

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ РАЗРЫВА В КОНЦЕ ТРЕЩИНЫ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Дается точное решение задачи о начальном развитии пластических деформаций вблизи концов трещин нормального разрыва. Пластические деформации в условиях плоской деформации предполагаются сконцентрированными вдоль двух узких полос скольжения, симметрично исходящих из конца трещины под некоторым углом α к ее продолжению. Такая форма пластической области может рассматриваться как некоторое приближение к «размытой» пластической зоне; для некоторых материалов, возможно, она ближе отвечает существу дела. Длина линий скольжения и угол α определены (например, оказалось, что угол α равен 72°). На этой модели удастся проанализировать также влияние боковой нагрузки на пластическую область. В частности, показано, что раскрытие трещины в ее конце существенно зависит от боковой нагрузки; таким образом, широко распространенный критерий С.О.Д. (критическое раскрытие трещины) не является локальным критерием даже в случае сколь угодно малой пластической зоны. Для решения задач применяется техника интегральных преобразований и метод Винера — Хопфа.

1. Введение. Рассмотрим однородное изотропное тело с произвольными трещинами нормального разрыва. Материал тела будем предполагать идеальным упругопластическим и удовлетворяющим условию пластичности Треска — Сен-Венана, а деформации — малыми. Трещины будем представлять в виде математических разрезов нулевой толщины. Поэтому уже при сколь угодно малых внешних нагрузках вблизи контура трещин возникнет пластическая область.

При достаточно малых внешних нагрузках характерный линейный размер пластической зоны будет мал по сравнению с характерным линейным размером тела и трещин. В этом случае справедлива постановка асимптотической задачи о тонкой структуре конца трещины [1]; трещину можно считать на плоскости xy полубесконечным разрезом вдоль отрицательной полуоси x , свободным от внешних нагрузок, а на бесконечности ставится дополнительное условие нагружения, определяемое из решения чисто упругой задачи. Решение этой плоской задачи описывает поле напряжений и деформаций в окрестности любой точки гладкого контура трещины с точностью до множителя (коэффициента интенсивности напряжений K_I). В такой постановке был рассмотрен, например, ряд задач в работах [1–5].

Ниже предполагается, что пластические деформации концентрируются вдоль узких прямолинейных полос скольжения, исходящих из конца трещины. Длина пластических полос, очевидно, увеличивается с ростом внешней нагрузки и должна быть определена в процессе решения задачи. Число полос скольжения будем считать равным двум (фиг. 1); они располо-

жены симметрично относительно плоскости трещины и составляют с её продолжением угол α (задача считается локально симметричной). Длину полос скольжения в плоскости xy можно взять в качестве единицы линейного масштаба и, тем самым, без ограничения общности положить равной единице.

Такую постановку задачи можно считать, с одной стороны, приближенной и служащей для описания размытой пластической зоны вблизи конца трещины. С другой стороны, некоторые данные говорят о том, что пластические деформации в некоторых материалах имеют тенденцию к концентрации в узких полосах скольжения (являющихся линиями разрыва смещения). В этом плане классическими являются опыты Дагдейла на тонких пластинах из малоуглеродистой стали, обнаружившего и рассчитавшего такие полосы скольжения на продолжении трещины [6]. Дальнейшим существенным развитием этих взглядов является работа [7], в которой обнаружены при дальнейшем повышении нагрузки, кроме полосы Дагдейла, еще две боковые полосы пластичности. Отметим, что если полоса Дагдейла отвечает пластическому течению, типичному для плоского напряженного состояния (т. е. для идеально тонких пластин), то две боковые полосы Леонова — Витвицкого — Яремы [7] отвечают пластическому течению, характерному для плоской деформации (т. е. для бесконечно толстых пластин).

Постановка задачи с боковыми полосами пластичности, кроме того, позволяет объяснить и рассчитать эффект двухосности напряженного состояния, который трудно понять при других подходах (даже, может быть, более точных).

2. Вывод уравнения Винера — Хопфа. Запишем граничные условия рассматриваемой задачи в случае двух полос пластичности (см. фиг. 1), считая, что напряжения на бесконечности исчезают заданным образом

$$(2.1) \quad \theta = \pm \pi, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

