда турбулентное давление на границе не является изотропным. Обычно выделяется направление, совпадающее со скоростью потока и перпендикулярное ему. В этом случае (1.4) удобнее представить в виде

$$R_v(\tau) = \int_{s_h} \int_{s_h'} \gamma_v(x_1, y_1) \gamma_v(x_1 + \xi, y_1 + \eta) R_\sigma(\xi, \eta, \tau) dx_1 dy_1 d\xi d\eta$$

Выделим функцию, описывающую влияние гидрофона

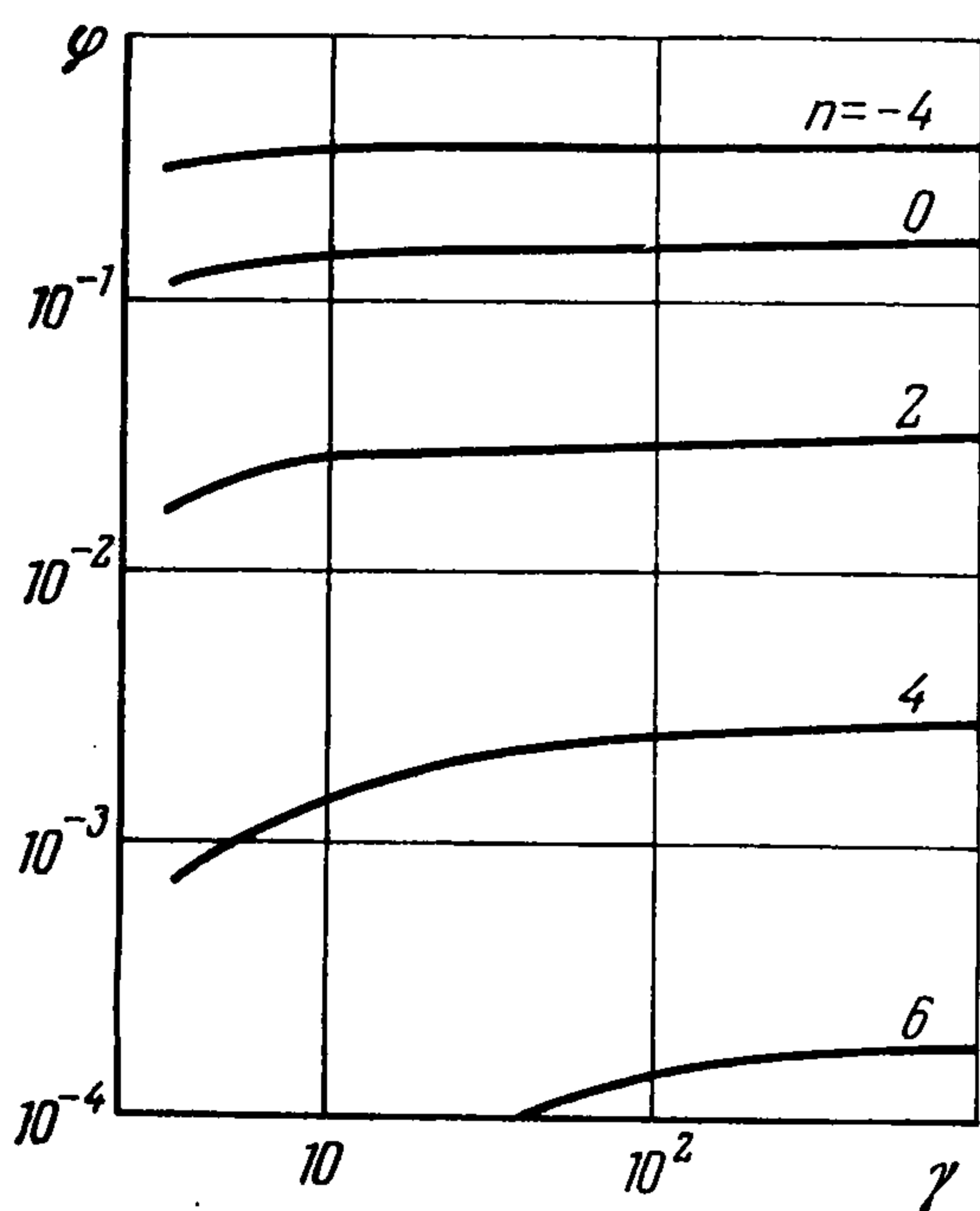
$$(3.1) \quad \Theta(\xi, \eta) = \int_{s_h} \gamma_v(x_1, y_1) \gamma_v(x_1 + \xi, y_1 + \eta) dx_1 dy_1$$

