

Явное выражение для тензора $G_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0)$ в координатном представлении сложно и громоздко, все его составляющие имеют структуру вида

$$(8) \quad G_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) = \frac{\theta(t - t_0)}{\sqrt{(4\pi\nu(t - t_0))^3(1 + \tau^2/12)}} \times \\ \times M_{ab}(\mathbf{r} | \boldsymbol{\alpha}, \tau) \exp \left\{ -\frac{1}{4\nu(t - t_0)} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{x - x_0 - u(t - t_0) - \frac{1}{2}\tau(y - y_0)}{\sqrt{1 + \tau^2/12}} \right)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \right\}$$

где $M_{ab}(\mathbf{r} | \boldsymbol{\alpha}, \tau)$ — линейные операторы, действующие на функции от пространственных координат \mathbf{r} и как от параметров зависящие от единичного вектора $\boldsymbol{\alpha}$ и от времени через безразмерную комбинацию $\tau = \Gamma(t - t_0)$. Из (8) видны снос возмущений и их деформация с течением времени.

Вследствие положительной определенности квадратичной формы $Q(\mathbf{k}, t)$ согласно (4) и свойства $\nu > 0$, из (7) для всех составляющих $G_{ab}(\mathbf{k}, t - t_0)$ следует $G_{ab}(\mathbf{k}, t - t_0) \rightarrow 0$ при $t - t_0 \rightarrow \infty$ для любых u и Γ . Таким же свойством обладают составляющие $G_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0)$ согласно (8). Таким образом, получается известный результат об устойчивости по отношению к произвольным малым возмущениям куэттовского течения (1) в неограниченном пространстве при любых u и Γ .

Аналогично можно исследовать поведение малых возмущений в случае более сложных течений несжимаемой вязкой жидкости в неограниченном пространстве. Например, для течения

$$u_x = \Gamma y, \quad u_y = -\Gamma x, \quad u_z = 0$$

соответствующего равномерному вращению жидкости как целого вокруг оси Oz с угловой скоростью Γ , эволюция возмущений описывается формулами

$$(9) \quad \mathbf{v}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{k}, t) \exp(-\nu k^2 t), \quad p(\mathbf{k}, t) = 2i\rho \Gamma (k_x v_y - k_y v_x) / k^2$$

Выражения для $\mathbf{f}(\mathbf{k}, t)$ довольно громоздки и здесь не приводятся, отметим только что при больших t поведение $\mathbf{v}(\mathbf{k}, t)$ определяется вторым множителем в первой формуле (9), т. е. возмущения затухают со временем, и следовательно, равномерное вращение вязкой несжимаемой жидкости устойчиво по отношению к этим возмущениям.

Поступила 1 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosen G. General solution for perturbed plane Couette flow. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 12.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 532.516

ОБТЕКАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В ПЕРЕХОДНОЙ ОБЛАСТИ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

В. Я. Ривкинд, Г. М. Рыскин, Г. А. Фишбейн

(Ленинград)

С помощью конечно-разностного метода получено решение уравнений Навье — Стокса для течений жидкости внутри и вне капли с условиями согласования на границе раздела сред.

В рассматриваемой области чисел Рейнольдса ($0.5 \leq \text{Re} \leq 100$) рассчитаны коэффициенты сопротивления для твердой сферы, капли и газового пузырька. Приведены распределения вихря и скорости на границе капли.

Течение вокруг твердой сферы в переходной области чисел Рейнольдса в настоящее время хорошо изучено [1]. Для задачи обтекания сферической капли известны решения при $Re \ll 1$ [2, 3]. Для малых Re в [4] методом сращивания асимптотических разложений получено решение с учетом инерционных членов в уравнениях Навье — Стокса. При $Re \gg 1$ в [5-7] построены решения в приближении пограничного слоя (подробный анализ приближенных решений при малых и больших значениях Re приведен в обзоре [8]). Частный случай задачи о капле (капля воды в воздухе), для которого характерно большое отношение вязкостей внутренней и внешней сред ($\mu \approx 56$), рассмотрен с помощью конечно-разностного метода в [9] в переходной области чисел Рейнольдса. Показано, что при таком μ сопротивление, испытываемое каплей при движении, практически такое же, как и сопротивление твердой сферы.

