Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3:534.1

ПЛОСКИЕ КОРОТКОВОЛНОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ВЫПУКЛОЙ ГРАНИЦЫ УПРУГОГО ТЕЛА

А. Л. Попов, Г. Н. Чернышев

(Москва)

Рассматриваются коротковолновые колебания плоского упругого тела, сосредоточенные в окрестности выпуклой гладкой границы. Строится асимптотический процесс интегрирования динамических уравнений плоской теории упругости. Получены выражения для собственных функций и частот коротковолновых колебаний в случаях свободной и закрепленной границ.

Для изучения коротковолновых (высокочастотных) колебаний применяются различные асимптотические методы, основанные, в частности, на лучевом методе геометрической оптики. Систематизированное изложение лучевого метода и его развитие в краевых задачах математической физики представлено в работах [1, 2]. Этим методом исследуется асимптотическое поведение собственных функций и собственных чисел оператора Лапласа при больших значениях собственных чисел.

Распространение лучевых представлений на высокочастотные упругие колебания, по-видимому, впервые осуществлено в работе [3] применительно к задаче об отражении цилиндрической волны от границы полупространства. В последующих работах при помощи лучевого метода решались разнообразные внешние задачи о высокочастотных колебаниях в упругой среде. Обширная библиография по этому вопросу приведена в обзоре [4]. Однако до настоящего времени не решена задача о свободных высокочастотных колебаниях упругой среды, заполняющей ограниченную область, когда колебания распространяются на некоторую глубину внутрь области. Общие теоретические исследования, выполненные в работах [5−7], также не позволяют получить достаточно простых конечных результатов.

Ниже дается обобщение асимптотического метода, предложенного в работе [2], на решение основных внутренних динамических задач плоской теории упругости для областей с выпуклыми гладкими границами в случае установившихся свободных колебаний. Решение строится для коротковолновых колебаний, сосредоточенных в узкой полосе вблизи границы. Эта полоса заключена между границей тела и каустикой-линией, за которой (по направлению вглубь тела) колебания экспоненциально затухают. Как доказано в работе [1], требование выпуклости границы является необходимым условием возникновения подобных колебаний.

1. Предположим, что изотропная и однородная упругая среда заполняет конечную односвязную область G, ограниченную выпуклой замкнутой кривой Γ. Координаты точек границы $x(s)$ и $y(s)$ условимся считать достаточное число раз дифференцируемыми по дуге s.

При установившихся колебаниях компоненты вектора смещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в случае плоской деформации выражаются через продольный и поперечный потенциалы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Потенциалы φ и ψ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \frac{\omega^2}{c_1^2}\varphi = 0, \quad \Delta\psi + \frac{\omega^2}{c_2^2}\psi = 0 \tag{1.1}$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

где ρ, λ, μ — плотность и постоянные Ляме среды, ω — частота свободных колебаний.

Коротковолновые колебания в окрестности границы будем рассматривать в естественной системе координат (s, n), где n — нормаль к границе Γ, s — длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от начальной точки. За положительное направление нормали примем направление изнутри G. Обход Γ зададим по часовой стрелке. Очевидно, координаты (s, n) ортогональны. связь между декартовой и естественной системами координат

$$x = x(s) - ny'(s), \quad y = y(s) + nx'(s)$$

В качестве граничных условий возьмем наиболее распространенные, отвечающие первой и второй основным краевым задачам плоской теории упругости. Это соответственно условия для закрепленной и свободной границ, которые в координатах (s, n) выражаются через потенциалы φ и ψ в виде:

для закрепленной границы

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial s}\right|_{n=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{n=0} = 0 \tag{1.2}$$

для свободной границы

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\,\partial s} - \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{n=0} = 0 \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial s} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial\psi}{\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\right|_{n=0} = 0$$

где $r = r(s)$ — радиус кривизны границы.

Ввиду выпуклости границы, радиус кривизны $r(s)$ считаем всюду положительным.

2. В работах [1, 2] для уравнения Гельмгольца построены решения, соответствующие коротковолновым колебаниям, локализованным в узкой пограничной зоне. Форма решения уравнения Гельмгольца в произвольной области выбиралась исходя из анализа эталонной задачи для круга. Это решение имеет вид экспоненты, умноженной на функцию Эйри $\mathrm{Ai}(z)$.