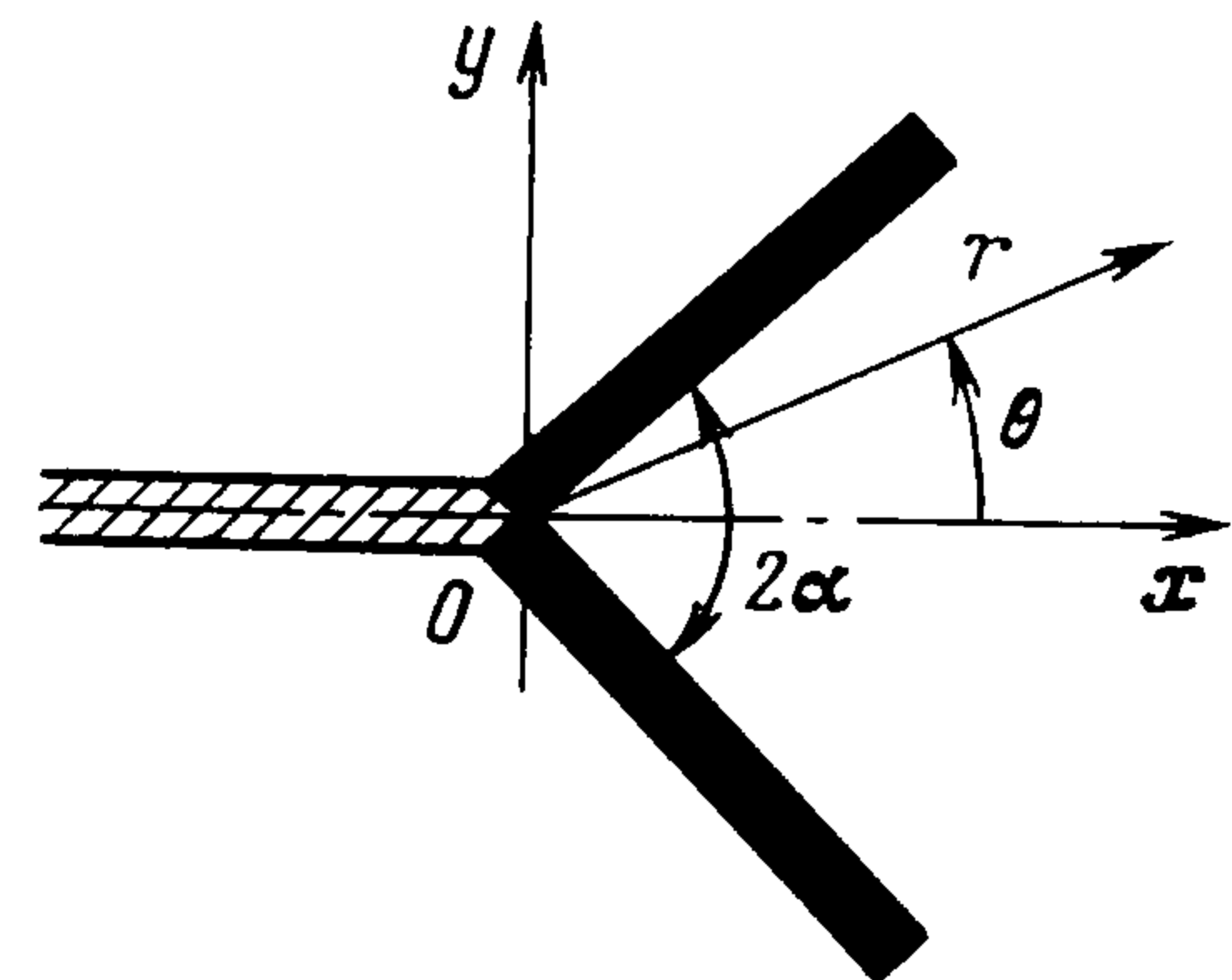
$$(2.2) \quad \theta = 0, \quad u_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

$$(2.3) \quad \theta = \pm \alpha, \quad [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = 0, \quad [u_\theta] = 0$$

$$(2.4) \quad \theta = \pm \alpha, \quad \begin{cases} 0 < r < 1, & \tau_{r\theta} = \tau_s \\ \infty > r > 1, & [\sigma_r] = 0 \end{cases}$$

$$(2.5) \quad \theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Здесь квадратная скобка означает скачок величины, заключенной в скобки, при переходе через линию разрыва, τ_s — предел текучести на сдвиг, K_I — коэффициент интенсивности напряжений. Условия (2.3) и (2.4) означают, что на боковых полосах пластичности допускается разрыв лишь касательной компоненты перемещения, а касательное напряжение равно пределу текучести. Условие симметрии (2.2) позволяет при решении задачи ограничиться рассмотрением верхней полуплоскости $0 < \theta < \pi$.