Ниже исследуется обтекание капли при $0 \leq \mu < \infty$ и $Re \leq 100$.

Рассматривается равномерное и прямолинейное движение капли под действием однородного стационарного поля массовых сил. Полагается, что число Вебера достаточно мало, так что капля практически сохраняет сферическую форму.

В системе координат, связанной с каплей, движение, как и для твердой сферы [10], будет стационарным и осесимметричным вплоть до чисел $Re \approx 100$.

Если начало сферической системы координат поместить в центр капли, а полярную ось ($\theta = 0$) направить по потоку, то уравнения Навье — Стокса для течения жидкости внутри и вне капли и граничные условия на поверхности капли, записанные в переменных ψ (функция тока) и ζ (вихрь), имеют вид

$$(1) \quad \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\zeta_i}{r \sin \theta} \right) - \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\zeta_i}{r \sin \theta} \right) \right] \sin \theta = \frac{2}{Re_i} E^2 (\zeta_i r \sin \theta)$$

$$E^2 \psi_i + \zeta_i r \sin \theta = 0 \quad (i = 1, 2)$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad Re_i = \frac{2u_\infty a \rho_i}{\mu_i}$$

$$r = 1, \quad v_{r1} = v_{r2} = 0, \quad v_{\theta 1} = v_{\theta 2}, \quad \mu (\zeta_1 - 2v_{\theta 1}) = \zeta_2 - 2v_{\theta 2} \quad (\mu = \mu_1/\mu_2)$$

Здесь Re_i — число Рейнольдса; индекс $i = 1$ относится к внутренней области, $i = 2$ — к внешней; ρ_i — плотность; μ_i — динамическая вязкость. Масштабом для скорости является скорость вдали от капли u_∞ , для длины — радиус капли a .

Кроме выписанных выше условий непрерывности вектора скорости и тензора напряжений на поверхности капли, должны выполняться условия осевой симметрии и невозмущенности потока на бесконечности.

Для решения задачи во внешней области вводится новая неизвестная ψ_2^* , связанная с ψ_2 соотношением $\psi_2 = 1/2 r^2 \sin \theta + \psi_2^*$, и внешняя область посредством преобразования $r = 1/\eta$ преобразуется в полукруг.

Используется метод переменных направлений. Первые производные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности как при постоянном, так и при переменном шаге сетки. В отличие от [11] в данной работе удовлетворение разностного аналога условий сопряжения, представленных последними двумя равенствами (1), осуществляется следующим образом. На каждом n -м слое новые значения ζ_1^n и ζ_2^n в определенной точке границы находятся по значениям ζ_1^{n-1} , ζ_2^{n-1} , $v_{\theta 1}^{n-1}$ и $v_{\theta 2}^{n-1}$ в той же точке с предыдущего слоя из формул:

при $\mu \leq 1$

$$\zeta_1^n = \zeta_1^{n-1} + \beta (v_{\theta 2}^{n-1} - v_{\theta 1}^{n-1})$$

$$\zeta_2^n = \mu \zeta_1^n + (1 - \mu) (v_{\theta 1}^{n-1} + v_{\theta 2}^{n-1})$$

при $\mu > 1$

$$\zeta_2^n = \zeta_2^{n-1} + \beta (v_{\theta 2}^{n-1} - v_{\theta 1}^{n-1})$$

$$\zeta_1^n = \frac{\zeta_2^n}{\eta} + \frac{\mu - 1}{\mu} (v_{\theta 1}^{n-1} + v_{\theta 2}^{n-1})$$

Здесь β — параметр, выбираемый из условия лучшей сходимости ($0.1 \lesssim \beta \lesssim 1$).