По аналогии с работами [1, 2] принимаем в качестве эталонной задачу для круглой области. Однако даже в этом простейшем случае граничные условия (1.2) или (1.3) не разделяются на отдельные условия для функций φ и ψ. Следовательно, уравнения (1.1) образуют систему четвертого порядка. В то же время эталонная задача допускает разделение переменных. Положим

$$\varphi = \Phi(r)e^{in\theta}, \quad \psi = \Psi(r)e^{in\theta} \tag{2.1}$$

где (r, θ) — полярные координаты, $n \gg 1$ — число полуволн в окружном направлении. В результате подстановки (2.1) в (1.1) приходим к системе уравнений Бесселя

$$\Phi'' + r^{-1}\Phi' + (\omega^2 c_1^{-2} - n^2 r^{-2})\Phi = 0 \tag{2.2}$$
$$\Psi'' + r^{-1}\Psi' + (\omega^2 c_2^{-2} - n^2 r^{-2})\Psi = 0$$

Ищем решение системы (2.2) в определенном диапазоне частот, который удовлетворяет условию

$$c_2 \leqslant \frac{\omega}{n} r < c_1 \tag{2.3}$$

В диапазоне частот (2.3), и только в нем, осциллирующие интегралы уравнений (2.2) сосредоточены в узкой полосе вблизи границы. Действительно, решение первого уравнения системы (2.2) при условии (2.3) выражается через асимптотическое разложение функции Бесселя $J_n(\omega r / c_1)$, когда аргумент и индекс — большие величины и их разность: $(n - \omega r / c_1) \gg 1$. Решение второго уравнения системы (2.2) выражается через асимптотическое разложение функции Бесселя $J_n(\omega r / c_2)$, когда аргумент больше либо равен индексу. Асимптотическая формула для функции $J_n(\omega r / c_1)$ при указанных ограничениях имеет вид [8]

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2(n-x)}{3x}}\, K_{1/3}(z), \quad x = \frac{\omega}{c_1} r, \quad z = \frac{[2(n-x)]^{3/2}}{3x^{1/2}} \tag{2.4}$$
$$K_{1/3}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}\left[1 - \frac{1 - 4/9}{8z} + \frac{(1 - 4/9)(9 - 4/9)}{128z^2} + \ldots\right]$$

Из выражения (2.4) видно, что интегралы быстро затухают при удалении от границы круговой области.

Для функции $J_n(\omega r / c_2)$ воспользуемся равномерным асимптотическим представлением через функцию Эйри [1]

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3} \mathrm{Ai}(t), \quad t = (n - x)\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}, \quad x = \frac{\omega}{c_2} r \tag{2.5}$$

Разложение (2.5), согласно свойствам функции Эйри, дает интегралы Ψ, осциллирующие в полосе $r_* < r \leqslant R$, где R — радиус границы, $r_* = nc_2 / \omega$ и экспоненциально затухающие при $r < r_*$. Из разложений (2.4) и (2.5) можно заметить, что во всяком интервале частот, отличном от (2.3), интегралы Φ и (или) Ψ либо равномерно убывают по экспоненте непосредственно от границы, либо осциллируют на значительном удалении от нее.

Опираясь на известные эталонные разложения (2.4), (2.5) в круговой области, представим соответственно решения уравнений (1.1) для области с произвольной формой выпуклой границы в виде

$$\varphi = F e^{pf}, \quad \psi = \mathrm{Ai}\,(p^{2/3}\Psi)\, e^{ip\Phi} \tag{2.6}$$

где F, f, Ψ, Φ — неизвестные функции, p — неизвестный большой частотный параметр. Заметим, что в случае круговой границы решения (2.6) совпадают с асимптотическими представлениями точных решений.

