Следовательно

(3.1) $$\langle \sin m \rangle = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \sin\left(m^\circ - \frac{s}{6}\right)$$
$$\langle \cos m \rangle = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \cos\left(m^\circ - \frac{s}{6}\right)$$

и в качестве искомых функций надо взять

(3.2) $$a_s = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \sin\left(m + \frac{s}{6}\right), \quad a_c = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \cos\left(m + \frac{s}{6}\right)$$

Если ошибки измерения углов независимы, то

$$\sigma^2 = \sum_{i=4}^{p} \sigma_i^2, \quad s = \sum_{i=1}^{p} a_i s_i \quad (s_i \stackrel{\Delta}{=} s_{iii})$$

и каждый элемент матрицы несмещенного перехода отличается от соответствующего направляющего косинуса наличием множителей вида exp $(\sigma^2 / 2)$ и добавкой к аргументам функций синус и косинус слагаемых вида $s / 6$.

Пример 2. Пусть опять

$$P_{11} = \cos\psi^\circ \cos\nu^\circ = {}^1/_2 \cos(\psi^\circ + \nu^\circ) + {}^1/_2 \cos(\psi^\circ - \nu^\circ)$$

По формулам (3.2) находим

$$a_{11}^{\pm} = \exp\left(\frac{\sigma_{\psi\psi} \pm 2\sigma_{\psi\nu} + \sigma_{\nu\nu}}{2}\right) \cos\left(\psi \pm \nu + \frac{s_{\psi\psi\psi} \pm s_{\psi\psi\nu} + s_{\psi\nu\nu} \pm s_{\nu\nu\nu}}{6}\right)$$

Как и в примере 1, $a_{11} = a^+_{11} + a^-_{11}$. При независимых ошибках измерения ψ и ν имеем $s_{\psi\psi\nu} = s_{\psi\nu\nu} = 0$ и выражение для a_{11} существенно упрощается

$$a_{11} = \exp\left(\frac{\sigma_\psi^2 + \sigma_\nu^2}{2}\right) \cos\left(\psi + \frac{s_\psi}{6}\right) \cos\left(\nu + \frac{s_\nu}{6}\right)$$

Поступила 29 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1969.
2. *Широков Л. Е.* Применение теории условных марковских процессов к решению одного класса задач фильтрации. Автоматика и телемеханика, 1968, № 12.

УДК 532.516

ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОСКОГО НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

В. П. Лесников, И. З. Фишер

(Одесса)

Получены формулы для эволюции малых трехмерных возмущений, произвольно заданных в начальный момент времени, плоского куэттовского течения несжимаемой вязкой жидкости в неограниченном пространстве.

Поведение малых трехмерных возмущений поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и давления $p(\mathbf{r}, t)$ в неограниченной несжимаемой вязкой жидкости на фоне плоского течения Куэтта

(1) $$u_x = u + \Gamma y, \quad u_y = u_z = 0, \quad P = \text{const}$$

где u и Γ — постоянные, впервые обсуждалось в работе [1]. Там же было получено выражение для одной из составляющих возмущения скорости для некоторого специального вида начальных условий. Ниже будут найдены формулы, описывающие эволюцию возмущений при произвольных начальных условиях $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ и $p(\mathbf{r})$.

Исходим из линеаризованных уравнений Навье — Стокса [2] ($\mathbf{x}^\circ$ — орт оси Ox)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (u + \Gamma y)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{x}^\circ \Gamma v_y + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

Перейдем к Фурье-представлению по пространственным переменным. В соответствующих Фурье-образах будем писать $\mathbf{k}$ вместо $\mathbf{r}$. С помощью (2) для $\mathbf{v}(\mathbf{k}, t)$ и $p(\mathbf{k}, t)$ получим

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{k}, t)\exp[-ituk_x - \nu t Q(\mathbf{k}, t)] \tag{3}$$

$$p(\mathbf{k}, t) = \frac{k^{*4}}{k^4}\, p(\mathbf{k}^*)\exp[-ituk_x - \nu t Q(\mathbf{k}, t)]$$

$$Q(\mathbf{k}, t) = (1 + \Gamma^2 t^2/3)k_x^2 + \Gamma t k_x k_y + k_y^2 + k_z^2 \tag{4}$$

$$\mathbf{k}^* = (k_x^*, k_y^*, k_z^*) = (k_x, k_y + \Gamma k_x t, k_z) \tag{5}$$

$$f_x(\mathbf{k}, t) = v_x(\mathbf{k}^*) + \frac{k_x}{k_x^2 + k_z^2}\left(k_y^* - k_y\frac{k^{*2}}{k^2}\right)v_y(\mathbf{k}^*) + \tag{6}$$

$$+\frac{k_z^2 k^{*2}}{k_x(k_x^2 + k_z^2)^{3/2}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{k_y^*}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}\right)\right]v_y(\mathbf{k}^*)$$

$$f_y(\mathbf{k}, t) = \frac{k^{*2}}{k^2}v_y(\mathbf{k}^*)$$

$$f_z(\mathbf{k}, t) = v_z(\mathbf{k}^*) + \frac{k_z k^{*2}}{k_x^2 + k_z^2}\left\{\frac{k_y^*}{k^{*2}} - \frac{k_y}{k^2} + \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{k_y^*}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}\right)\right]\right\}v_y(\mathbf{k}^*)$$

