Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.4

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КВАЗИИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СРЕД

Б. Н. Подболотов, В. С. Поленов, А. В. Чигарев

(Воронеж)

Рассматривается задача макроскопического описания динамики упругой композитной среды без использования предположений об однородности средних напряженно-деформированных состояний, величины флуктуаций и статистики параметров среды [1]. Операторные соотношения между средними полями напряжений и деформацией допускают применение алгебры операторов, хорошо развитой в теории ползучести [2]. Показано, что квазистатическая (матричная) часть упругих операторов, вычисляемая способом замены переменных, дает точные значения упругих модулей композита, причем получаемые уравнения аналогичны уравнениям самосогласованного поля [3–5]. Для конкретной корреляционной функции исследована взаимосвязь между средними размерами неоднородностей и длинами падающей и рассеянной волн.

Аналитические расчетные формулы для упругих модулей композитных сред на основе классических решений и метода самосогласованного поля были получены в работах [3–5]. Точные формулы для стохастической модели были впервые получены в работе [6] на основе сильно изотропной модели и на основе эквивалентного сингулярного приближения в [7]. Вывод точных формул требует в рассмотренных случаях однородности средних напряженно-деформированных состояний и суммирования бесконечных последовательностей ряда возмущений (в общем случае операторного).

Способ замены полевых переменных их поляризованными значениями оказывается эквивалентным частичному суммированию определенных типов фейнмановских диаграмм. Непосредственным расчетом на основе уравнений совместности устанавливается, что макроскопические модули, определяемые полученными уравнениями, являются точными. Для двухфазных композитов возможно непосредственное аналитическое сопоставление с формулами, приведенными в работах [7,8]; численные расчеты для некоторых поликристаллов кубической симметрии дают те же значения, что и формулы работы [6].

Нахождение дисперсионных соотношений для композитных сред в общем случае требует учета пространственной дисперсии, что эквивалентно точному вычислению собственных значений поляризационного и упругого операторов. Расчет одноточечных и двухточечных приближений по тензору поляризации приводит к суммированию последовательностей всех одноточечных и двухточечных моментов упругих параметров. Сведение вычислительной процедуры к интегралам Вебера — Шафхейтлина [9] не накладывает для выбранной корреляционной функции ограничений на диапазон длин волн, позволяя установить разрывный характер дисперсионных формул. Длинно- и коротковолновые асимптотики (пренебрежение пространственной дисперсией) получаем при использовании плосковолновой аппроксимации тензора Грина и учете первых приближений по параметру $ak \ll 1$ и $ak \gg 1$ соответственно.

1. Динамика композитной упругой неограниченной среды при гармонической зависимости полевых переменных от времени описывается уравнениями

$$(1.1)\qquad Lu = 0, \quad L = \partial\Lambda\partial + \rho_0\omega^2$$

где ω — частота, ρ_0 — плотность, Λ — тензор упругих модулей, зависящий случайным образом от пространственных координат.

Связь между напряжениями и деформациями определяется соотношением

$$(1.2)\qquad \sigma = \Lambda e, \quad e_{i,j} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i})$$

В общем случае связь между средними полями напряжений и деформаций запишем в операторном виде

$$(1.3)\qquad \langle\sigma\rangle = \langle\Lambda e\rangle = N^*\langle e\rangle = \int \Lambda^*(x - x_1)\langle e(x_1)\rangle\,dx_1$$

С учетом соотношений (1.1) — (1.3) получаем, что средние поля перемещений удовлетворяют уравнениям

$$(1.4)\qquad L^*\langle u\rangle = 0, \quad L^* = \partial N^*\partial + \rho_0\omega^2$$

Исследование условий существования средних полей в виде плоских волн e^{ikx} (или разложений по ним) приводит к рассмотрению соотношений

$$(1.5)\qquad \| k\,\Pi^*(\omega, k)\,k - \rho_0\omega^2 \| = 0$$

Здесь Π^* — собственные значения упругого оператора, знание которых позволяет найти скорости и коэффициенты затухания волн [10], причем в общем случае имеет место пространственная дисперсия, обусловленная неоднородностью среды. Процедура получения соотношений между средними напряжениями и деформациями обычно приводит к рядам по степеням тензора Λ. Вследствие этого ограничение рамками корреляционного приближения по Λ, вообще говоря, предполагает малость флуктуаций упругих параметров.