3. Подставим выражения (2.6) в систему (1.1). Сокращая на экспоненциальные множители и учитывая линейную независимость функций $\mathrm{Ai}\,(z)$

и $\mathrm{Ai}'(z)$, получим

$$
(3.1)\qquad
\begin{aligned}
&p^2[\Psi(\nabla\Psi)^2-(\nabla\Phi)^2]+ip\Delta\Phi+\omega^2c_2^{-2}=0\\
&2ip^{5/3}(\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi)+p^{2/3}\Delta\Psi=0\\
&p^2(\nabla f)^2F+p[F\Delta f+2(\nabla f\cdot\nabla F)]+\Delta F-\omega^2c_1^{-2}F=0\\
&\Delta=a^{-1}\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial n^2}+a^{-1/2}\left[\frac{\partial}{\partial n}(a^{-1/2})\frac{\partial}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial s}(a^{1/2})\frac{\partial}{\partial s}\right]\\
&\nabla=a^{-1/2}\mathbf{e}_s\frac{\partial}{\partial s}+\mathbf{e}_n\frac{\partial}{\partial n},\qquad a=\left(1+\frac{n}{r}\right)^2
\end{aligned}
$$

Неизвестные функции Ψ, Φ, F и частоту ω ищем в виде разложений по обратным степеням большого частотного параметра

$$
(3.2)\qquad
\begin{aligned}
&\Psi=\sum_0\Psi_jp^{-j},\quad \Phi=\sum_0\Phi_jp^{-j},\quad \omega^2=p^2+\sum_0\varkappa_{-j+1}p^{-j+1}\\
&F=p^{-1/3}\sum_0F_j^{(-1/3)}p^{-j}+p^{-2/3}\sum_0F_j^{(-2/3)}p^{-j}+p^{-1}\sum_0F_j^{(-1)}p^{-j}
\end{aligned}
$$

Представление F комбинацией трех различных разложений по дробным степеням p следует из необходимости оперировать в общих граничных условиях величинами одинаковых порядковых малости.

Подставим разложения (3.2) в уравнения (3.1). Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях p, получим рекуррентные системы уравнений

$$
(3.3)\qquad
\begin{aligned}
&\Psi_0(\nabla\Psi_0)^2-(\nabla\Phi_0)^2+c_2^{-2}=0,\quad (\nabla\Psi_0\cdot\nabla\Phi_0)=0\\
&\Psi_j(\nabla\Psi_0)^2+2\Psi_0(\nabla\Psi_0\cdot\nabla\Psi_j)-2(\nabla\Phi_0\cdot\nabla\Phi_j)+c_2^{-2}\varkappa_{-j+2}=Q_{j-1}\\
&(\nabla\Phi_0\cdot\nabla\Psi_j)+(\nabla\Psi_0\cdot\nabla\Phi_j)=N_{j-1}\quad (j=1,2,\ldots)\\
&(\nabla f)^2-c_1^{-2}=0\\
&2(\nabla f\cdot\nabla F_0^{(-l/3)})+F_0^{(-l/3)}(\Delta f-\varkappa_1c_1^{-2})=0\quad (l=1,2,3)\\
&(\nabla f\cdot\nabla F_j^{(-l/3)})+F_j^{(-l/3)}\Delta f-c_1^{-2}\sum_{m=0}^{m=j}\varkappa_{j-m}F_{j-m}^{(-l/3)}=R_{j-1}
\end{aligned}
$$

Правые части систем (3.3) полностью определяются решениями уравнений низших приближений.

4. Граничные условия для функций Ψ, Φ, F, f непосредственно следуют из условий (1.2), (1.3) при подстановке в них выражений (2.6).

Считая изменяемость ψ и φ вдоль границы одинаковой, получим при $n=0$:

для закрепленной границы

$$
(4.1)\qquad
\begin{aligned}
&ip\Phi_{,n}\mathrm{Ai}+p^{2/3}\Psi_{,n}\mathrm{Ai}'+pf_{,s}F+F_{,s}=0\\
&ip\Phi_{,s}\mathrm{Ai}+p^{2/3}\Psi_{,s}\mathrm{Ai}'-pf_{,n}F-F_{,n}=0
\end{aligned}
$$

для свободной границы

$$
(4.2)\qquad
\begin{aligned}
&\{p[\Psi(\nabla_*\Psi\cdot\nabla\Psi)-(\nabla_*\Phi\cdot\nabla\Phi)]+i\Delta_*\Phi\}\mathrm{Ai}+\\
&+p^{2/3}[2i(\nabla_*\Phi\cdot\nabla\Psi)+p^{-1}\Delta_*\Psi]\mathrm{Ai}'+[p(\nabla_1f\cdot\nabla f)+\Delta_1f]F+\\
&+2(\nabla_1f\nabla F)+p^{-1}\Delta_1F=0
\end{aligned}
$$