Фиг. 1

Применим интегральное преобразование Меллина (p — комплексный параметр)

$$f(p) = \int_0^{\infty} f(r) r^p dr$$

к уравнениям статики и к условию сплошности. В результате для функции $\bar{\sigma}_\theta(p, \theta)$ получим следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$(2.6) \quad \frac{d^4 \bar{\sigma}_\theta}{d\theta^4} + [(p+1)^2 + (p-1)^2] \frac{d^2 \bar{\sigma}_\theta}{d\theta^2} + (p+1)^2 (p-1)^2 \bar{\sigma}_\theta = 0$$

Функции $\bar{\sigma}_r, \bar{\tau}_{r\theta}$ выражаются через $\bar{\sigma}_\theta$ так:

$$(2.7) \quad \bar{\tau}_{r\theta} = \frac{1}{p-1} \frac{d\bar{\sigma}_\theta}{d\theta}, \quad p\bar{\sigma}_r = \frac{1}{p-1} \frac{d^2 \bar{\sigma}_\theta}{d\theta^2} - \bar{\sigma}_\theta$$

Решение уравнений (2.6) имеет вид

$$(2.8) \quad \bar{\sigma}_\theta(p, \theta) = A_1(p) \cos(p+1)\theta + A_2(p) \cos(p-1)\theta + \\ + A_3(p) \sin(p+1)\theta + A_4(p) \sin(p-1)\theta \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \alpha$$

$$(2.9) \quad \bar{\sigma}_\theta(p, \theta) = B_1(p) \cos(p+1)(\theta - \pi) + B_2(p) \cos(p-1)(\theta - \pi) + \\ + B_3(p) \sin(p+1)(\theta - \pi) + B_4(p) \sin(p-1)(\theta - \pi) \\ \text{при } \alpha \leq \theta \leq \pi$$

Здесь $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4$ — неизвестные функции параметра p , которые определяются из граничных условий. Любые семь из них выражаются через одну неизвестную функцию при помощи семи «сквозных» граничных условий (2.1) — (2.3), преобразованных по r . Замечая, что согласно закону Гука

$$(2.10) \quad \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\bar{\sigma}_r - \nu\bar{\sigma}_\theta] \\ \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} = \frac{1+\nu}{E(p+1)} \left[2p\bar{\tau}_{\theta r} + (1-\nu) \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\theta} - \nu \frac{d\bar{\sigma}_\theta}{d\theta} \right]$$

(E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона), из преобразованных граничных условий (2.1) — (2.3) при помощи (2.8) — (2.10) находим следующие уравнения:

$$A_3 = A_4 = 0, \quad B_1 + B_2 = 0, \quad B_3(p+1) + B_4(p-1) = 0 \\ A_1 \cos(p+1)\alpha + A_2 \cos(p-1)\alpha = B_1 \cos(p+1)(\alpha - \pi) + \\ + B_2 \cos(p-1)(\alpha - \pi) + B_3 \sin(p+1)(\alpha - \pi) + \\ + B_4 \sin(p-1)(\alpha - \pi) \\ A_1(p+1) \sin(p+1)\alpha + A_2(p-1) \sin(p-1)\alpha = \\ = B_1(p+1) \sin(p+1)(\alpha - \pi) + B_2(p-1) \sin(p-1)(\alpha - \pi) - \\ - B_3(p+1) \cos(p+1)(\alpha - \pi) - B_4(p-1) \cos(p-1)(\alpha - \pi) \\ A_1(p+1)^3 \sin(p+1)\alpha + A_2(p-1)^3 \sin(p-1)\alpha = B_1(p+1)^3 \sin(p+1)(\alpha - \pi) + \\ + B_2(p-1)^3 \sin(p-1)(\alpha - \pi) - \\ - B_3(p+1)^3 \cos(p+1)(\alpha - \pi) - B_4(p-1)^3 \cos(p-1)(\alpha - \pi)$$

Решение этой системы уравнений запишем в виде $D(p)$ — неизвестная функция p)

$$(2.11) \quad \begin{aligned} A_1(p) &= D(p) [p \cos p\alpha \sin \alpha - \sin p(\pi - \alpha) \cos(p\pi - \alpha)] \\ A_2(p) &= -D(p) [p \cos p\alpha \sin \alpha - \sin p(\pi - \alpha) \cos(p\pi + \alpha)] \\ B_1(p) &= -D(p) \cos p\pi [p \cos p\alpha \sin \alpha + \sin p\alpha \cos \alpha] \\ B_4(p) &= -\frac{p+1}{p-1} D(p) (p-1) \sin \alpha \sin p\pi \cos p\alpha \end{aligned}$$

Введем следующие функции:

$$(2.12) \quad \Phi^-(p) = \int_0^1 [\sigma_r(r, \alpha)] r^p dr, \quad \Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(r, \alpha) r^p dr$$

Здесь функция $\Phi^-(p)$, очевидно, аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -1$, а функция $\Phi^+(p)$ на основании условия (2.5) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < -1/2$.

