УДК 62—50

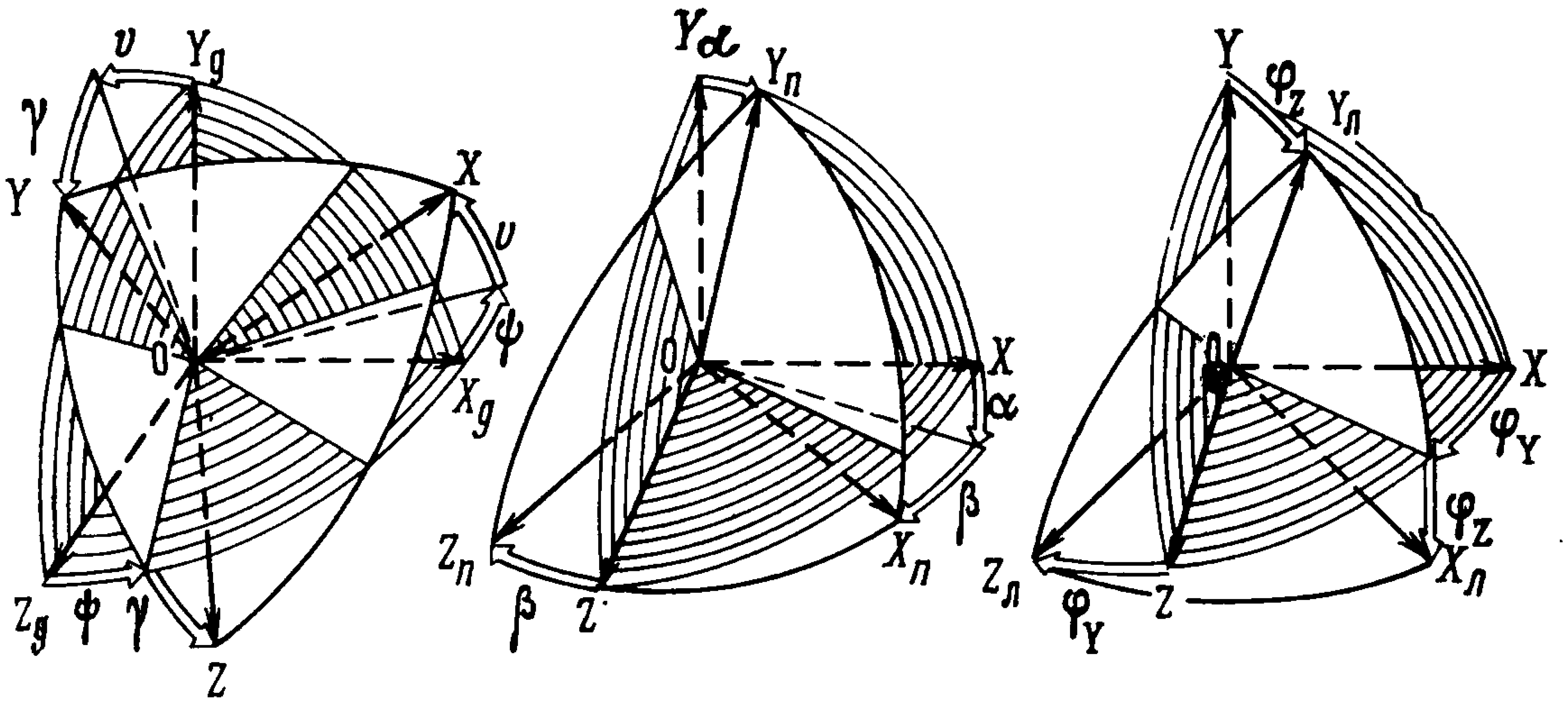
НЕСМЕЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Л. Е. Широков

(Москва)

Получены формулы несмещенного перехода от одной системы координат к другой, когда углы, определяющие взаимное положение систем координат, измеряются с ошибками. Рассмотрены случаи симметричного и асимметричного распределения ошибок измерения.

Переход от одной системы координат к другой в траекторных задачах динамики полета осуществляется по известным формулам (например [1]), которые предполагают точное знание углов, определяющих взаимное положение систем координат. Ввиду того, что обычно эти углы измеряются с ошибками, то с ошибками производится и



преобразование координат, причем указанные формулы перехода дают смещение координат. Это смещение нежелательно по двум причинам: во-первых, оно приводит к систематическим ошибкам, весьма существенным при решении ряда задач (например навигационных), и, во-вторых, оно практически не фильтруется.

