Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.374

ОБРАЩЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ТЕЛ

А. Н. Гузь

(Киев)

Получено обращение основных соотношений теории пластического течения упрочняющихся тел в окрестности регулярной точки произвольной поверхности нагружения. В результате приращения напряжений выражены в явной форме через приращения деформаций.

Основные соотношения теории пластического упрочняющегося тела [1, 2] при предположении о существовании функции нагружения имеют вид соотношений, выражающих приращения деформаций через приращения напряжений. При формулировке задач в перемещениях, например в случае трехмерных задач устойчивости [3, 4], необходимо выразить приращения напряжений через приращения деформаций, т. е. обратить основные соотношения. Ниже такое обращение осуществлено в окрестности регулярной точки произвольной поверхности нагружения при изотермическом процессе деформирования в случае малых деформаций.

1. Следуя [1, 2], запишем основные соотношения теории пластического упрочняющегося тела в окрестности регулярной точки поверхности нагружения. Приращение полной деформации представим в виде суммы приращений упругой и пластической деформаций (для упругой деформации вводим тензор податливости C, для пластической деформации исходим из ассоциированного закона течения)

(1.1) $$d\varepsilon_{nm} = d\varepsilon_{nm}{}^e + d\varepsilon_{nm}{}^p$$

(1.2) $$d\varepsilon_{nm}^e = C_{nmij}\, d\sigma^{ij}$$

(1.3) $$d\varepsilon_{nm}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma^{mn}}, \quad \text{когда } f = 0,\ df = 0 \text{ и } d'f > 0$$

$$d\varepsilon_{nm}^p = 0, \text{ когда } f = 0 \text{ и } df \equiv d'f \leqslant 0 \text{ или } f < 0$$

Через f обозначена функция нагружения; уравнение поверхности нагружения при этом имеет вид

(1.4) $$f(\sigma^{ij}, g_{ij}, \varepsilon_{ij}{}^p, \chi_s, k_s) = 0$$

Здесь g_{ij} — ковариантные составляющие метрического тензора лагранжевой системы координат в недеформированном состоянии, σ^{ij} — контравариантные составляющие тензора напряжений, $\varepsilon_{ij}{}^p$ — ковариантные составляющие тензора пластических деформаций, χ_s — параметры упрочнения, которые могут быть связаны с остаточными деформациями неголономными связями, k_s — постоянные материала.

Дифференциальные зависимости для параметров упрочнения можно представить при нагружении в одной из форм

$$d\chi_s = A_s^{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad A_s^{ij} = A_s^{ij}(\sigma^{nm}, \varepsilon_{nm}^p) \tag{1.5}$$

$$d\chi_s = B_s d'f \equiv B_s \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij}, \quad B_s = B_s(\sigma^{nm}, \varepsilon_{nm}^p) \tag{1.6}$$

Выражения (1.1) — (1.6) — основные в теории пластических упрочняющихся тел.

2. Основные соотношения можно представить и в несколько иной форме. С этой целью поступим следующим образом. Из выражений (1.3), (1.4) и (1.6) определим множитель $d\lambda$ и подставим его в выражение (1.3). В результате из (1.1) — (1.3) получаем

$$d\varepsilon_{nm} = (C_{nmij} + K_{nmij})\, d\sigma^{ij}, \text{ когда } f = 0,\ df = 0 \text{ и } d'f > 0 \tag{2.1}$$

$$d\varepsilon_{nm} = C_{nmij}\, d\sigma^{ij}, \text{ когда } f = 0 \text{ и } df \equiv d'f \leqslant 0 \text{ или } f < 0$$

$$K_{nmij} = -\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma^{\alpha\beta}}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^p} + A_s^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial \chi_s}\right)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \sigma^{nm}}\frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} \tag{2.2}$$

$$K_{nmij} = -\left(1 + B_s \frac{\partial f}{\partial \chi_s}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^p}\frac{\partial f}{\partial \sigma^{\alpha\beta}}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \sigma^{nm}}\frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} \tag{2.3}$$

В (2.1) введем тензор K, ковариантные составляющие которого в случае (1.5) определяются из (2.2), а в случае (1.6) — из (2.3)