При помощи введенных функций граничные условия (2.4) запишутся в виде

$$(2.13) \quad \theta = \alpha, \quad [\overline{\sigma_r}] = \Phi^-(p), \quad \overline{\tau_{r\theta}} = \Phi^+(p) + \frac{\tau_s}{p+1}$$

При помощи формул (2.8), (2.9) и (2.11) условия (2.13) можно записать в виде

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \Phi^-(p) &= -\frac{2 \sin 2p\pi}{p-1} D(p), \quad \Phi^+(p) + \frac{\tau_s}{p+1} = \frac{\sin^2 p\pi}{p-1} G(p) D(p) \\ G(p) &= \frac{1}{2 \sin^2 p\pi} \{ (p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha) [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] + \\ &+ 2(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) [\sin^2 p(\pi - \alpha) - p^2 \sin^2 \alpha] \} \end{aligned}$$

Исключая функцию $D(p)$ из двух соотношений (2.14), приходим к следующему функциональному уравнению Винера — Хопфа:

$$(2.15) \quad \Phi^+(p) + \frac{\tau_s}{p+1} = -\frac{1}{4} \operatorname{tg} \pi p G(p) \Phi^-(p)$$

3. Решение краевой задачи. Функциональное уравнение (2.15) имеет место в полосе $-1 < \operatorname{Re} p < -1/2$, $-\infty < \operatorname{Im} p < +\infty$. Функция $G(p)$ в этом уравнении обладает следующими свойствами:

а) функция $G(p)$ мероморфна, её полюсами второго порядка являются точки $p = \pm 1, \pm 2, \dots$, за исключением, может быть, корней уравнения $p \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} p\alpha$;

б) всюду на прямой $p = -1/2 + it$ ($-\infty < t < +\infty$) функция $G(p)$ не имеет ни полюсов, ни нулей;

в) при $p \rightarrow \infty$ вдоль прямой $p = -1/2 + it$ функция $G(p)$ стремится к единице.

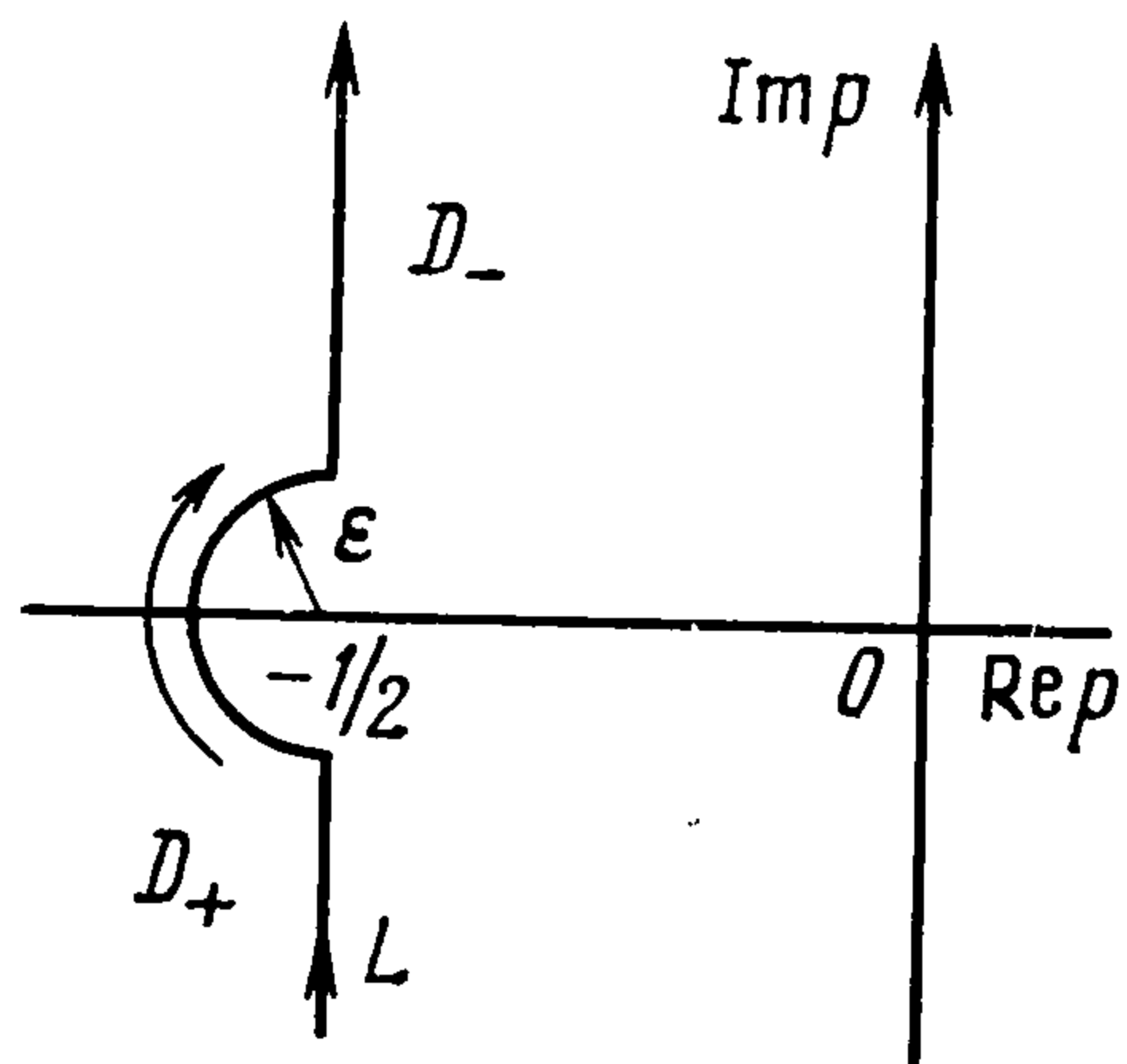
Рассмотрим контур L в плоскости p , состоящий из прямой $p = -1/2 + it$ и левой полуокружности малого радиуса с центром в точке $p = -1/2$ (фиг. 2). Направление обхода контура L совпадает с направлением мнимой оси. Области слева и справа от контура L обозначим соответствен-