Введем в рассмотрение эквивалентное вспомогательное однородное тело с параметрами Λ_0, ρ_0, для которого уравнения движения имеют вид

$$L_0 u_0 = 0, \quad L_0 = \partial\Lambda_0\partial + \rho_0\,\omega^2$$

Упругие модули Λ_0 вспомогательного тела определим из условий, приведенных ниже.

Вычитая уравнения движения однородной среды из уравнений (1.1), получим

$$L_0 u' = \partial\Lambda'\partial u, \quad \Lambda' = \Lambda - \Lambda_0, \quad u' = u - u_0$$

Перейдем от дифференциального уравнения к эквивалентному интегральному

$$u = u_0 - \int G(x - x_1)\,\partial\Lambda'(x_1)\,\partial u(x_1)\,dx_1$$

Перебрасывая производную под знаком интеграла и дифференцируя обе части соотношения, получим интегральное уравнение относительно деформации

$$e = e_0 - \int G,_{xx}(x - x_1)\,\Lambda'(x_1)\,e(x_1)\,dx_1$$

Здесь $G_{,xx}$ — вторая производная динамического тензора Грина вспомогательной среды с параметрами Λ_0, ρ_0.

Представляя производную тензора Грина в виде суммы сингулярной и регулярной частей перейдем к поляризованным переменным [5,11] по формулам [12]

(1.6) $$E = Be, \quad \gamma = \Lambda' B^{-1}, \quad B = I + G^{(s)}\Lambda'$$

Здесь Λ_0 — тензор упругих модулей однородной вспомогательной среды, I — единичный тензор, $G^{(s)}$ — сингулярная часть второй производной динамического тензора Грина, γ — тензор поляризации.

Из уравнений (1.1) — (1.6) получим, что поляризованное поле деформаций удовлетворяет интегральному уравнению

(1.7) $$E = e_0 - \int G^{(R)}(x - x_1)\,\gamma(x_1)\,E(x_1)\,dx_1$$

где $G^{(R)}$ — регулярная часть второй производной динамического тензора Грина.

Решая уравнение (1.7) последовательными итерациями, получим операторный ряд по степеням тензора поляризации γ. Физически естественным является предположение о статистической однородности и изотропии среды

(1.8) $$\langle \gamma_{ijkl} \rangle = 0$$

Условие (1.8) обеспечивает наилучшую сходимость ряда возмущений. Осредняя полученный ряд с учетом (1.8), непосредственно проверяем, что $\langle E \rangle$ будет решением интегрального уравнения

(1.9) $$\langle E \rangle = e_0 + \iint G^{(R)}(x - x_1)\,Q(x_1 - x_2)\,\langle E(x_2) \rangle\,dx_1\,dx_2$$

Здесь оператор Q определяется рядом композиций интегральных операторов, ядра которых выражаются через регулярные части вторых производных тензора Грина и моменты γ.

С другой стороны, осредняя уравнение (1.7), можем записать

(1.10) $$\langle E \rangle = e_0 - \iint G^{(R)}(x - x_1)\,\Gamma^*(x_1 - x_2)\,\langle E(x_2) \rangle\,dx_1\,dx_2$$

Здесь ядро Γ^* вводится соотношением

(1.11) $$\langle \gamma E \rangle = P^* \langle E \rangle = \int \Gamma^*(x - x_1)\,\langle E(x_1) \rangle\,dx_1$$