В результате обращения (2.1) можно представить в виде:

$$d\sigma^{ij} = E_p^{ijnm} d\varepsilon_{nm}, \text{ когда } f = 0,\ df = 0 \text{ и } d'f > 0 \tag{2.4}$$

$$d\sigma^{ij} = E^{ijmn} d\varepsilon_{nm}, \text{ когда } f = 0 \text{ и } df \equiv d'f \leqslant 0 \text{ или } f < 0$$

$$E_p^{kqnm}(C_{nmij} + K_{nmij}) = g_i^{\,k} g_j^{\,q} \tag{2.5}$$

$$E^{kqnm} C_{nmij} = g_i^{\,k} g_j^{\,q} \tag{2.6}$$

Заметим, что тензор E, контравариантные составляющие которого вычисляются в результате решения системы (2.6), является тензором модулей упругости (линейного анизотропного упругого тела), представление которого для различных классов анизотропии приведено в известных курсах теории упругости. Таким образом, вопрос об обращении соотношений (2.1) при известном тензоре E сводится к определению контравариантных составляющих тензора E_p в результате решения системы уравнений (2.5) при условии (2.6).

Тензоры E, C, K и E_p имеют следующие свойства:

$$E^{kqnm} = E^{qknm} = E^{kqmn} = E^{nmkq}, \quad C_{nmij} = C_{mnij} = C_{nmji} = C_{ijnm} \tag{2.7}$$

$$K_{nmij} = K_{mnij} = K_{nmji} = K_{ijnm}, \quad E_p^{kqnm} = E_p^{qknm} = E_p^{kqmn} = E_p^{nmkq}$$

3. Перейдем к вычислению составляющих тензора E_p. Заметим, что из выражений (2.2) и (2.3) следует, что составляющие тензора K можно определить в форме

$$K_{nmij} = -M_{nm} M_{ij} \tag{3.1}$$

$$(3.2)\qquad M_{nm} = \left[\frac{\partial f}{\partial\sigma^{\alpha\beta}}\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^{p}_{\alpha\beta}} + A_s^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial\chi_s}\right)\right]^{-1/2}\frac{\partial f}{\partial\sigma^{nm}}$$

$$(3.3)\qquad M_{nm} = \left[\left(1 + B_s\frac{\partial f}{\partial\chi_s}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^{p}_{\alpha\beta}}\frac{\partial f}{\partial\sigma^{\alpha\beta}}\right)^{-1}\right]^{1/2}\frac{\partial f}{\partial\sigma^{nm}}$$

(составляющие тензора M в (2.2) имеют вид (3.2), а в (2.3) — вид (3.3)).

Вводя обозначения (3.1), для определения контравариантных составляющих тензора E_p получаем из (2.5) систему уравнений (2.6). Решение этой системы будем искать в виде

$$(3.4)\qquad E_p^{kqnm} = E^{kqnm} + zE^{kqt_1t_2}M_{t_1t_2}E^{nmt_3t_4}M_{t_3t_4}$$

где z — неизвестная скалярная функция. Подставляя (3.4) в (2.5) и учитывая при этом (3.1), (2.6) и свойства (2.7) тензоров E и C, после ряда преобразований получаем $E^{kqnm}M_{nm}M_{ij}[1 - z(1 - E^{t_1t_2t_3t_4}M_{t_1t_2}M_{t_3t_4})] = 0$.

Отсюда следует, что

$$(3.5)\qquad z = (1 - E^{t_1t_2t_3t_4}M_{t_1t_2}M_{t_3t_4})^{-1}$$

Отметим, что решение (3.4), (3.5) не имеет смысла для тех процессов деформирования, для которых выполняются условия обращения в нуль выражения в скобках в (3.5). Учитывая выражения (3.1), этим условиям можно придать следующий вид:

$$(3.6)\qquad E^{kqnm}K_{nmkq} = -1$$

Проанализируем случаи, когда могут выполняться условия (3.6). Из выражений (2.1) — (2.3) следует, что тензор K характеризует приращение пластических деформаций упрочняющегося тела, а из условий (3.6) следует, что составляющие тензора K должны выражаться только через составляющие тензора E, характеризующего приращения упругих деформаций. Таким образом, решение в виде (3.4), (3.5) не имеет смысла лишь в случае, когда составляющие тензора K, характеризующие приращения пластических деформаций в упрочняющемся теле, выражаются только через составляющие тензора E модулей упругости этого же тела независимо от характера упрощения и, что самое главное, от величины напряжений и пластических деформаций.