Однако возможно построение таких формул перехода, которые обеспечивают несмещенное преобразование координат.

В статье дан способ получения этих формул при симметричном и асимметричном распределении ошибок измерения углов, и в качестве примера вычислены матрицы несмещенного перехода для следующих пар систем координат (фигура): земная $OX_gY_gZ_g$ — связанная $OXYZ$, связанная $OXYZ$ — поточная $OX_пY_пZ_п$, связанная $OXYZ$ — лучевая $OX_лY_лZ_л$.

Суть способа состоит в предварительном вычислении величины смещения и на основании этого определение такой коррекции выражений для направляющих косинусов, чтобы смещение стало равным нулю.

1. Несмещенное преобразование координат при симметричном распределении ошибок измерения углов. Прежде всего заметим, что направляющие косинусы для перехода от одной системы координат к другой являются многочленами $P_{\mu\nu}$ (μ, $\nu = 1, 2, 3$) некоторой степени n ($n \geqslant 1$) от функций синус и косинус углов φ_i° ($i = 1, \ldots, p$), определяющих взаимное положение систем координат

$$P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}(\sin\varphi_1^\circ, \cos\varphi_1^\circ, \ldots, \sin\varphi_p^\circ, \cos\varphi_p^\circ)$$

Пусть углы φ_i° измеряются с ошибками ξ_i

$$\varphi_i = \varphi_i^\circ + \xi_i, \quad i = 1, \ldots, p$$

и распределение F_ξ вектора ошибок $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ симметричное (например нормальное) с параметрами $\langle\xi_i\rangle = 0$, $\langle\xi_i\xi_j\rangle = \sigma_{ij}$.

Задача состоит в том, чтобы найти такую функцию $a_{\mu\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ от измеренных значений φ_i углов $\varphi_i{}^\circ$, чтобы выполнялось условие несмещенности

$$\langle a_{\mu\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\rangle = P_{\mu\nu}$$

Используя тригонометрические формулы для суммы и разности функций, можно преобразовать многочлен $P_{\mu\nu}(\sin\varphi_1{}^\circ, \cos\varphi_1{}^\circ, \ldots, \sin\varphi_p{}^\circ, \cos\varphi_p{}^\circ)$ в однородный многочлен первой степени от функций синус и косинус линейно преобразованных аргументов.

Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий и постоянный множитель выносится за знак математического ожидания, поэтому достаточно получить решение задачи для двух элементарных многочленов: $P_s = \sin m^\circ$ и $P_c = \cos m^\circ$, где m° — некоторая линейная комбинация углов $m^\circ = a_1\varphi_1{}^\circ + \ldots + a_p\varphi_p{}^\circ$, $a_i = \pm 1$.

Вычислим $\langle \sin m\rangle$ и $\langle\cos m\rangle$, где $m = a_1\varphi_1 + \ldots + a_p\varphi_p$, в предположении, что семиинварианты распределения F_ξ выше второго порядка равны нулю (это предположение выполнено для нормального распределения).

Обозначим $\Delta = m - m^\circ$, имеем

$$\langle\sin m\rangle = \langle\sin(\Delta + m^\circ)\rangle = \cos m^\circ \langle\sin\Delta\rangle + \sin m^\circ\langle\cos\Delta\rangle$$

$$\langle\cos m\rangle = \langle\cos(\Delta + m^\circ)\rangle = \cos m^\circ\langle\cos\Delta\rangle - \sin m^\circ\langle\sin\Delta\rangle$$

Вычислим $\langle\sin\Delta\rangle$, $\langle\cos\Delta\rangle$ по методу, изложенному в приложении [2]

$$\langle\sin\Delta\rangle = \langle\Delta\rangle - \frac{1}{3!}\langle\Delta^3\rangle + \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\langle\Delta^{2n+1}\rangle + \ldots = 0$$

$$\langle\cos\Delta\rangle = 1 - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 - \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^n + \ldots =$$
$$= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\sigma^2 = \langle\Delta^2\rangle = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j \sigma_{ij}$$

Следовательно

$$\langle\sin m\rangle = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sin m^\circ, \quad \langle\cos m\rangle = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cos m^\circ \tag{1.1}$$

Отсюда видно, что в качестве искомых функций надо взять

$$a_s = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\sin m, \quad a_c = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\cos m \tag{1.2}$$

Действительно, используя (1.1), находим

$$\left\langle \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\sin m\right\rangle = \sin m^\circ, \quad \left\langle\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\cos m\right\rangle = \cos m^\circ$$

Если ошибки измерения углов независимы, то $\sigma^2 = \sigma^2{}_1 + \ldots + \sigma_p{}^2$ $(\sigma_i{}^2 \overset{\Delta}{=} \sigma_{ii})$ и возможно обратное преобразование полученных выражений. В результате находим, что каждый элемент матрицы несмещенного перехода отличается от соответствующего направляющего косинуса наличием множителей вида $\exp(\sigma^2/2)$.