Сравнивая соотношения (1.9), (1.10), получим

(1.12) $$\Gamma^*(x - x_1) = -Q(x - x_1)$$

Из формул (1.6) с учетом (1.11) следует

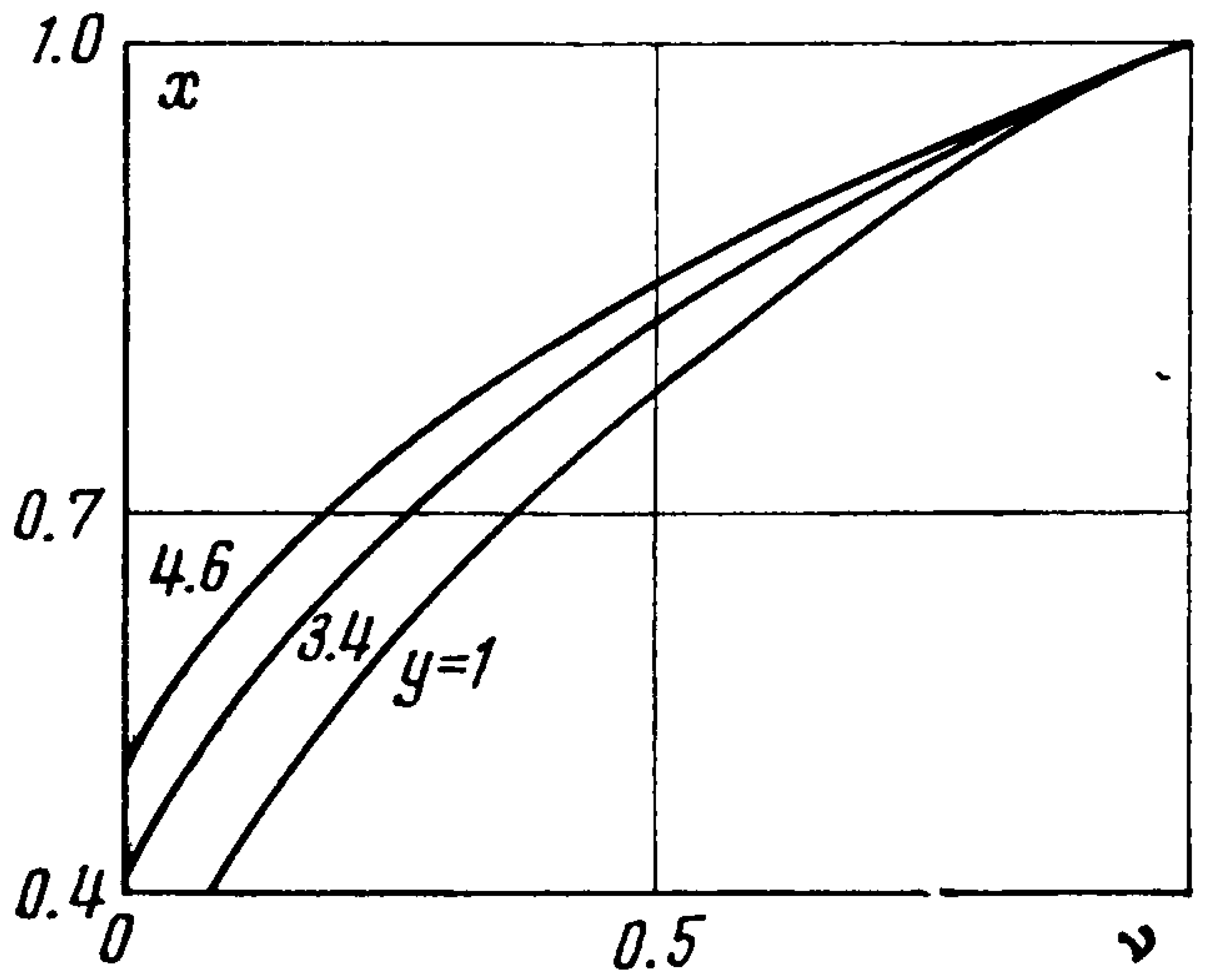
(1.13) $$\int dx_1 \Gamma^*(x - x_1)\left[I + G^{(s)}\left(\int dx_2 \Lambda^*(x_1 - x_2) - \Lambda_0\right)\right]\langle e(x_1) \rangle = \\ = \left[\int dx_1 \Lambda^*(x - x_1) - \Lambda_0\right]\langle e(x_1) \rangle$$