$$\{p[(\nabla_1\Phi\cdot\nabla\Phi)-\Psi(\nabla_1\Psi\cdot\nabla\Psi)]-i\Delta_1\Phi\}\operatorname{Ai}-p^{2/3}[2i\times$$
$$\times(\nabla_1\Psi\cdot\nabla\Phi)+p^{-1}\Delta_1\Psi]\operatorname{Ai}'+[p(\nabla_*f\cdot\nabla f)+\Delta_* f]F+$$
$$+2(\nabla_* f\cdot\nabla F)+p^{-1}\Delta_* F=0$$

$$\nabla_*=\mathbf{e}_n\frac{\partial}{\partial n}-\mathbf{e}_s\frac{\partial}{\partial s},\quad \nabla_1=\mathbf{e}_n\frac{\partial}{\partial s}+\mathbf{e}_s\frac{\partial}{\partial n}$$

$$\Delta_*=\frac{\partial^2}{\partial n^2}-\frac{\partial^2}{\partial s^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n},\quad \Delta_1=2\left(\frac{\partial^2}{\partial n\partial s}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

Запятая перед n или s означает частную производную по соответствующей координате.

Полученные условия содержат функции Ai и Ai′. Чтобы построить систему граничных условий, отвечающую рекуррентным системам уравнений (3.3), представим Ai и Ai′ в виде разложений по степеням разности $p^{2/3}(\Psi-\Psi_0)$

$$\operatorname{Ai}(p^{2/3}\Psi)=\operatorname{Ai}(p^{2/3}\Psi_0)+\operatorname{Ai}'(p^{2/3}\Psi_0)(p^{-1/3}\Psi_1+\ldots)+\ldots \tag{4.3}$$
$$\operatorname{Ai}'(p^{2/3}\Psi)=\operatorname{Ai}'(p^{2/3}\Psi_0)+\operatorname{Ai}''(p^{2/3}\Psi_0)(p^{-1/3}\Psi_1+\ldots)+\ldots$$

Заменяя в условиях (4.1), (4.2) неизвестные функции, частоту и функции Эйри разложениями (3.2), (4.3) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях p, приходим к системе граничных условий для последовательных приближений.

Выпишем сначала в явном виде граничные условия в первом приближении, которые для обеих задач совпадают и имеют вид

$$\operatorname{Ai}(p^{2/3}\Psi_0)\,|_{n=0}=0$$

откуда сразу следует, что

$$\Psi_0\,|_{\,n=0}=p^{-2/3}t_q \tag{4.4}$$

где t_q, $(q=1,2,\ldots)$ — один из первых корней функции Эйри.

Кроме того, требования периодичности решений и одинаковой изменяемости их вдоль границы приводят к условиям (при $n=0$)

$$i\Phi=f,\quad [p\Phi]=2\pi M \tag{4.5}$$

где $M\gg 1$ — целое число. Квадратные скобки означают приращение функции при обходе граничного контура.

5. Строим решения рекуррентных систем уравнений. Так как решения ищутся в узкой полосе $|\,n\,|<1$, то функции Ψ_j, Φ_j, $F_j^{(-l/3)}$, f и коэффициент a можно представить в виде разложений Тейлора по координате n

$$\Psi_j=\sum_0\Psi_{jk}n^k,\quad \Phi_j=\sum_0\Phi_{jk}n^k,\quad f=\sum_0 f_k n^k \tag{5.1}$$
$$F_j^{(-l/3)}=\sum_0 F_{jk}^{(-l/3)}n^k,\quad a=1+2a_1n+a_1^2n^2,\quad a_1=r^{-1}$$

Подстановка разложений (5.1) в систему дифференциальных уравнений (3.3) сводит ее к алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов в разложениях неизвестных функций и их производных по n.

Рассмотрим решение уравнений двух первых приближений, которых достаточно для определения частот собственных колебаний с точностью $O(p^{-1})$.