Такой метод аппроксимации граничных условий является распространением на случай границы жидкость — жидкость известного метода А. А. Дородницына [12] (для границы твердое тело — жидкость) и переходит в него при $\mu \rightarrow \infty$.

Расчет одного варианта при сетке 20×20 в каждой из двух областей требует 5—10 минут на БЭСМ-6.

Определяющими параметрами задачи являются Re_2 , μ_1 / μ_2 и ρ_1 / ρ_2 . Последний параметр входит в систему уравнений задачи через $Re_1 = (\rho_1 / \rho_2) (\mu_2 / \mu_1) Re_2$. Влияние числа Re_1 на течение исследовалось специально. Как известно, при $Re_2 \ll 1$ внутреннее течение описывается вихрем Хилла [10]. Вихрь Хилла обращает в нуль отдельно конвективные и вязкие члены и, следовательно, является точным решением уравнений Навье — Стокса, независимым от числа Re . Таким образом, при малых Re_2 влияние Re_1 на поток отсутствует. При $1 < Re_2 < 100$, как показывают расчеты, для фиксированных значений μ и Re_2 изменение Re_1 в диапазоне $1 < Re_1 < 100$ практически не оказывает влияния на характеристики потока (приводит к изменению коэффициента сопротивления на величину порядка 1%). Для определенности в расчетах принималось $Re_1 = Re_2$.

В таблице приведены значения коэффициента сопротивления для твердого шарика ($\mu = \infty$), газового пузырька ($\mu = 0$) и капли ($\mu = 0.333, 1, 3$).

Значения коэффициента сопротивления для твердой сферы отличаются не более чем на 1% от рассчитанных в работе [1], в которой при сопоставлении с экспериментальными данными наблюдалось хорошее соответствие (в [1] использовалась сетка 100×60).

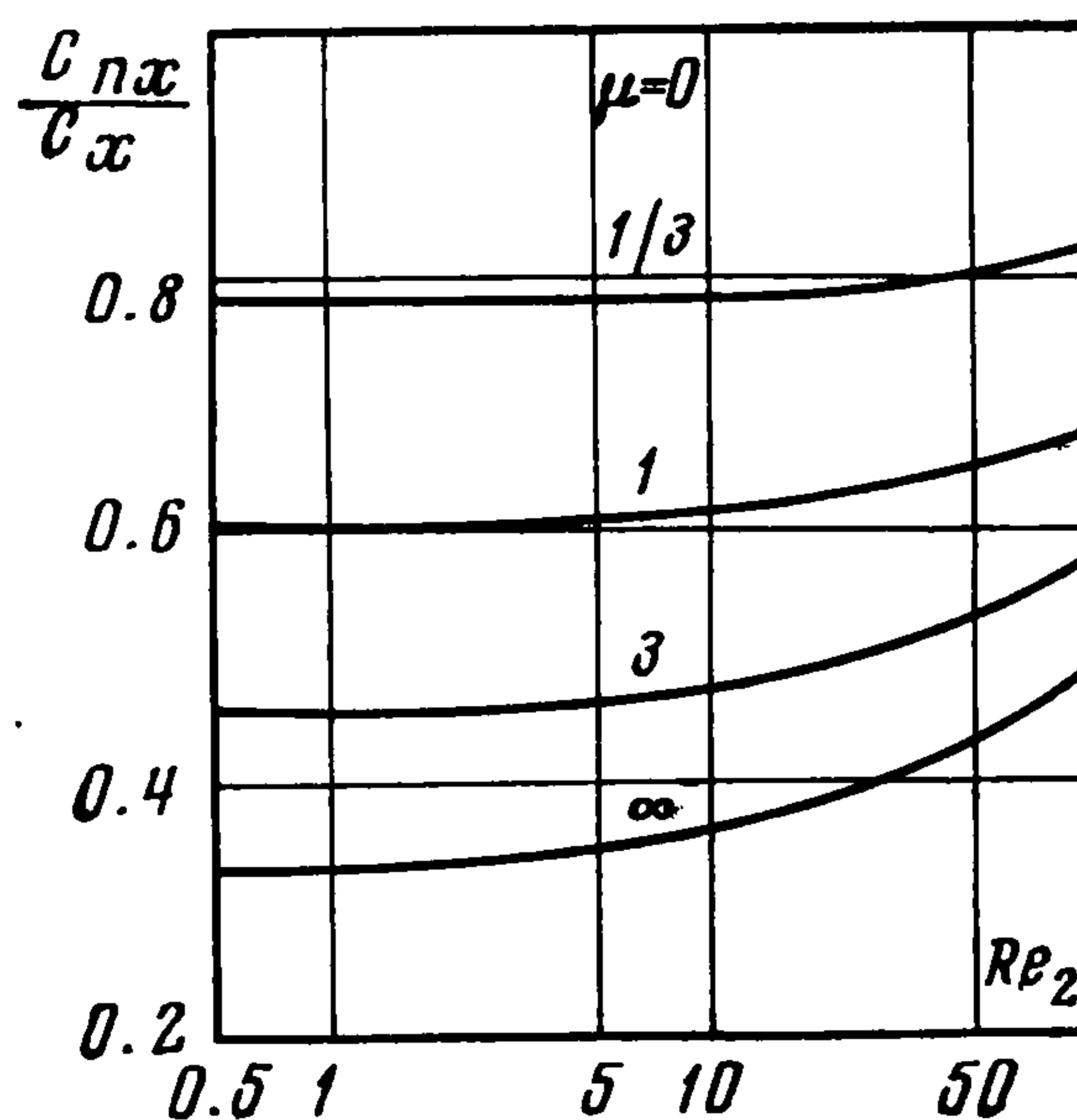
$\mu \backslash Re_2$	0.5	1	2	5	10	20	50	100
0	33.8	17.5	9.3	4.25	2.43	1.44	0.69	0.40
0.333	38.3	19.9	10.6	4.89	2.87	1.71	0.89	0.55
1	42.9	22.4	12.1	5.65	3.33	2.05	1.12	0.74
3	47.4	24.8	13.4	6.36	3.80	2.38	1.36	0.96
∞	52.2	27.4	14.7	7.05	4.28	2.71	1.58	1.11