Соотношения (1.13) позволяют выразить собственные значения упругого оператора $\Pi^*(\omega, k)$ через собственные значения $D^*(\omega, k)$ поляризационного оператора P^*

$$\Pi^* = \Lambda_0 + M^{-1}D^*, \quad M = I - G^{(s)}D^* \tag{1.14}$$

Применяя к соотношениям (1.14) обратное преобразование Фурье, получим выражение для ядра упругого оператора $\Lambda^*(x - x_1)$ через Λ_0 и ядро $\Gamma^*(x - x_1)$ оператора поляризации

$$\Lambda^*(\omega, \rho) = \Lambda_0 + (2\pi)^{-3}\int dk\, e^{ik\rho}M^{-1}(\omega, k)\,\Gamma^*(\omega, k) \tag{1.15}$$



Фиг. 1

Здесь Λ_0 представляет собой точное значение статических упругих модулей, определяемых из соотношения (1.8).

Действительно, проводя аналогичные вычисления на основе динамических уравнений совместности в напряжениях из условия, аналогичного (1.8) относительно тензора поляризации напряжений, получим относительно Λ_0 уравнения, совпадающие с уравнениями для Λ_0, полученными на основе уравнений движения в перемещениях. Второй член в формулах (1.14), (1.15) обусловлен в общем случае операторным характером связи между средними полями напряжений и деформаций в неоднородных средах.

2. Рассмотрим соотношения, которым удовлетворяют Λ_0 для однофазных поликристаллов с кубической симметрией. Из формул (1.8) с учетом (1.6) следует

$$8G_0^3 + G_0^2(9K_0 + 4\mu\nu) - 3G_0\mu(K_0 + 4\mu\nu) - 6K_0\mu^2\nu = 0 \tag{2.1}$$

$$K_0 = \langle K\rangle = \frac{2c_{12} + c_{11}}{3}, \quad \nu = \frac{c_{11} - c_{12}}{2c_{44}}, \quad \mu = c_{44}$$

Здесь G_0, K_0 — макроскопические сдвиговой и объемный модули упругости, ν — параметр анизотропии.

Уравнение (2.1) совпадает с уравнением Крёнера [3, 4], полученным согласованным методом, и определяет точное значение G_0, так как такое же уравнение получаем при использовании схемы Рейсса.

На фиг. 1 представлен график зависимости $x = G_0\mu^{-1}$ от ν при разных значениях $y = K_0\mu^{-1}$.

Рассмотрим двухкомпонентный упругий композит с изотропными компонентами. Соотношения (1.8) в этом случае приводят к уравнениям

$$\begin{gathered}8G_0^3 - G_0^2[20\langle G\rangle - 9K_0 - 12(G_1 + G_2)] - \\ -3G_0[5K_0\langle G\rangle - 2K_0S_g + 4G_1G_2] - 6K_0G_1G_2 = 0, \quad (K_0 - \\ - \langle K\rangle)(^4/_3G_0 + S_k) + R_k(0) = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