Уравнения первого приближения

(5.2) $$f_{,n}^2 + a^{-1}f_{,s}^2 - c_1^{-2} = 0, \quad \Phi_{0,n}\Psi_{0,n} + a^{-1}\Phi_{0,s}\Psi_{0,s} = 0$$
$$\Psi_0(\Psi_{0,n}^2 + a^{-1}\Psi_{0,s}^2) - \Phi_{0,n}^2 - a^{-1}\Phi_{0,s}^2 + c_2^{-2} = 0$$

Заменим функции Ψ_0, Φ_0, f соответствующими разложениями (5.1) и выпишем из полученной рекуррентной системы уравнения для членов, пропорциональных n^k ($k = 0, 1, 2$), опустив те из них, которые не используются при нахождении частоты с требуемой точностью

(5.3) $$f_1^2 + f_{0,s}^2 - c_1^{-2} = 0, \quad \varepsilon\Psi_{01}^2 - \Phi_{00,s}^2 + c_2^{-2} = 0, \quad \Phi_{01} = 0$$
$$\Psi_{01}^3 + 2a_1c_2^{-2} + 2\varepsilon\Psi_{01}(a_1\Psi_{01} + \Psi_{02}) = 0, \quad \Phi_{00,s}\Psi_{01,s} + {}$$
$$+ 2\Phi_{02}\Psi_{01} = 0$$
$$\Psi_{01}^2(5\Psi_{02} + 2a_1\Psi_{01}) - 4\Phi_{02}^2 - 2\Phi_{00,s}\Phi_{02,s} + a_1^2c_2^{-2} + {}$$
$$+ \varepsilon[\Psi_{01}(a_1^2\Psi_{01} + 8a_1\Psi_{02} + 6\Psi_{03}) + 4\Psi_{02}^2 + \Psi_{01,s}^2] = 0$$
$$\varepsilon = t_q p^{-2/3}$$

Как видно из уравнений (5.3), коэффициенты разложений неизвестных функций (5.1) зависят от малого параметра ε. Представим их в форме асимптотических сумм

(5.4) $$\Phi_{jk} = \sum_0 \Phi_{jkm}\varepsilon^m, \quad \Psi_{jk} = \sum_0 \Psi_{jkm}\varepsilon^m, \quad \Psi_{00} = \varepsilon$$
$$f_k = \sum_0 f_{km}\varepsilon^m, \quad F_{jk}^{(-l/3)} = \sum_0 F_{jkm}^{(-l/3)}\varepsilon^m$$
$$(j, k = 0, 1, 2, \ldots; l = 1, 2, 3)$$

Подставляя суммы (5.4) в уравнения (5.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим новую рекуррентную систему уравнений. Приведем здесь необходимые уравнения трех приближений по ε для членов, пропорциональных n^0, уравнения двух приближений по ε для членов, пропорциональных n^1, и уравнения первого приближения по ε для членов, пропорциональных n^2

(5.5) $$\Phi_{000,s}^2 - c_2^{-2} = 0, \quad f_{10}^2 + f_{00,s}^2 - c_1^{-2} = 0, \quad \Psi_{010}^3 + 2a_1c_2^{-2} = 0$$
$$\Psi_{010}(2a_1 + 3\Psi_{011}) + 4\Psi_{020} = 0, \quad 2\Phi_{020}\Psi_{010} + c_2^{-1}\Psi_{010,s} = 0$$
$$2\Psi_{010}\Psi_{011} - 2c_2^{-1}\Phi_{002,s} - \Phi_{001,s}^2 = 0, \quad \Psi_{010}^2 - 2c_2^{-1}\Phi_{001,s} = 0$$
$$\Psi_{010}^2(2a_1\Psi_{010} + 5\Psi_{020}) - 4\Phi_{020}^2 - 2c_2^{-1}\Phi_{020,s} = 0$$

Непосредственным решением алгебраической системы (5.5) находим следующие приближения для неизвестных функций:

(5.6) $$\Phi_{000} = \pm c_2^{-1}s, \quad \Psi_{020} = {}^1/_5(2c_2)^{-2/3}r^{-4/3}[{}^4/_9(r')^2 - rr'' + 4]$$
$$\Phi_{001} = (2c_2)^{-1/3}\int_0^s r^{-2/3}(\tau)\,d\tau, \quad \Psi_{010} = -r^{-1/3}\left(\frac{2}{c_2^2}\right)^{1/3}$$
$$\Psi_{011} = \frac{2}{15}\left[\frac{4}{9}\frac{(r')^2}{r} - \frac{1}{3}r'' - \frac{1}{r}\right], \quad \Phi_{020} = \frac{r'}{6c_2r}$$
$$\Phi_{002} = \frac{1}{15}\left(\frac{c_2}{4}\right)^{1/3}\int_0^s r^{-4/3}(\tau)\left[\frac{4}{3}r(\tau)r''(\tau) - \frac{16}{3}(r'(\tau))^2 - \frac{7}{2}\right]$$

Функция $f_{00}(s)$ определяется из условия одинаковой изменяемости решений вдоль границы: $f_{00} = i\,\Phi_{000}$.