Положим в уравнениях (2)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}(\alpha\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)), \quad \alpha^2 = 1$$

где α — некоторый постоянный единичный вектор и $\delta(\mathbf{r})$ — трехмерная функция Дирака, и заменим везде начальный момент $t = 0$ на $t = t_0$. Такие начальные условия приводят к Фурье-представлению тензора функций Грина $G_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0)$ рассматриваемой задачи, соответствующему распространению возмущений от мгновенного точечного источника в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ в момент $t = t_0$. Этот тензор имеет структуру

$$G_{ab}(\mathbf{k}, t - t_0) = i\theta(t - t_0)\begin{Vmatrix} g_{xx} & g_{xy} & 0 \\ 0 & g_{yy} & 0 \\ 0 & g_{zy} & g_{zz}\end{Vmatrix}\times \tag{7}$$

$$\times\exp[-i\mathbf{k}^*(\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(t - t_0)) - \nu(t - t_0)Q(\mathbf{k}, t - t_0)]$$

где $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$, $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Диагональные элементы тензора $g_{ab}(\mathbf{k}, t - t_0)$ равны

$$g_{xx} = [\mathbf{k}^*\alpha]_x, \quad g_{yy} = [\mathbf{k}^*\alpha]_y\frac{k^{*2}}{k^2}, \quad g_{zz} = [\mathbf{k}^*\alpha]_z$$

$$\mathbf{k}^* = (k_x, k_y + \Gamma(t - t_0)k_x, k_z)$$

Для g_{xy} и g_{zy} с помощью (6) легко выписать аналогичные, но более громоздкие выражения.

Явное выражение для тензора $G_{ab}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ t-t_0)$ в координатном представлении сложно и громоздко, все его составляющие имеют структуру вида

$$G_{ab}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ t-t_0)=\frac{\theta(t-t_0)}{\sqrt{(4\pi\nu(t-t_0))^3(1+\tau^2/12)}}\times \tag{8}$$
$$\times M_{ab}(\mathbf{r}\,|\,\boldsymbol{\alpha},\tau)\exp\left\{-\frac{1}{4\nu(t-t_0)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{x-x_0-u(t-t_0)-{}^1\!/_2\tau(y-y_0)}{\sqrt{1+\tau^2/12}}\right)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\right\}$$

где $M_{ab}(\mathbf{r}|'\boldsymbol{\alpha},\ \tau)$ — линейные операторы, действующие на функции от пространственных координат $\mathbf{r}$ и как от параметров зависящие от единичного вектора $\boldsymbol{\alpha}$ и от времени через безразмерную комбинацию $\tau=\Gamma(t-t_0)$. Из (8) видны снос возмущений и их деформация с течением времени.

Вследствие положительной определенности квадратичной формы $Q(\mathbf{k},\ t)$ согласно (4) и свойства $\nu>0$, из (7) для всех составляющих $G_{ab}(\mathbf{k},\ t-t_0)$ следует $|G_{ab}(\mathbf{k},\ t-t_0)|\to 0$ при $t-t_0\to\infty$ для любых u и Γ. Таким же свойством обладают составляющие $G_{ab}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ t-t_0)$ согласно (8). Таким образом, получается известный результат об устойчивости по отношению к произвольным малым возмущениям куэттовского течения (1) в неограниченном пространстве при любых u и Γ.

Аналогично можно исследовать поведение малых возмущений в случае более сложных течений несжимаемой вязкой жидкости в неограниченном пространстве. Например, для течения

$$u_x=\Gamma y,\quad u_y=-\Gamma x,\quad u_z=0$$

соответствующего равномерному вращению жидкости как целого вокруг оси Oz с угловой скоростью Γ, эволюция возмущений описывается формулами

$$\mathbf{v}(\mathbf{k},t)=\mathbf{f}(\mathbf{k},t)\exp(-\nu k^2 t),\ p(\mathbf{k},\ t)=2i\rho\,\Gamma(k_x v_y-k_y v_x)/k^2 \tag{9}$$

Выражения для $\mathbf{f}(\mathbf{k},\ t)$ довольно громоздки и здесь не приводятся, отметим только что при больших t поведение $\mathbf{v}(\mathbf{k},\ t)$ определяется вторым множителем в первой формуле (9), т. е. возмущения затухают со временем, и следовательно, равномерное вращение вязкой несжимаемой жидкости устойчиво по отношению к этим возмущениям.

Поступила 1 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosen G.* General solution for pertubed plane Couette flow. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 12.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 532.516

ОБТЕКАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В ПЕРЕХОДНОЙ ОБЛАСТИ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

В. Я. Ривкинд, Г. М. Рыскин, Г. А. Фишбейн

(Ленинград)

С помощью конечно-разностного метода получено решение уравнений Навье — Стокса для течений жидкости внутри и вне капли с условиями согласования на границе раздела сред.

В рассматриваемой области чисел Рейнольдса ($0.5\leqslant \mathrm{Re}\leqslant 100$) рассчитаны коэффициенты сопротивления для твердой сферы, капли и газового пузырька. Приведены распределения вихря и скорости на границе капли.