но через D_+ и D_- . Функцию $G(p)$ на контуре L можно представить в виде

$$(3.1) \quad G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (p \in L)$$

$$(3.2) \quad \exp \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)}{t-p} dt = \begin{cases} G^+(p) & (p \in D_+) \\ G^-(p) & (p \in D_-) \end{cases} \quad (G^\pm(\pm\infty) = 1)$$

Здесь $G^+(p)$ и $G^-(p)$ — целые функции, аналитические и не имеющие нулей соответственно в областях D_+ и D_- . При $|t| \rightarrow \infty$ на L функция $\ln G(t)$ убывает по экспоненте, поэтому интеграл (3.2) сходится быстро.



Фиг. 2

Используем еще следующее известное представление (см., например, [8], стр. 53):

$$(3.3) \quad p \operatorname{ctg} \pi p = -K^+(p) K^-(p)$$

$$(3.4) \quad K^+(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(-1/2-p)}, \quad K^-(p) = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(3/2+p)}$$

Функция $K^+(p)$ аналитична и не имеет нулей при $\operatorname{Re} p < -1/2$, а функция $K^-(p)$ аналитична и не имеет нулей при $\operatorname{Re} p > -1$. Кроме того, согласно формуле Стирлинга имеем

$$(3.5) \quad K^+(p) = (-p)^{3/2} + O(1), \quad K^-(p) = (+p)^{-1/2} + O(1), \quad p \rightarrow \infty$$

При помощи факторизации (3.1) и (3.3) функциональное уравнение (2.15) можно записать так:

$$(3.6) \quad \frac{\Phi^+(p) K^+(p)}{p G^+(p)} + \frac{\tau_s K^+(p)}{p(p+1) G^+(p)} = \frac{\Phi^-(p)}{4 G^-(p) K^-(p)} \quad (p \in L)$$

Используем теперь следующее представление:

$$(3.7) \quad \frac{K^+(p)}{p(p+1) G^+(p)} = \frac{1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{p G^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] - \frac{K^+(-1)}{(p+1) G^+(-1)}$$

Подставляем (3.7) в (3.6), получаем

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \frac{\Phi^+(p) K^+(p)}{p G^+(p)} + \frac{\tau_s}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{p G^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] = \\ = \frac{\tau_s K^+(-1)}{(p+1) G^+(-1)} + \frac{\Phi^-(p)}{4 G^-(p) K^-(p)} \quad (p \in L) \end{aligned}$$

Левая часть этого равенства аналитична в D_+ , а правая — в D_- . На основании принципа непрерывного продолжения они равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости. Чтобы найти эту единую аналитическую функцию, нужно изучить поведение искомых функций $\Phi^-(p)$ и $\Phi^+(p)$ при $p \rightarrow \infty$. Для этого в общем случае будем считать, что в голове линии скольжения имеется концентрация напряжений¹, характеризуемая упругой асимптотикой для трещин с пластическим заполнителем [1]. Эта упругая асимптотика (локальная или сверхтонкая структура) вполне определена одним коэффициентом интенсивности на-

¹ Эта концентрация может быть обусловлена скоплением дислокаций в виде облака Коттрелла (например, для материалов типа малоуглеродистой стали она может быть существенной).

пряжений k_{II} . Критическое значение этого коэффициента k_{IIc} (вязкость скольжения) определяет сопротивление материала развитию в нем поверхностей скольжения. Величину k_{IIc} будем считать заданной постоянной материала. Когда такое сопротивление пренебрежимо мало, можно считать, что $k_{IIc} = 0$, и в этом частном случае напряжения будут ограничены в конце полосы скольжения. Согласно работе [9] имеет место следующая асимптотика:

$$(3.9) \quad \Phi^-(p) = \frac{2\sqrt{2}k_{II}}{\sqrt{p}}, \quad \Phi^+(p) = -\frac{k_{II}}{\sqrt{-2p}}, \quad p \rightarrow \infty$$

На основании (3.9), (3.2) и (3.5) единая аналитическая функция в (3.8) стремится к постоянной $k_{II}/\sqrt{2}$ при $p \rightarrow \infty$ и, следовательно, по теореме Лиувилля она тождественно равна этой постоянной во всей плоскости p .