которые могут быть преобразованы также к виду

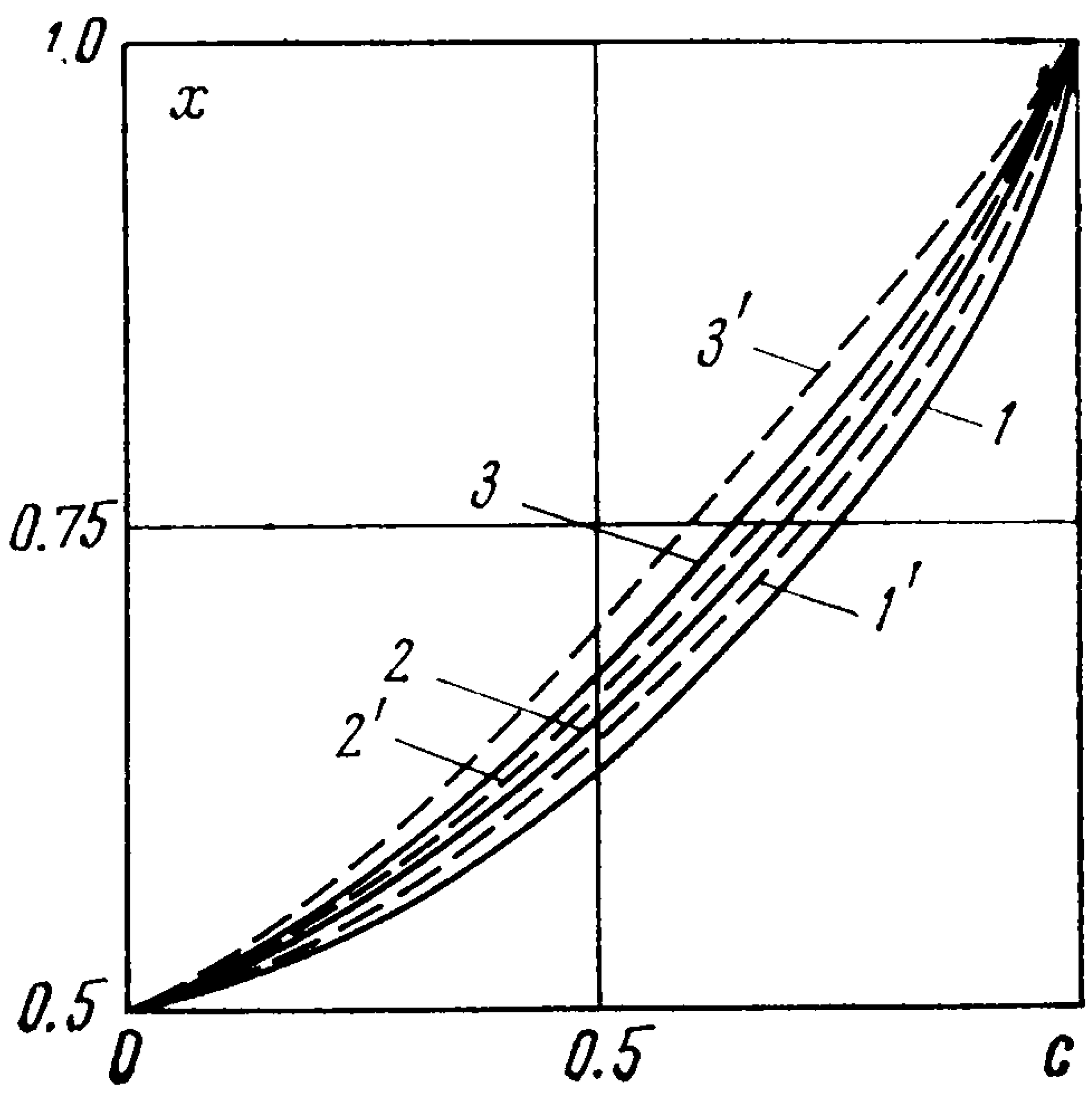
$$G_0 = \langle G\rangle - \frac{R_g(0)}{m_0 + S_g}, \quad K_0 = \langle K\rangle - \frac{R_k(0)}{^4/_3G_0 + S_k} \tag{2.3}$$