Пример 1. Найдем элемент a_{11} матрицы несмещенного перехода от связанной системы координат к земной.

Направляющий косинус

$$P_{11} = \cos\psi\cos\nu = {}^1/_2\cos(\psi+\nu) + {}^1/_2\cos(\psi-\nu)$$

Далее, по формулам (1.2)

$$a_{11}^{\pm} = \exp\left(\frac{\sigma_{\psi\psi} \pm 2\sigma_{\psi\nu} + \sigma_{\nu\nu}}{2}\right)\cos(\psi\pm\nu)$$

Следовательно

$$a_{11} = a_{11}^{+} + a_{11}^{-} = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\sigma_{\psi\psi} + 2\sigma_{\psi\nu} + \sigma_{\nu\nu}}{2}\right)\cos(\psi + \nu) +$$

$$+ \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\sigma_{\psi\psi} - 2\sigma_{\psi\nu} + \sigma_{\nu\nu}}{2}\right)\cos(\psi - \nu)$$

Если ошибки измерения ψ и ν независимы, то $\sigma_{\psi\nu} = 0$ и

$$a_{11} = \exp\left(\frac{\sigma_\psi^2 + \sigma_\nu^2}{2}\right)\cos\psi\cos\nu$$

Аналогичным образом были вычислены элементы матриц несмещенного перехода для указанных во введении систем координат:

земная $OX_gY_gZ_g$ — связанная $OXYZ$

$$\left\| \begin{matrix} c_\psi c_\nu \cos\psi\cos\nu & (-c_\nu\cos\psi\sin\nu\cos\gamma + \sin\psi\sin\gamma)\, c_\psi c_\gamma & (c_\nu\cos\psi\sin\nu\sin\gamma + \sin\psi \times \\ & & \times\cos\gamma)\, c_\psi c_\gamma \\ c_\nu \sin\nu & c_\nu c_\gamma\cos\nu\cos\gamma & -c_\nu c_\gamma\cos\nu\sin\gamma \\ -c_\psi c_\nu\sin\psi\cos\nu & (c_\nu\sin\psi\sin\nu\cos\gamma + \cos\psi\sin\gamma)\, c_\psi c_\gamma & (-c_\nu\sin\psi\sin\nu\sin\gamma + \\ & & +\cos\psi\cos\gamma)\, c_\psi c_\gamma \end{matrix} \right\|$$

связанная $OXYZ$ — поточная $OX_пY_пZ_п$

$$\left\| \begin{matrix} c_\alpha c_\beta\cos\alpha\cos\beta & c_\alpha\sin\alpha & -c_\alpha c_\beta\cos\alpha\sin\beta \\ -c_\alpha c_\beta\sin\alpha\cos\beta & c_\alpha\cos\alpha & c_\alpha c_\beta\sin\alpha\sin\beta \\ c_\beta\sin\beta & 0 & c_\beta\cos\beta \end{matrix} \right\|$$

связанная $OXYZ$ — лучевая $OX_лY_лZ_л$

$$\left\| \begin{matrix} c_y c_z\cos\varphi_y\cos\varphi_z & c_y c_z\cos\varphi_y\sin\varphi_z & -c_y\sin\varphi_y \\ -c_z\sin\varphi_z & c_z\cos\varphi_z & 0 \\ c_y c_z\sin\varphi_y\cos\varphi_z & c_y c_z\sin\varphi_y\sin\varphi_z & c_y\cos\varphi_y \end{matrix} \right\|$$

Здесь

$$c_\lambda = \exp\frac{\sigma_\lambda^2}{2} \quad (\lambda = \psi, \nu, \gamma, \alpha, \beta), \qquad c_y = \exp\frac{\sigma_{\varphi_y}^2}{2}, \qquad c_z = \exp\frac{\sigma_{\varphi_z}^2}{2}$$

3. Несмещенное преобразование координат при асимметричном распределении ошибок измерения углов. Пусть распределение F_ξ вектора ошибок $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ — асимметричное с параметрами $\langle\xi_i\rangle = 0$, $\langle\xi_i\xi_j\rangle = \sigma_{ij}$, $\langle\xi_i\xi_j\xi_k\rangle = S_{ijk}$. В остальном постановка задачи остается прежней.