Таким образом, решение краевой задачи можно записать в виде

$$(3.10) \quad \Phi^+(p) = -\frac{\tau_s p G^+(p)}{(p+1) K^+(p)} \left[\frac{K^+(p)}{p G^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] - \frac{k_{II} p G^+(p)}{\sqrt{2} K^+(p)}$$

$$\Phi^-(p) = -\frac{4\tau_s G^-(p) K^-(p) K^+(-1)}{(p+1) G^+(-1)} - 2\sqrt{2} k_{II} G^-(p) K^-(p)$$

Определяя отсюда при помощи (2.14) функцию $D(p)$, находим преобразования Меллина напряжений, а после обращения преобразования — и сами напряжения.

4. Анализ решения. В решение (3.10) входит неизвестный параметр k_{II} , который должен быть определен из условия на бесконечности (2.5). Еще удобнее воспользоваться второй формулой (2.12) и известной асимптотикой для трещин нормального разрыва

$$(4.1) \quad \theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}$$

При помощи теоремы абелева типа отсюда нетрудно найти

$$(4.2) \quad \Phi^+(p) = -\frac{K_I \sin \alpha \cos \alpha / 2}{2\sqrt{2\pi} (p+1/2)}, \quad p \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Согласно (3.4) имеем

$$(4.3) \quad K^+(p) = -\frac{\Gamma(3/2)(p+1/2)}{\Gamma(1/2)} \sqrt{\pi}, \quad p \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Первая формула (3.10) дает

$$(4.4) \quad \Phi^+(p) = \frac{-k_{II} G^+(-1/2)}{2\sqrt{2} \Gamma(3/2)(p+1/2)} - \frac{\tau_s G^+(-1/2)}{\Gamma(3/2)(p+1/2)} \times$$

$$\times \left[\frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} - \frac{2K^+(-1/2)}{G^+(-1/2)} \right], \quad p \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Сравнивая (4.2) с (4.4), находим

$$(4.5) \quad -k_{II} = -K_I \frac{\Gamma(3/2)}{G^+(-1/2) \sqrt{\pi}} \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} +$$

$$+ 2\sqrt{2} \tau_s \left[\frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} - \frac{2K^+(-1/2)}{G^+(-1/2)} \right]$$

Переходя к размерным переменным и приравнивая локальный коэффициент интенсивности постоянной материала k_{IIC} , получаем уравнение для определения длины d полосы скольжения

$$(4.6) \quad d^{1/2} = \frac{-k_{IIC} + K_I \sin \alpha \cos \alpha / 2 [2G^+(-1/2)]^{-1}}{2 \sqrt{2} \tau_s K^+ (-1) [G^+(-1)]^{-1}}$$

В частности, если концентрация напряжений в голове полосы скольжения отсутствует, т. е. $k_{IIC} = 0$, и формула упрощается

$$(4.7) \quad \frac{\tau_s d^{1/2}}{K_I} = \frac{\sqrt{\pi}}{4 \sqrt{2}} \frac{\sin \alpha \cos \alpha / 2 G^+(-1)}{G^+(-1/2)}$$

Преобразуя формулу (3.2), можно найти

$$(4.8) \quad G^+(-1) = \exp \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \ln [q^2(t) + m^2(t)] + 4t \operatorname{arctg} \frac{m(t)}{q(t)} \right\} \frac{dt}{1 + 4t^2}$$

$$G^+ \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha / 2} \exp \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{m(t)}{q(t)} \frac{dt}{t}$$

где

$$\begin{aligned} q(t) = & \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 t \pi} \left\{ \sin^2 \alpha (\cos \alpha + \operatorname{ch} 2at) [\operatorname{ch} 2t(\pi - \alpha) - \cos \alpha] + \right. \\ & + (t \sin 2\alpha + \cos \alpha \operatorname{sh} 2at) [t \sin 2\alpha + \cos \alpha \operatorname{sh} 2t(\pi - \alpha)] + \\ & + 2(\cos \alpha \operatorname{ch} 2at - \cos 2\alpha) \left[\cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch}^2 t(\pi - \alpha) - \right. \\ & - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}^2 t(\pi - \alpha) - (1/4 - t^2) \sin^2 \alpha \left. \right] + \\ & \left. + \sin \alpha \operatorname{sh} 2at [\sin \alpha \operatorname{sh} 2t(\pi - \alpha) - 2t \sin^2 \alpha] \right\} \\ m(t) = & \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 t \pi} \left\{ \sin \alpha (\cos \alpha + \operatorname{ch} 2at) [t \sin 2\alpha + \cos \alpha \operatorname{sh} 2t(\pi - \alpha)] - \right. \\ & - (t \sin 2\alpha + \cos \alpha \operatorname{sh} 2at) \sin \alpha [\operatorname{ch} 2t(\pi - \alpha) - \cos \alpha] + \\ & + 2 \sin \alpha \operatorname{sh} 2at \left[\cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch}^2 t(\pi - \alpha) - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}^2 t(\pi - \alpha) - \right. \\ & - (1/4 - t^2) \sin^2 \alpha \left. \right] - (\cos \alpha \operatorname{ch} 2at - \cos 2\alpha) \times \\ & \left. \times [\sin \alpha \operatorname{sh} 2t(\pi - \alpha) - 2t \sin^2 \alpha] \right\} \end{aligned}$$