По-видимому, этот случай может иметь место лишь для отдельных процессов деформирования, не характерных для упрочняющихся тел. Так, из сравнения (2.6) и (3.6) получаем, что условия (3.6) будут выполняться в случае, когда

$$(3.7)\qquad K_{nmkq} = -C_{nmkq}$$

Из (1.1), (1.2) и (3.1) и первого выражения (2.1) следует, что при активном нагружении приращения пластических деформаций по величине равны соответствующим приращениям упругих деформаций и противоположны по знаку, приращения же полных деформаций при этом равны нулю. Такой процесс деформирования, по-видимому, лишен смысла.

Следовательно, в общем случае условия (3.6) не должны выполняться для пластических упрочняющихся тел, а составляющие тензора E_p в (2.4) согласно (3.4) и (3.5) можно представить в следующем виде:

$$E_p^{ijmn} = E^{ijnm} - E^{ijt_1t_2} M_{t_1t_2} E^{nmt_3t_4} M_{t_3t_4} (E^{\alpha\beta\gamma\delta} M_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} - 1)^{-1} \tag{3.8}$$

Таким образом, когда задана функция нагружения в виде (1.4), то основные соотношения теории пластического течения упрочняющихся тел в окрестности регулярной точки поверхности нагружения можно представить в одной из следующих двух форм. Первая форма имеет вид (2.1) с учетом (3.1); эта форма в несколько иных обозначениях рассмотрена в работах [1, 2] и др. Вторую форму, являющуюся обращением первой, согласно (2.4) и (3.8) можно представить в следующем виде:

$$d\sigma^{ij} = (E^{ijnm} - E_*^{ijnm})\, d\varepsilon_{nm}, \quad \text{когда } f = 0,\ df = 0 \text{ и } d'f > 0 \tag{3.9}$$

$$d\sigma^{ij} = E^{ijnm}\, d\varepsilon_{nm}, \quad \text{когда } f = 0 \text{ и } df \equiv d'f \leqslant 0 \text{ или } f < 0$$

В (3.9) введен тензор E_*, контравариантные составляющие которого определяются из выражений

$$E_*^{ijnm} = E^{ijt_1t_2} M_{t_1t_2} E^{nmt_3t_4} M_{t_3t_4} (E^{\alpha\beta\gamma\delta} M_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} - 1)^{-1} \tag{3.10}$$

В (2.1) и (3.1), а также (3.9) и (3.10) составляющие тензора M определяются из выражений (3.2), если дифференциальные зависимости для параметров упрочнения имеют вид (1.5), и из выражений (3.3), если эти зависимости имеют вид (1.6).

Выражения (3.9) и (3.10) получены для анизотропного тела с произвольным упрочнением и содержат ряд частных случаев, некоторые из них рассмотрим ниже.

4. Рассмотрим первоначально изотропное тело с произвольным упрочнением. В этом случае имеют место следующие выражения:

$$E^{ijnm} = \lambda g^{ij} g^{nm} + \mu (g^{in} g^{jm} + g^{im} g^{jn}) \tag{4.1}$$

$$C_{nmij} = \frac{1}{2\mu}\left(g_{ni} g_{mj} - \frac{\nu}{1-\nu} g_{nm} g_{ij}\right) \tag{4.2}$$

Подставляя (4.1) в (3.10), после ряда преобразований получаем (A_i^M — алгебраические инварианты тензора M)

$$E_*^{ijnm} = [\lambda^2 g^{ij} g^{nm} (A_1^M)^2 + 2\lambda\mu (g^{ij} M^{nm} + g^{nm} M^{ij}) A_1^M + \tag{4.3}$$
$$+ 4\mu^2 M^{ij} M^{nm}] [2\mu A_2^M + \lambda (A_1^M)^2 - 1]^{-1}$$

$$A_1^M = g^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}, \quad A_2^M = M_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \tag{4.4}$$

Таким образом, в случае, первоначально изотропного тела с произвольным упрочнением первая форма основных соотношений имеет вид (2.1) с учетом (4.2) и (3.1), а вторая форма имеет вид (3.9) с учетом (4.1) и (4.3). Дальнейшие упрощения (частные случаи) можно получить, если конкретизировать вид функции нагружения.