При $Re_2 \ll 1$ отношение коэффициентов сопротивления газового пузырька и твердой сферы равно $2/3$. С ростом числа Re_2 , как видно из таблицы, это отношение уменьшается, достигая при $Re_2 = 100$ значения 0.366. Можно предположить, что характер зависимости коэффициента сопротивления от отношения вязкостей сохраняется и при $Re_2 > 1$. Тогда по аналогии со случаем $Re_2 \ll 1$ коэффициент сопротивления для капли может быть выражен через коэффициент сопротивления твердого шарика ($C_{x\infty}$) и газового пузырька (C_{x0}) при том же Re_2 формулой

$$C_x \approx \frac{\mu C_{x\infty} + C_{x0}}{\mu + 1}$$

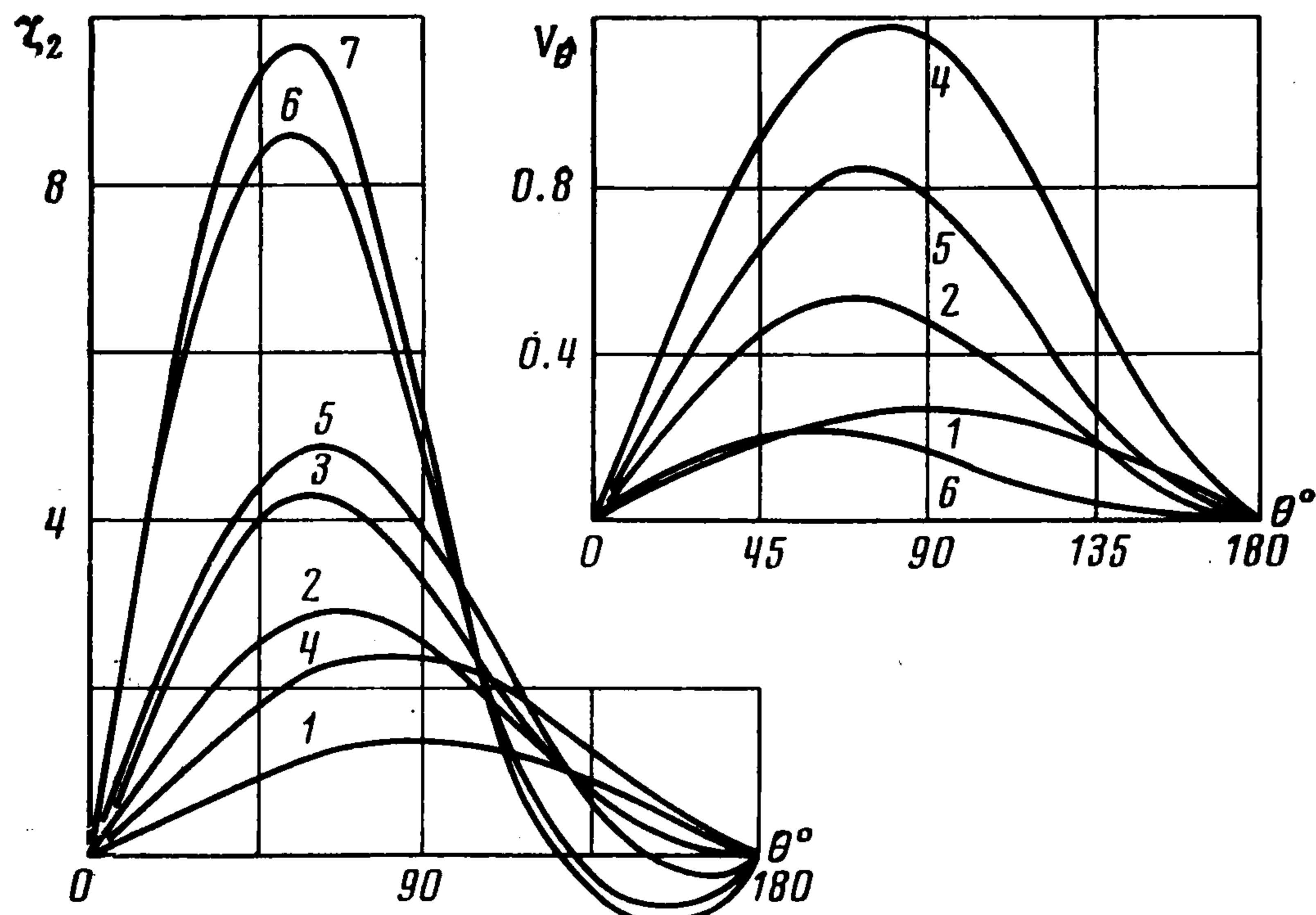
Эта формула дает значения коэффициентов сопротивления, совпадающие с рассчитанными (см. таблицу) с погрешностью не выше 5%, и может быть полезна для практических расчетов.

На фиг. 1 представлено отношение коэффициента формы к полному коэффициенту сопротивления (C_{nx} / C_x), т. е. вклад нормальной составляющей напряжения в общее сопротивление, в зависимости от числа Re_2 .