Преобразуя $R_v(\tau)$ по Фурье и учитывая (3.1), получим

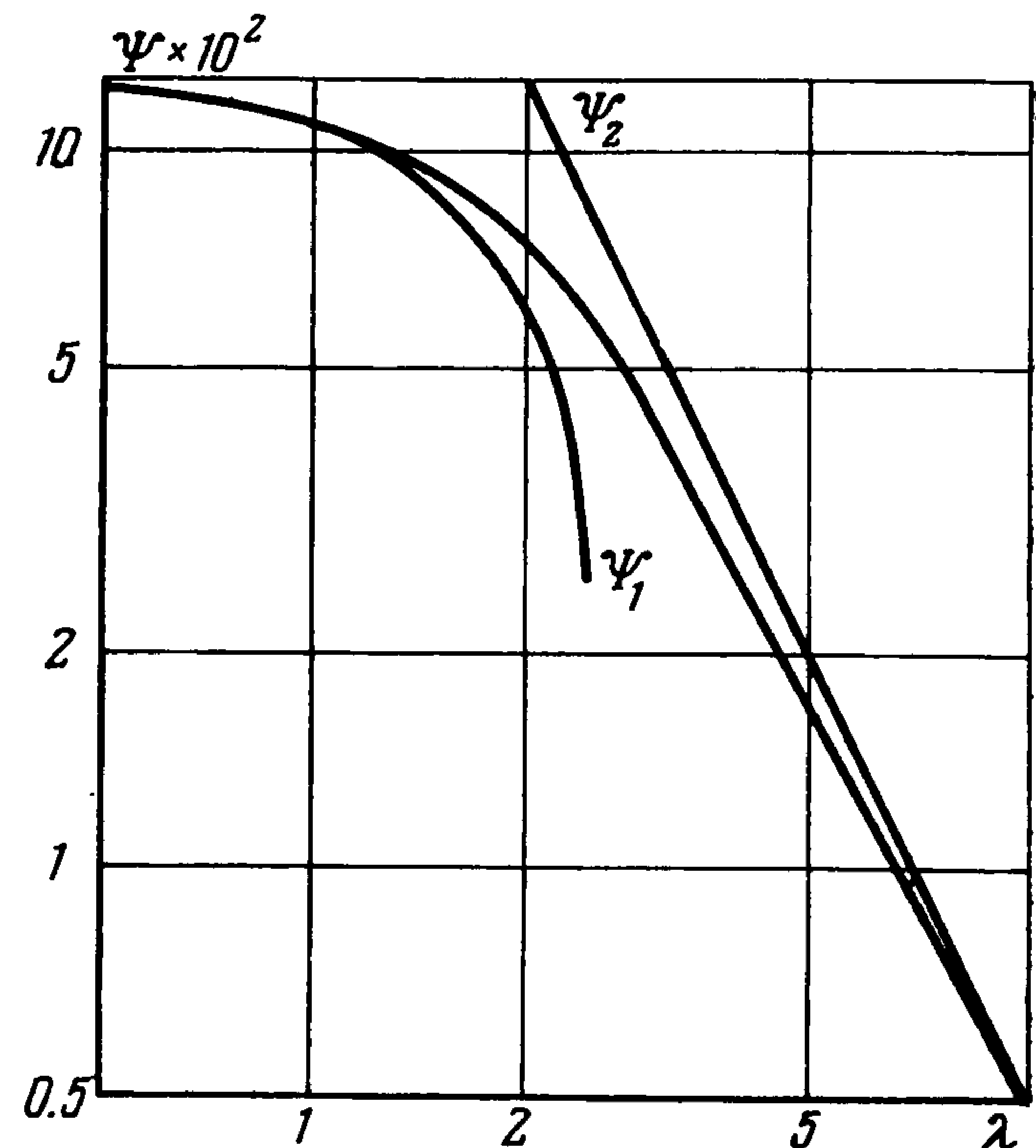
$$(3.2) \quad S_v(\omega) = \int_{s_h} \Theta(\xi, \eta) \Gamma(\xi, \eta, \omega) d\xi d\eta$$

$$\Gamma(\xi, \eta, \omega) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_\sigma(\omega, k_x, k_y) \exp[i(k_x \xi + k_y \eta)] dk_x dk_y$$

— взаимная спектральная плотность σ_{zz} в плоскости приемника. Функция γ_v вне области s_h равна нулю, поэтому интегралы по поверхности s_h можно заменить интег-



Фиг. 3



Фиг. 4

ралами с бесконечными пределами. Принимая во внимание (1.2), из (3.2) имеем

$$(3.3) \quad S_v(\omega) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\theta(k_x, k_y) S_p(k_x, k_y, \omega) |L(k_x, k_y, \omega, z)|^2 dk_x dk_y$$

$$\Phi_\theta(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\xi, \eta) \exp[i(k_x \xi + k_y \eta)] d\xi d\eta$$

Согласно [5] турбулентный поток создает на границе давление, взаимная спектральная плотность которого может быть представлена следующим образом (V_c — конвективная скорость):

$$(3.4) \quad \Gamma_0(x, y, \omega) = S_\omega(\omega) \exp[-(\alpha|x| + \beta|y|)\omega/V_c] \times \cos(\omega x/V_c)$$