В качестве примера рассмотрим функцию нагружения, соответствующую условию пластичности Мизеса. Представим ее в следующем виде:

$$f = A_2'^{\sigma} - \varphi(\chi) \tag{4.5}$$

$A_2'^{\sigma}$ — второй алгебраический инвариант девиатора тензора напряжений, $\sigma'^{\alpha\beta}$ —

составляющие девиатора тензора напряжений, χ — параметр упрочнения). Согласно (4.4) можем записать второй алгебраический инвариант через составляющие девиатора тензора напряжений $A_2'^{\sigma} = \sigma'^{\alpha\beta}\sigma'_{\alpha\beta}$.

Следуя работам [1, 2, 5], в качестве параметра упрочнения выберем работу пластических деформаций, тогда $d\chi = \sigma^{ij} de^p_{ij}$.

Сравнивая это с выражением (1.5), получаем $A^{ij} \equiv \sigma^{ij}$.

Из (4.5) и (3.2) после преобразований получаем следующее выражение:

$$M_{nm} = \left(-\frac{1}{2} A_2'^{\sigma} \frac{d\varphi}{d\chi} \right)^{-1/2} \sigma'_{nm}$$

В этом случае из (3.1) и (3.2) находим K_{nmij} и из (4.3), (4.4) и (4.6) — E_*^{ijnm}

$$K_{nmij} = 2 \left(A_2'^{\sigma} \frac{\partial\varphi}{d\chi} \right)^{-1} \sigma'_{nm}\sigma'_{ij} \tag{4.6}$$

$$E_*^{ijnm} = 8\mu\mu \Big/ \frac{d\varphi}{d\chi} \left(1 + 4\mu \Big/ \frac{d\varphi}{d\chi} \right)^{-1} \frac{\sigma'^{ij}\sigma'^{nm}}{A_2'^{\sigma}} \tag{4.7}$$

Таким образом, для первоначально изотропного тела с функцией нагружения в виде (4.5) основные соотношения в первой форме имеют вид (2.1), где введены обозначения (4.2) и (4.6), и во второй форме имеют вид (3.9), где введены обозначения (4.1) и (4.7). В несколько других обозначениях основные соотношения в первой форме приведены в [5]. Основные соотношения во второй форме для функции нагружения в виде (4.5) здесь приведены в качестве иллюстрации обращения (3.9) и (3.10) для произвольной функции нагружения.

В случае функции нагружения в виде (4.5) основным соотношениям можно придать еще другой вид. С этой целью введем следующие обозначения: E' — касательный модуль на диаграмме одноосного растяжения, σ_u — интенсивность напряжений. Следуя [5], будем считать, что работа пластических деформаций полностью определяется интенсивностью напряжений. В этом случае по аналогии с [5] можно получить

$$M_{km} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{E} - \frac{1}{E'}} \frac{\sigma'_{km}}{\sigma_u}, \quad \sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij}\sigma'^{ij}} \tag{4.8}$$

Подставляя (4.12) в (4.3), после ряда преобразований получаем

$$E_*^{ijnm} = \frac{9}{2} \mu \frac{\sigma'^{ij}\sigma'^{nm}}{\sigma_u^2} \left(\frac{E}{E'} - 1 \right) \left[1 + \nu + \frac{2}{3} \left(\frac{E}{E'} - 1 \right) \right]^{-1}$$

Аналогично получим основные соотношения и для других функций нагружения.

Поступила 28 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
4. *Клюшников В. Д.* Бифуркация процесса деформирования и концепция продолжающегося нагружения. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5.
5. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.