С учетом выражений (5.6) получим

$$f_{00} = \pm\, i c_2^{-1} s, \quad f_{10} = (c_1^{-2} + c_2^{-2})^{1/2} \tag{5.7}$$

Положительный знак у f_{10} выбран для обеспечения быстрого затухания интегралов φ с удалением от границы.

Частотный параметр p определится из первого приближения условий периодичности (4.5)

$$[p\Phi_0] = 2\pi M, \quad M \gg 1$$

или в раскрытом виде

$$p\int_0^L \Phi_{000,\,s}ds + t_q p^{1/3}\int_0^L \Phi_{001,\,s}ds + t_q^2 p^{-1/3}\int_0^L \Phi_{002,\,s}ds + \ldots = 2\pi M \tag{5.8}$$

где L — длина граничного контура, $q = 1, 2, \ldots$; M — целое число. Подставляя выражения (5.6) для Φ_{00m} $(m = 0, 1, 2)$ в уравнение (5.8) и решая его методом последовательных приближений относительно p, находим

$$p = M\,(b_q^{(0)} + b_q^{(1)}M^{-2/3} + b_q^{(2)}M^{-4/3} + \ldots) \tag{5.9}$$

$$M \gg 1, \quad q = 1, 2, \ldots$$

$$b_q^{(0)} = 2\pi e_1, \quad b_q^{(1)} = e_1 e_2^{1/3} t_q \int_0^L r^{-2/3}(s)\,ds$$

$$b_q^{(2)} = \frac{7}{60} e_1 e_2^{-1/3} t_q^2 \int_0^L r^{-4/3}(s)\,ds, \quad e_1 = \frac{c_2}{L}, \quad e_2 = \frac{\pi}{L}$$

Отсюда видно, что величина частотного параметра, а вместе с ним и первое приближение собственной частоты колебаний не зависят от типа граничных условий.

По известным выражениям (5.6) функций Ψ_{00} и Ψ_{01} определим зону осцилляции интегралов ψ. Согласно свойствам функций Эйри $\mathrm{Ai}\,(t)$ кольцеобразная зона осцилляции интегралов (2.6) заключена между границей области, на которой $t = t_q$, и каустикой, где аргумент функции Эйри обращается в нуль $(t = 0)$. Так как в рассматриваемом случае $t = p^{2/3}\Psi$, то из условия $\Psi = 0$ с учетом разложений (3.2) и (5.1) получим в первом приближении уравнение каустики

$$n_* = -\Psi_{00}\Psi_{01}^{-1} \approx {}^1/_2\, t_q r^{1/3} (e_2 M)^{-2/3} \tag{5.10}$$

Следовательно, зона осцилляции удовлетворяет неравенствам

$$n_* \leqslant n < 0 \tag{5.11}$$

Из неравенств (5.11) вытекает условие выпуклости границы: $r(s) > 0$, так как зона осцилляции заключена внутри области $n < 0$, а в ней $t_q < 0$. Ширина зоны осцилляции имеет порядок $O\,(M^{-2/3})$. Этот результат согласуется с работами [1, 2].

Уравнения второго приближения

$$(5.12)\qquad \begin{aligned}&2\Psi_0(\nabla\Psi_0\cdot\nabla\Psi_1)+\Psi_1(\nabla\Psi_0)^2-2(\nabla\Phi_0\cdot\nabla\Phi_1)+\\&+\varkappa_1c_2^{-2}=-i\Delta\Phi_0\\&2i\,[(\nabla\Phi_1\cdot\nabla\Psi_0)+(\nabla\Phi_0\cdot\nabla\Psi_1)]=-\Delta\Psi_0\end{aligned}$$

Искомый параметр $\varkappa_1$, определяющий второе приближение собственной частоты, входит в первое уравнение (5.12). Подставим в это уравнение разложения (5.1), затем (5.4) и выделим члены, пропорциональные нулевым степеням n и ε. Получим

$$(5.13)\qquad 2\Phi_{100,\,s}-\Psi_{100}\Psi_{010}^2-\varkappa_1c_2^{-2}=2i\Phi_{020}$$