$$m_0 = \frac{G_0(15K_0 + 8G_0)}{6(K_0 + 2G_0)}, \quad S_f = c_1f_2 + c_2f_1$$

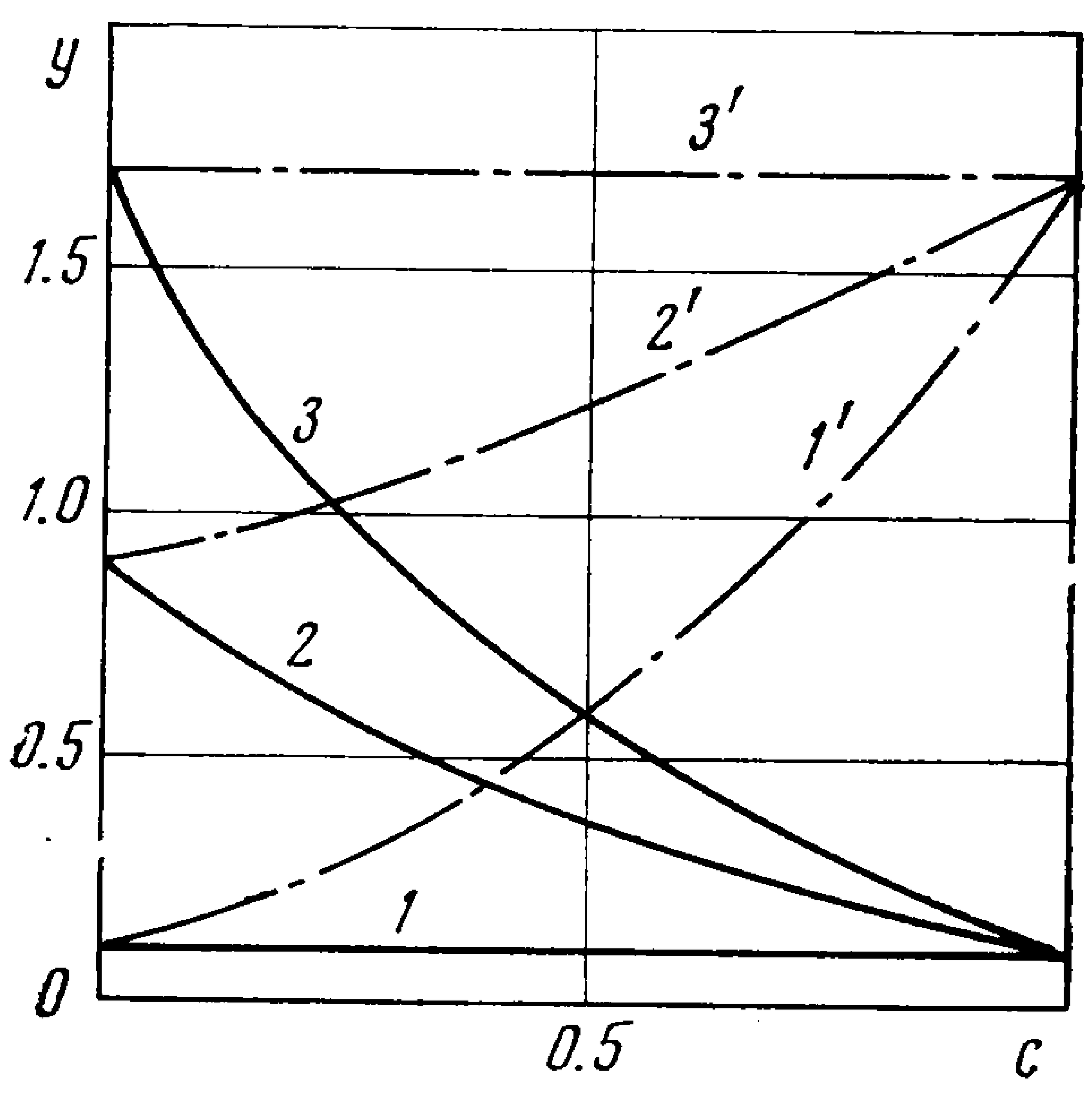
$$c_1 + c_2 = 1, \quad R_f(0) = c_1c_2(f_1 - f_2)^2$$

Уравнения в форме (2.2) были получены [5] на основе метода самосогласованного поля, а в форме (2.3) — в работе [8]. Соотношения (2.2), (2.3) определяют точные значения упругих модулей, что проверяется непосредственным расчетом на основе уравнений совместности.

На фиг. 2 изображена зависимость $x = G_0 G^{-1}{}_1$ от концентрации $c = c_1$ сплошными линиями при $\alpha = G_2 G^{-1}{}_1 = 0.5$, $\beta = K_1 G^{-1}{}_1 = 0.1$ и пунктирными линиями при $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.7$. На фиг. 3 изображена за-



Фиг. 2



Фиг. 3

висимость $y = K_0 G^{-1}{}_1$ от $c = c_1$ при тех же значениях α, β, δ. Кривым *1—3* соответствуют значения параметра $\delta = K_2 G^{-1}{}_1$, равные 0.1, 0.9, 1.7.

Отметим, что при получении уравнений (1.8), (2.1), (2.2), (2.3) не использовалось обычных предположений об однородности среднего напряженно-деформированного состояния и не вводилось предположений относительно статистики поля упругих коэффициентов, кроме обычных гипотез статистической однородности и изотропии.