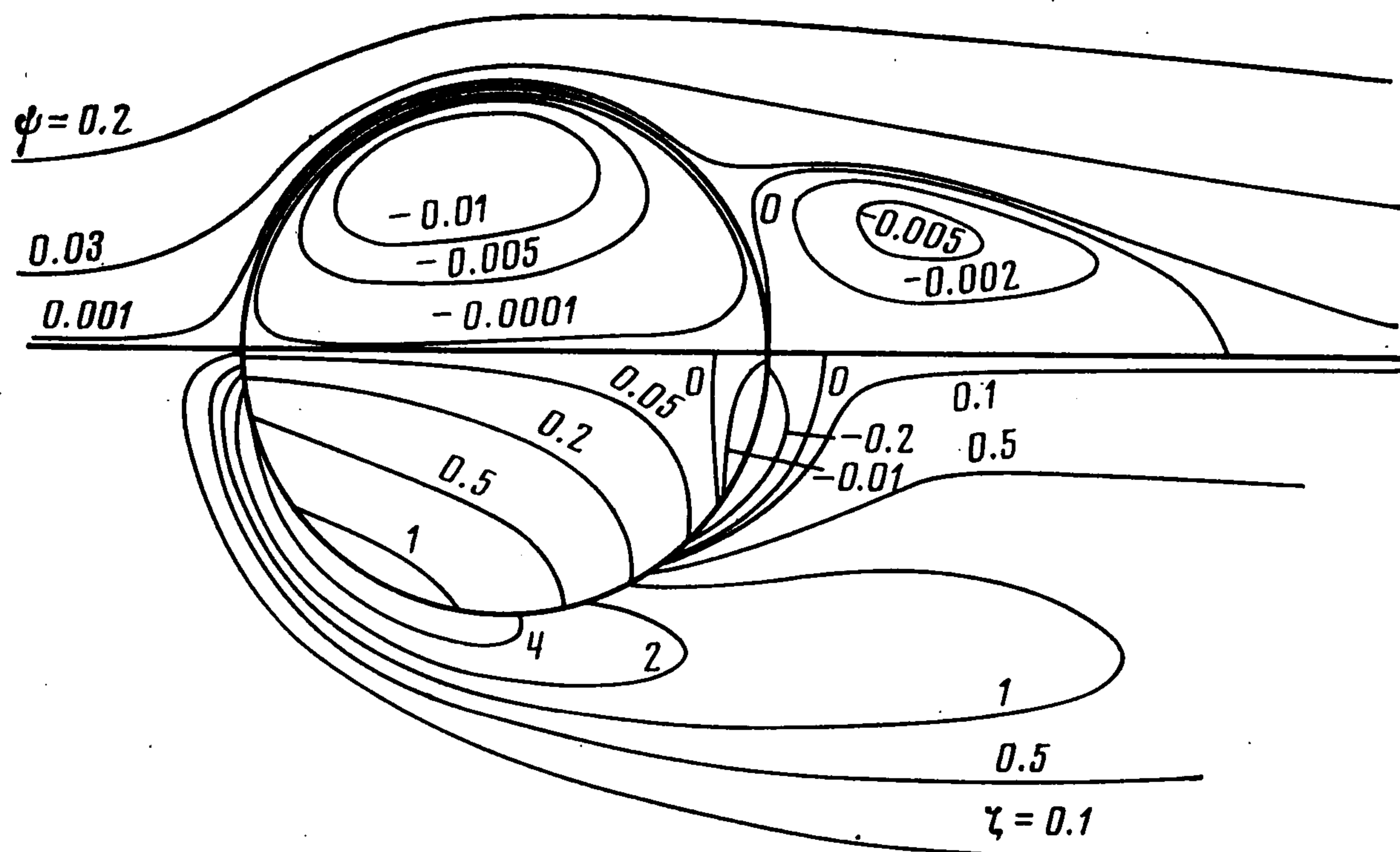


Фиг. 1

Уменьшение μ приводит к большей подвижности границы и более интенсивной циркуляции жидкости внутри капли. В связи с этим доля касательного напряжения падает и отношение C_{nx} / C_x растет, достигая при $\mu = 0$ максимального значения (касательное напряжение на поверхности пузырька равно нулю и полный коэффициент сопротивления равен коэффициенту формы).



Фиг. 2



Фиг. 3

Для плохообтекаемых тел (твердая сфера, цилиндр) с увеличением Re отношение C_{nx} / C_x возрастает, что связано с возникновением застойной зоны и затем отрыва потока. С уменьшением μ этот рост становится менее выраженным, так как развитие застойной зоны и зоны отрыва замедляется.