Зависимость безразмерной длины d_* (равной $\tau_s^2 d / K_I^2$) от угла α , построенная при помощи ЭВМ по формулам (4.7) и (4.8), изображена на фиг. 3. Как видно, эта зависимость имеет максимум при $\alpha_* = 72^\circ$ (ошибка не превышает 1°); этот максимум равен 0.046. Естественно предположить, что в однородном и изотропном по прочности теле линии скольжения вблизи конца трещины развиваются в направлении этого максимума, т. е. под углом $\alpha_* = 72^\circ$ к продолжению трещины. При этом длина пластических отрезков равна

$$(4.9) \quad d = 0.046 K_I^2 / \tau_s^2$$

Следует отметить, что эти результаты весьма близки к численным результатам [4], полученным по теории течения для идеального упруго-

пластического материала с условием Мизеса методом конечных элементов. Напомним, что согласно их расчету при $\nu = 0.3$ максимальное расстояние размытых пластических «ушей» от конца трещины примерно равно $0.044 K_1^2 \tau_s^{-2}$, причем отклонение соответствующего максимального радиус-вектора от направления трещины составляет примерно 70° .

Рассмотренную задачу легко обобщить, учитывая однородное боковое растяжение тела вдоль трещины произвольным напряжением σ_x . Для идеально хрупких тел это напряжение, как известно, не влияет на локальную асимптотику поля вблизи вершины трещины. В данной задаче это влияние легко рассчитать. Для этого достаточно поле растяжения σ_x сложить с возмущенным полем, которое, очевидно, получается из рассмотренного решения, если в нем

везде величину τ_s заменить на $\tau_s + \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha$. В частности, согласно (4.7) длина полосы скольжения будет равна

$$(4.10) \quad d = \frac{\pi}{32} \frac{K_1^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha / 2 [G^+(-1)]^2}{[G^+(-1/2)]^2 (\tau_s + \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha)^2}$$

Как видно, при прочих равных условиях боковое растяжение уменьшает размер пластической полосы скольжения.

Вычислим раскрытие трещины в её конце $2v_0$ при $\alpha = \alpha_* = 72^\circ$. При помощи формул (2.10), (2.12), (3.10) находим

$$(4.11) \quad \begin{aligned} 2v_0 &= 2 \sin \alpha_* \int_0^d \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \right] dr = \frac{16(1-\nu^2) K_1^2}{E \tau_s} \frac{\sin \alpha_* G^-(0)}{\pi G^+(-1)} d_*(\alpha_*) = \\ &= 0.2228 \frac{(1-\nu^2) K_1^2}{E \tau_s} \frac{G^-(0)}{G^+(-1)} \\ G^-(0) &= \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \ln [q^2(t) + m^2(t)] - 4t \operatorname{arctg} \frac{m(t)}{q(t)} \right\} \frac{dt}{1+4t^2} \right\} \end{aligned}$$