Для нахождения параметра $\varkappa_1$ используем второе приближение условий периодичности (4.5): $[\Phi_1]=0$. Подставляя в уравнение (5.13) известное выражение Φ_{020} и выполняя интегрирование с учетом периодичности радиуса кривизны граничного контура ($r(s+L)=r(s)$), получим

$$(5.14)\qquad \varkappa_1=-c_2e_1\int\limits_0^L\Psi_{100}(s)\,\Psi_{010}^2(s)\,ds$$

Неизвестную функцию $\Psi_{100}(s)$ определим из второго приближения граничных условий (4.1), (4.2). Эти условия в случаях свободной и закрепленной границ уже не будут совпадать, в отличие от первого приближения. Подставляя в (4.1) и (4.2) разложения (5.4), получим для коэффициентов, пропорциональных ε^0, следующие граничные условия:

закрепленная граница

$$(5.15)\qquad \begin{aligned}&f_{10}F_{000}^{(-1/3)}-i\Phi_{000,\,s}\Psi_{100}\,\mathrm{Ai}'(t_q)=0\\&f_{00,\,s}F_{000}^{(-1/3)}+\Psi_{010}\,\mathrm{Ai}'(t_q)=0\end{aligned}$$

свободный край

$$(5.16)\qquad \begin{aligned}&2f_{00,\,s}f_{10}F_{000}^{(-1/3)}+\Phi_{000,\,s}^2\Psi_{100}\,\mathrm{Ai}'(t_q)=0\\&(f_{10}^2-f_{00,\,s}^2)\,F_{000}^{(-1/3)}-2i\Phi_{000,\,s}\Psi_{010}\,\mathrm{Ai}'(t_q)=0\end{aligned}$$

Рассматривая (5.15), (5.16) как системы двух уравнений с двумя неизвестными $F_{000}^{(-1/3)}$, Ψ_{100}, находим, что для закрепленной границы

$$(5.17)\qquad \begin{aligned}&F_{000}^{(-1/3)}=-ie^{1/3}\,\mathrm{Ai}'(t_q),\ \Psi_{100}=-e^{1/3}(1+e_3^2)^{1/2}\\&e=2c_2/r,\ e_3=c_2/c_1\end{aligned}$$

Для свободного края

$$(5.18)\qquad \begin{aligned}&F_{000}^{(-1/3)}=-2ie^{1/3}(2+e_3^2)^{-1}\,\mathrm{Ai}'(t_q),\qquad \Psi_{100}=\\&=-4e^{1/3}(2+e_3^2)^{-1}(1+e_3^2)^{1/2}\end{aligned}$$

Подставляя формулу (5.17) и (5.18) в выражение (5.14), получим, что параметр $\varkappa_1$ для областей с закрепленной ($\varkappa_{1(*)}$) и свободной ($\varkappa_{1(0)}$) границами соответственно равен

$$\varkappa_{1(*)}=2e_1(1+e_3^2)^{1/2}\int\limits_0^L r^{-1}(s)\,ds$$

$$\varkappa_{1(0)}=8e_1(1+e_3^2)^{1/2}(2+e_3^2)^{-1}\int\limits_0^L r^{-1}(s)\,ds$$

Таким образом, в обеих задачах найдено второе приближение собственной частоты колебаний, которое позволяет определить частоту достаточно точно с погрешностью $O(p^{-1})$.

Третье и последующие приближения строятся аналогично. Из общих систем (3.3) выписываются уравнения следующего за найденным приближения и соответствующие им граничные условия. Подстановка в них разложений (5.1) сводит эти уравнения к линейной алгебраической системе, единственная трудность в решении которой — возрастающая от приближения к приближению громоздкость вычислений.

Поступила 1 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
2. *Лазуткин В. Ф.* Асимптотика собственных чисел оператора Лапласа и квазимоды. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1973, т. 37, вып. 2.
3. *Зволинский Н. В., Скуридин Г. А.* Об асимптотическом методе решения динамических задач теории упругости. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1956, № 2.
4. *Зволинский Н. В., Рейтман М. И., Шапиро Г. С.* Динамика деформируемых твердых тел. В сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., Физматгиз, 1972.
5. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
6. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
7. *Шерман Д. И.* О некоторых задачах теории установившихся колебаний. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9. № 4.
8. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.