На фиг. 2 приведены распределения вихря и скорости на поверхности сферы для различных значений Re_2 и μ (угол θ отсчитывается от лобовой критической точки). Кривые 1 построены для $Re_2 = 0.5$ и $\mu = 1$; кривые 2 и 3 — для $Re_2 = 20$, $\mu = 1$ и ∞ ; кривые 4, 5, 6 и 7 — для $Re_2 = 100$, $\mu = 0, 1, 10$ и ∞ соответственно.

При изменении μ от ∞ до 0 (переход от твердого шарика через каплю к газовому пузырьку) для фиксированного Re_2 наблюдается уменьшение вихря и одновременное возрастание скорости на поверхности, причем с ростом Re_2 диапазон изменения этих величин становится шире. В то же время такое изменение приводит к уменьшению касательного напряжения на поверхности сферы, которое может быть выражено через вихрь и скорость по формуле

$$\tau_{r\theta} = \frac{4}{Re_2} (\zeta_2 - 2v_\theta)_{r=1}$$

С увеличением Re_2 и μ становится более выраженной асимметрия распределения касательных сил по поверхности сферы. Несмотря на это, картина линий тока внутри капли (см. фиг. 3) даже при относительно больших Re_2 и μ мало отличается от течения, соответствующего вихрю Хилла, тогда как распределение вихревой напряженности отличается весьма значительно (для вихря Хилла линии $\zeta = \text{const}$ прямые, параллельные полярной оси).

На фиг. 3 приведены линии тока и распределение вихря (линии $\zeta = \text{const}$) для $Re_2 = 100$ и $\mu = 10$ (этот вариант рассчитан с сеткой 40×40 в каждой из областей). В связи с ненулевой скоростью на границе раздела двух жидкостей точка отделения нулевой линии тока определяется обращением в нуль скорости, а не касательного напряжения, как в случае обтекания твердого тела. Эта точка не определяет величины зоны возвратного течения. Размер этой зоны может быть охарактеризован углом наибольшего распространения присоединенного вихря вверх по потоку (угол между касательной, проведенной к нулевой линии тока из начала координат, и полярной осью).

Поступила 16 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Le Clair B. P., Hamielec A. E., Pruppacher H. R.* A numerical study of the drag on a sphere at low and intermediate Reynolds numbers. *J. Atmos. Sci.*, 1970, vol. 27, No. 2.
2. *Hadamard J.* Mouvement permanent lent d'une Sphère liquide et visqueuse dans une liquide visqueux. *Compt. rend. Acad. Sci.*, 1911, vol. 152, No. 25, p. 1738.
3. *Rybczyński W.* Über die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovia, Cl. sci. math. et natur. Ser. A.* 1911, N 1, p. 40—46.
4. *Taylor T. D., Acrivos A.* On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. *J. Fluid. Mech.*, 1964, vol. 18, pt. 3.
5. *Chao B. T.* Motion of spherical gas bubbles in a viscous liquid at large Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 1962, vol. 5, No. 1.
6. *Moore D. W.* The boundary layer on a spherical gas bubble. *J. Fluid. Mech.*, 1963, vol. 16, pt. 2.
7. *Harper J. F., Moore D. W.* The motion of a spherical liquid drop at high Reynolds number. *J. Fluid. Mech.*, 1968, vol. 32, pt. 2.
8. *Harper J. F.* The motion of bubbles and drops through liquids. In: *Advances in Applied Mechanics*. New York — London, Acad. Press, 1972, vol. 12, p. 59.
9. *Le Clair B. P., Hamielec A. E., Pruppacher H. R., Hall W. D.* A theoretical and experimental study of the internal circulation in water drops falling at terminal velocity in air. *J. Atmos. Sci.*, 1972, vol. 29, No. 4.
10. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
11. *Ривкинд В. Я., Рыскин Г. М., Фишбейн Г. А.* Движение сферической капли в потоке вязкой жидкости. *Инж.-физ. ж.*, 1971, т. 20 ; № 6.
12. *Дородницын А. А., Меллер Н. А.* О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье — Стокса. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1968, т. 8, № 2.