Решение отличается только тем, что теперь математические ожидания $\langle\sin\Delta\rangle$ и $\langle\cos\Delta\rangle$ вычисляются в предположении, что семиинварианты распределения F_ξ выше третьего порядка равны нулю

$$\langle\sin\Delta\rangle = 0 - \frac{s}{3!} + \frac{s}{3!}\frac{\sigma^2}{2} - \ldots + (-1)^n\frac{s}{3!}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{3!}\left(\frac{s}{3!}\right)^3 - \frac{1}{3!}\left(\frac{s}{3!}\right)^3\frac{\sigma^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{3!}\left(\frac{s}{3!}\right)^3\frac{1}{(n-4)!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{n-4} + \ldots$$

$$\ldots = -\frac{s}{3!}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{s}{3!}\right)^3\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) - \ldots =$$

$$= -\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sin\frac{s}{6}, \qquad s = \langle\Delta^3\rangle = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} a_i a_j a_k s_{ijk}$$

$$\langle\cos\Delta\rangle = 1 - \frac{\sigma^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^n + \ldots - \frac{1}{2!}\left(\frac{s}{3!}\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n\frac{1}{2!}\left(\frac{s}{3!}\right)^2\frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{n-3} + \ldots = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cos\frac{s}{6}$$

Следовательно

$$\langle \sin m\rangle = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sin\left(m^\circ - \frac{s}{6}\right) \tag{3.1}$$

$$\langle \cos m\rangle = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cos\left(m^\circ - \frac{s}{6}\right)$$

и в качестве искомых функций надо взять

$$a_s = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\sin\left(m + \frac{s}{6}\right), \quad a_c = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\cos\left(m + \frac{s}{6}\right) \tag{3.2}$$

Если ошибки измерения углов независимы, то

$$\sigma^2 = \sum_{i=4}^{p}\sigma_i^2, \quad s = \sum_{i=1}^{p} a_i s_i \quad (s_i \overset{\Delta}{=} s_{iii})$$

и каждый элемент матрицы несмещенного перехода отличается от соответствующего направляющего косинуса наличием множителей вида $\exp(\sigma^2/2)$ и добавкой к аргументам функций синус и косинус слагаемых вида $s/6$.

Пример 2. Пусть опять

$$P_{11} = \cos\psi^\circ \cos\nu^\circ = {}^1/_2 \cos(\psi^\circ + \nu^\circ) + {}^1/_2 \cos(\psi^\circ - \nu^\circ)$$

По формулам (3.2) находим

$$a_{11}^{\pm} = \exp\left(\frac{\sigma_{\psi\psi} \pm 2\sigma_{\psi\nu} + \sigma_{\nu\nu}}{2}\right)\cos\left(\psi \pm \nu + \frac{s_{\psi\psi\psi} \pm s_{\psi\psi\nu} + s_{\psi\nu\nu} \pm s_{\nu\nu\nu}}{6}\right)$$

Как и в примере 1, $a_{11} = a^{+}_{11} + a^{-}_{11}$. При независимых ошибках измерения ψ и ν имеем $s_{\psi\psi\nu} = s_{\psi\nu\nu} = 0$ и выражение для a_{11} существенно упрощается

$$a_{11} = \exp\left(\frac{\sigma_\psi^2 + \sigma_\nu^2}{2}\right)\cos\left(\psi + \frac{s_\psi}{6}\right)\cos\left(\nu + \frac{s_\nu}{6}\right)$$

Поступила 29 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1969.
2. *Широков Л. Е.* Применение теории условных марковских процессов к решению одного класса задач фильтрации. Автоматика и телемеханика, 1968, № 12.

УДК 532.516

ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОСКОГО НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

В. П. Лесников, И. З. Фишер

(Одесса)

Получены формулы для эволюции малых трехмерных возмущений, произвольно заданных в начальный момент времени, плоского куэттовского течения несжимаемой вязкой жидкости в неограниченном пространстве.

Поведение малых трехмерных возмущений поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и давления $p(\mathbf{r}, t)$ в неограниченной несжимаемой вязкой жидкости на фоне плоского течения Куэтта

$$u_x = u + \Gamma y, \quad u_y = u_z = 0, \quad P = \text{const} \tag{1}$$