Пространственно-временной спектр давления на границе S_p из (3.4) имеет вид

$$(3.5) \quad S_p(k_x, k_y, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{S_\omega(\omega) \alpha \beta \omega^2 / V_c^2}{(\beta \omega / V_c)^2 + k_y^2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(\alpha \omega / V_c)^2 + (\omega / V_c + k_x)^2} + \frac{1}{(\alpha \omega / V_c)^2 + (\omega / V_c - k_x)^2} \right]$$

Чтобы получить спектр сигнала на гидрофоне, помещенном в волновой зоне, подставим (3.5) и (1.7) в (3.3). В волновой зоне $k_x < \omega/c_l$ и $k_y < \omega/c_l$. Если обозначить V_0 — скорость потока, то согласно данным, приведенным в работе [5], конвективная скорость меняется в пределах $0.6 V_0 < V_c < V_0$. Обычно $V_0 \ll c_l$, поэтому в произведении $S_p |L|^2$ членами порядка $(V_c/c_l)^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей.

Пространственно-временную спектральную плотность давления в волновой зоне определим, подставив (3.4) и (1.7) в (1.2). Учитывая сказанное, приближенно получим

$$(3.6) \quad S_{\sigma}(\omega, k_0) \cong \begin{cases} \frac{2\alpha V_c^2 S_{\omega}(\omega)}{\pi\beta(1+\alpha^2)\omega^2}, & k_0 < \omega/c_l \\ 0, & k_0 > \omega/c_l \end{cases}$$

Спектр сигнала на гидрофоне, приняв во внимание (3.3), можно представить в виде (σ_1 — круг радиуса ω/c_l)

$$(3.7) \quad S_p(\omega) = \frac{\alpha V_c^2 S_{\omega}(\omega)}{2\pi\beta(1+\alpha^2)\omega^2} \iint_{\sigma_1} \Phi_{\theta}(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

Для идеализированного гидрофона, чувствительность которого описывается выражением (2.5), функция $\Theta(\xi, \eta)$ зависит от $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Поэтому дальнейшие вычисления, использующие формулы (3.1), (3.3) и (3.7), аналогичны проделанным при получении выражения (2.9) для $S_p(\omega)$ в случае изотропного поля давлений. Прделав необходимые расчеты, получим

$$S_p(\omega) = 4(\pi r_0^2)^2 \gamma_v^2 \frac{\alpha}{\beta(1+\alpha^2)} \left(\frac{V_c}{c_l}\right)^2 S_{\omega}(\omega) \Psi\left(\frac{r_0\omega}{c_l}\right), \quad \Psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda} \frac{[J_1(\xi)]^2}{\xi} d\xi$$

Легко показать, что при $\lambda \rightarrow 0$

$$\Psi \approx \Psi_1 = 1/8 (1 - 1/8\lambda^2)$$

Если $\lambda \rightarrow \infty$, то $\Psi \approx \Psi_2 = \lambda^2/2$. Функция $\Psi(\lambda)$ приведена на фиг. 4.

Так как при $V_0 \ll c_l$ поле σ_{zz} , как это следует из (3.6), изотропно, то для вычисления его корреляционной функции можно воспользоваться соотношением (1.8). Если в (3.4) функция $S_{\omega}(\omega)$ четная, то, подставив (3.6) в (1.8), получим

$$R_{\sigma}(\tau, \rho) = \frac{\alpha V_c^2}{\beta(1+\alpha^2)c_l\rho} \int_0^{\infty} \frac{S_{\omega}(\omega)}{\omega} J_1\left(\frac{\omega\rho}{c_l}\right) \cos(\omega\tau) d\omega$$

Дисперсию величины σ_{zz} можно найти из последнего выражения, положив в нем $\tau = 0$ и перейдя к пределу при $\rho \rightarrow 0$

$$R_{\sigma}(0,0) = \frac{\alpha}{2\beta(1+\alpha^2)} \left(\frac{V_c}{c_l}\right)^2 \int_0^{\infty} S_{\omega}(\omega) d\omega$$

Полученные результаты допускают простую физическую интерпретацию. Слой упругой среды, расположенный над приемником, служит дополнительным фильтром, пропускающим лишь те компоненты внешнего случайного поля давлений, для которых выполняется соотношение: $\omega > k_0 c_l$. Это приводит к дополнительному подавлению низкочастотных возмущений по сравнению с тем случаем, когда приемник непосредственно обтекается турбулентным потоком.

Поступила 20 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Теоретическая физика, т. 7, М., «Наука», 1965.
2. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
3. Курьянов Б. Ф. Пространственная корреляция полей, излученных случайными источниками на плоскости. Акуст. ж., 1963, т. 9, вып. 4.
4. Corcos G. M. The structure of the turbulent pressure field in boundary flows. J. Fluid. Mech., 1964, vol. 18, No. 2.
5. Петровский В. С. Гидродинамические проблемы турбулентного шума. Л., «Судостроение», 1966.