3. Разрывный характер дисперсионных соотношений при длинах волн порядка характерных масштабов структуры в феноменологической модели имеет место, если собственные значения упругого оператора $\Pi^*(\omega, k)$ в формулах (1.5) зависят от k неоднозначным образом. Точное выражение для $D^*(\omega, k)$ в соотношениях (1.14) вычисляется для корреляционной функции $\langle\gamma(x_1)\gamma(x_2)\rangle = R(0)\, a\rho^{-1} \sin \rho a^{-1}$ (a — радиус корреляции) по формуле

$$D^*(\omega, k) = \int \Gamma^*(\omega, \rho)\, e^{-ik\rho}\, d\rho \tag{3.1}$$

Переходя в соотношении (3.1) к сферической системе координат, проводим интегрирование по углам. Полученные выражения преобразуем к интегралам Вебера — Шафхейтлина [9], значения которых зависят от соотношений между α и β.

В случае сильной изотропии поля Λ для $\Gamma^*_{ijkl}(\omega, \rho)$ по формулам (1.12) в корреляционном приближении по γ и для $D^*_{ijkl}(\omega, k)$ по формулам (3.1) получим выражения в виде изотропных тензоров

$$K_{ijkl}(\tau)=K_1(|\tau|)\delta_{ij}\delta_{kl}+K_2(|\tau|)(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+$$
$$+K_3(|\tau|)(\delta_{nj}e_ke_l+\delta_{kl}e_ne_j)+K_4(|\tau|)(\delta_{jl}e_ne_k+\delta_{jk}e_ne_l+$$
$$+\delta_{nl}e_je_k+\delta_{nk}e_je_l)+K_5(|\tau|)e_ne_je_ke_l,\quad e_i=\tau_i|\tau|^{-1}$$

Для $\Lambda^*(\rho)$ и $N^*(\omega, k)$ в этом случае по формулам (1.15), (1.16) получаются выражения, зависящие от шести функций. Сильной изотропии $D^*(\omega, k)$ $(D^*_3=D_4^*=D^*_5=0)$ соответствует сильная изотропия $N^*(\omega, k)$ $(N^*_3=N_4^*=N^*_5=N_6^*=0)$.

В общем случае можем записать ($J_\gamma(z)$ — функция Бесселя)

$$D_m^*(\omega, k)=S_m^{(1)}\left\{\int_0^\infty J_\nu\left[\left(\frac{1}{a}-k_t\right)\rho\right]J_\mu(k\rho)\rho^\lambda d\rho\right\}+$$
$$+S_m^{(2)}\left\{\int_0^\infty J_\nu\left[\left(\frac{1}{a}-k_l\right)\rho\right]J_\mu(k\rho)\rho^\lambda d\rho\right\}+$$
$$+S_m^{(3)}\left\{\int_0^\infty J_\nu\left[\left(\frac{1}{a}+k_l\right)\rho\right]J_\mu(k\rho)\rho^\lambda d\rho\right\}+$$
$$+S_m^{(4)}\left\{\int_0^\infty J_\nu\left[\left(\frac{1}{a}+k_t\right)\rho\right]J_\mu(k\rho)\rho^\lambda d\rho\right\},\quad m=1,.,5$$

Здесь $S_m^{(i)}\{\psi_i\}^0$ — суммы интегралов типа ψ_i, которые зависят от соотношений между k и $1/a\pm k_\alpha$ $(\alpha=l,\ t)$. Введем обозначения для интегралов: $S_m^{(i)}=S_m^{-(i)}$ при $k<1/a\pm k_\alpha$; $S_m^{(i)}=S_m^{0(i)}$ при $k=1/a\pm$ $\pm k_\alpha$; $S_m^{(i)}=S_m^{+(i)}$ при $1/a\pm k_\alpha<k$. Тогда получим следующие случаи для $D^*_m(\omega, k)$:

1°. $1/a-k_t>0$.