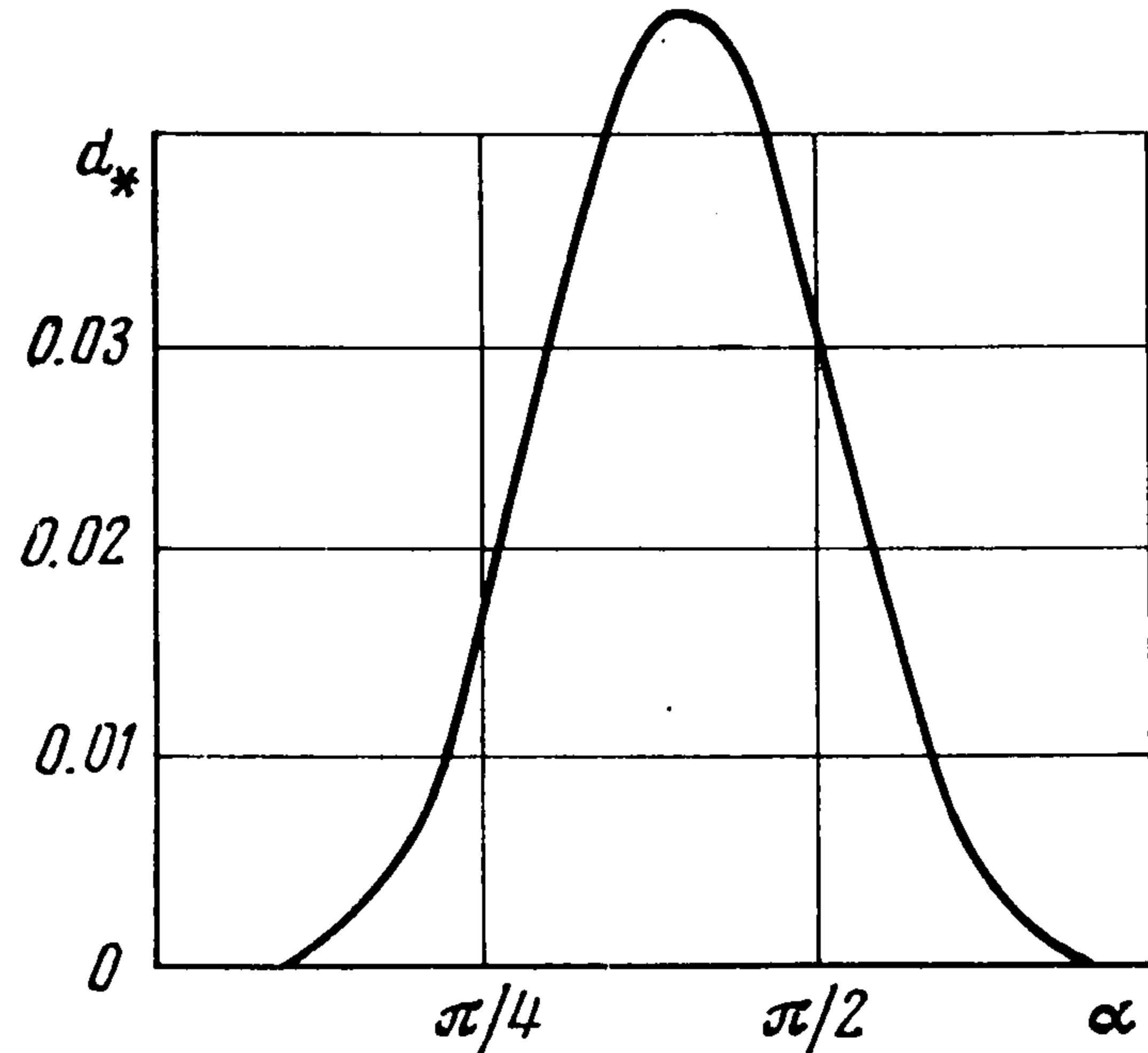
Вычисляя интеграл на ЭВМ, получаем

$$(4.12) \quad 2v_0 = 0.2222 \frac{(1-\nu^2) K_1^2}{E \tau_s'}$$

В частности, при $\nu = 0.3$ имеем

$$(4.13) \quad 2v_0 = 0.202 \frac{K_1^2}{E \tau_s}$$

что почти совпадает с соответствующим численным решением [4] для раз-



Фиг. 3

мытой пластической зоны (в этом решении коэффициент в (4.13) равен 0.21).

С учётом бокового растяжения σ_x формулу (4.12) можно записать в следующем виде:

$$(4.14) \quad 2v_0 = 0.2222 \frac{(1 - \nu^2) K_I^2}{E (\tau_s + 1/2 \sigma_x \sin 2\alpha_*)}$$

По условию размер пластической области весьма мал; следовательно, начало развития трещины определяется концепцией K_{Ic} : как только величина K_I становится равной вязкости разрушения материала K_{Ic} : начинается рост трещины. При этом согласно (4.14) величина критического раскрытия трещины (С.О.Д.) не будет постоянной материала, так как она зависит еще от внешней нагрузки σ_x . Приведенный результат показывает, таким образом, неуниверсальность и нелокальность широко распространенного критерия С.О.Д.

Автор благодарен В. Д. Кулиеву за проверку некоторых вычислений и за обсуждение работы.

Поступила 31 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
2. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Песков Ю. А., Черепанов Г. П. О локальной пластической зоне вблизи конца щели. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
3. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Песков Ю. А., Черепанов Г. П. О локальной пластической зоне вблизи конца щели (плоская деформация). Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 5.
4. Levy N., Marcal P. V., Ostergren W. J., Rice J. R. Small scale yielding near a crack in plane strain: a finite element analysis. Internat. J. Fracture Mech., 1971, vol. 7, No. 2.
5. Cherepanov G. P. Cracks in solids. Internat. J. Solids and Structures, 1968, vol. 4, p. 811—831.
6. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. and Phys. Solids, 1960, vol. 31, No. 2.
7. Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 3.
8. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Черепанов Г. П. Равновесие откоса с тектонической трещиной. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.