1) $k<1/a-k_t$	$D_m^*=S_m^{-(1)}+S_m^{-(2)}+S_m^{-(3)}+S_m^{-(4)}$
2) $k=1/a-k_t$	$D_m^*=S_m^{\circ(1)}+S_m^{-(2)}+S_m^{-(3)}+S_m^{-(4)}$
3) $1/a-k_t<k<1/a-k_l$	$D_m^*=S_m^{+(1)}+S_m^{-(2)}+S_m^{-(3)}+S_m^{-(4)}$
4) $k=1/a-k_l$	$D_m^*=S_m^{+(1)}+S_m^{\circ(2)}+S_m^{-(3)}+S_m^{-(4)}$
5) $1/a-k_l<k<1/a+k_l$	$D_m^*=S_m^{+(1)}+S_m^{+(2)}+S_m^{-(3)}+S_m^{-(4)}$
6) $k=1/a+k_l$	$D_m^*=S_m^{+(1)}+S_m^{+(2)}+S_m^{\circ(3)}+S_m^{-(4)}$
7) $1/a+k_l<k<1/a+k_t$	$D_m^*=S_m^{+(1)}+S_m^{+(2)}+S_m^{+(3)}+S_m^{-(4)}$
8) $k=1/a+k_t$	$D_m^*=S_m^{+(1)}+S_m^{+(2)}+S_m^{+(3)}+S_m^{\circ(4)}$
9) $1/a+k_t<k$	$D_m^*=S_m^{+(1)}+S_m^{+(2)}+S_m^{+(3)}+S_m^{+(4)}$

2°. $1/a-k_t<0$. Тогда в формулах для $S_m^{(1)}$ в качестве аргумента выражений

$$\sqrt{2z/\pi}\,J_{\pm 1/2}(z)$$

берем значение $z=k_t-1/a>0$, а знак перед $J_{+1/2}(z)$ — противоположным знаку в случае 1° $(z=1/a-k_t>0)$. Изменения в формулах будут иметь место только для подслучаев 1) — 4).

3°. $1 / a - k_l < 0$. Аналогично случаю 2° изменяем аргументы и знаки в выражениях для $J_{\pm 1/2}(z)$ и вносим соответствующие изменения в формулы 1) — 4).

Остальные выражения для D_m^* аналогичны случаю 1°.

Значения для S_m), вычисляемые по формулам Вебера — Шафхейтлина [9], выражаются через гипергеометрические функции $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$. Аргумент z в выражениях для $S_m^{-(i)}$ равен $k(1 / a \pm k_\alpha)^{-1}$, для $S_m^{+(i)}$ соответственно $(1 / a \pm k_\alpha) k^{-1}$, при $z = 1$ имеет место неоднозначность $D_m^* \cdot (\omega, k)$. Подставляя $D_m^*(\omega, k)$ в соотношения (1.14), (1.15) определим точные дисперсионные соотношения, из которых можно найти [10] скорости и затухание волн.

В пренебрежении пространственной дисперсией, используя плосковолновое приближение тензора Грина (рассеянное поле изучается вдали от рассеивающих элементов) для длинных $ak \ll 1$ и коротких $ak \gg 1$ волн, предполагая малость флуктуаций упругих параметров среды ($\Lambda_0 = \langle \Lambda \rangle$, $\Pi^* = \Lambda_0 + D^*$), получим выражения, аналогичные [10].

Авторы благодарны Ю. Н. Работнову за ценные и полезные замечания, сделанные при обсуждении работы.

Поступила 2 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* О связи между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации в статистических изотропных однородных упругих телах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
3. *Kröner E.* Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. Z. Phys., 1958, Bd 151, Hf 4.
4. *Kneer G.* Die elastischen Konstanten quasiisotroper Vielkristallag regate. Phisica Status Solidi, 1963, vol. 3, No. 9.
5. *Hill R.* A self-consistent mechanics of composite materials. J. Mech. and Phys. Solids, 1965, vol. 13, No. 4.
6. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды. ПМТФ, 1968, № 1.
7. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* Вычисление эффективных упругих модулей композиционных материалов с учетом многочастичных взаимодействий. ПМТФ, 1969, № 1.
8. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. J. Mech. and Phys. Solids, 1963, vol. 11, No. 2.
9. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1974.
10. *Лифшиц И. М., Пархомовский Г. Д.* К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 2.
11. *Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В., Татарский В. И.* О пространственной дисперсии неоднородных сред. ЖЭТФ, 1965, т. 48, вып. 2.
12. *Чигарев А. В.* К расчету макроскопических коэффициентов стохастически неоднородных упругих сред. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.