Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3:534.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

И. И. Ворович, С. А. Солоп

(Ростов-на-Дону)

Вопросам существования периодических решений различных нелинейных уравнений механики сплошной среды посвящен ряд работ, например [1, 2]. В данной работе доказывается существование ω-периодического решения для нелинейных уравнений анизотропных неоднородных пологих оболочек переменной толщины с учетом затухания.

1. Основные соотношения. Пусть срединная поверхность оболочки S задается уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$, которое гомеоморфно отображает S на область Ω переменных α_1, α_2 с границей Γ. Рассматривается следующий вариант нелинейной теории для упругой анизотропной неоднородной пологой оболочки переменной толщины:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + k_{11}u_1 + {}^1/_2\psi_1^2 = A_1^{-1}u_{1\alpha_1} + A_{1\alpha_2}(A_1A_2)^{-1}u_2 + k_{11}u_3 + {}^1/_2\psi_1^2$$

$$2\varepsilon_{12} = 2e_{12} + 2k_{12}u_3 + \psi_1\psi_2 = A_1A_2^{-1}(u_1A_1^{-1})_{\alpha_2} +$$

$$+ A_2A_1^{-1}(u_2A_2^{-1})_{\alpha_1} + 2k_{12}u_3 + \psi_1\psi_2$$

$$2\varkappa_{12} = -A_1A_2^{-1}(\psi_1A_1^{-1})_{\alpha_2} - A_1^{-1}A_2(\psi_2A_2^{-1})_{\alpha_1}$$

$$\varkappa_{11} = -A_1^{-1}\psi_{1\alpha_1} - A_{1\alpha_2}\psi_2(A_1A_2)^{-1}, \quad \psi_1 = A_1^{-1}u_{3\alpha_1} \quad (1 \rightleftarrows 2)$$

$$T_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, M_{ij} = D_{ijkl}\varkappa_{kl}, D_{ijkl} = {}^1/_3h^2E_{ijkl}, E_{ijkl} = E_{klij} = E_{jikl}$$

(По поводу обозначений см. [3,4].)

Дифференциальные уравнения колебаний оболочки с учетом затухания можно представить в виде

$$\mathbf{u}_{tt} + \varepsilon\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{F} \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, $\mathbf{F}$ — известная вектор-функция времени, индекс t внизу всюду означает производную по t; подробный вид не зависящих явно от t линейной части уравнений (1.1) $\mathbf{Au}$ и нелинейной $\mathbf{Bu}$ имеется в [5].

Пусть оболочка находится под действием периодических по времени с периодом ω массовых сил $\mathbf{F}$. Ставится задача — найти вектор $\mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, t) = (u_1, u_2, u_3)$, $(\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega, -\infty < t < +\infty)$, удовлетворяющий уравнениям (1.1) и условиям

(1.2) $\quad u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma = 0$

(1.3) $\quad u_3|_\Gamma = \left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$

(1.4) $\quad \mathbf{u}(t+\omega) = \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}_t(t+\omega) = \mathbf{u}_t(t)$

2. Основные предположения. Пусть выполнены условия

1) Ω — конечная сумма ограниченных звездных областей,

2) Γ — контур класса Ляпунова $\Lambda_1(m, 0)$,

3) коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S $A_i \in L^\infty(\Omega)$, их производные $A_{i\alpha_j} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, 2$,

4) кривизны срединной поверхности $k_{ij} \in L^2(\Omega)^\infty$,

5) толщина оболочки $2h(\alpha_1, \alpha_2) \in L^\infty(\Omega)_\infty$,

6) упругие характеристики $E_{ijkl}(\alpha_1, \alpha_2) \in L^\infty(\Omega)$ и для всех симметричных тензоров $e_{ij}{}^\circ$ почти всюду выполняется неравенство

$$m_1 e_{ij}{}^\circ e_{ij}{}^\circ \leqslant E_{ijkl} e_{ij}{}^\circ e_{kl}{}^\circ \leqslant m_2 e_{ij}{}^\circ e_{ij}{}^\circ$$

7) функции A_i, h, E_{ijkl} ограничены снизу положительными постоянными.

Основные пространства.

Пространство $H_1(\Omega)$. Пространством $H_1(\Omega)$ называется гильбертово пространство, полученное замыканием множества C_1 функций $u_3 \in C^{(2)}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (1.3), (1.4) в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(u_3^{(1)} \cdot u_3^{(2)})_{H_1(\Omega)} = \int_\Omega D_{ijkl} \varkappa_{kl}^{(1)} \varkappa_{ij}^{(2)} d\Omega, \qquad d\Omega = A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

Пространство $H_2(\Omega)$. Пространством $H_2(\Omega)$ называется гильбертово пространство, полученное замыканием множества C_2 пар функций $\mathbf{u}^*(u_1, u_2) \in C^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (1.2), (1.4) в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(\mathbf{u}^{*(1)} \cdot \mathbf{u}^{*(2)})_{H_2(\Omega)} = \int_\Omega E_{ijkl} e_{kl}^{(1)} e_{ij}^{(2)} d\Omega$$

Пространство $H_3(\Omega)$. Пространством $H_3(\Omega)$ называется гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, таких, что $u_3 \in H_1(\Omega)$, $\mathbf{u}^* \in H_2(\Omega)$ с естественно введенным скалярным произведением $H_3 = H_1 \times H_2$.

Пространство X_1. Пространством X_1 называется гильбертово пространство, полученное замыканием множества $C_1 \times C_2$ в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(\mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)})_1 = \int_\Omega 2\rho h\,(u_1^{(1)} u_2^{(2)} + u_2^{(1)} u_2^{(2)} + u_3^{(1)} u_3^{(2)})\, d\Omega$$

где $\rho(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ — плотность материала оболочки.

Пространство $X_2(0, \omega)$. Пусть $E_1 = C_1 \times C_2$, E_2 — множество элементов $\mathbf{u}(t)$, зависящих от параметра t, таких, что $\mathbf{u} \in E_1$, $\mathbf{u}_t \in X_1$ при любом $-\infty < t < +\infty$, с конечными нормами

$$\max_t \|\mathbf{u}\|_1, \quad \max_t \|\mathbf{u}_t\|_1, \quad \int_0^\omega \|\mathbf{u}\|^2_{H_3(\Omega)}\, dt$$

Пространством X_2 $(0, \omega)$ называется замыкание множества E_2 в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(u^{(1)} \cdot u^{(2)})_{2,0,\omega} = \int_0^\omega [(\mathbf{u}_t^{(1)} \cdot \mathbf{u}_t^{(2)})_1 + (\mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)})_{H_3(\Omega)}]dt$$

Пусть E_3 $(0, \omega)$ — подмножество элементов из E_2, представимых в виде конечных сумм $\Sigma d_k(t)\,\varphi_k$, где $d_k(t) \in C^{(2)}(0, \omega)$, и удовлетворяют (1.4), $\varphi_k \in H_3(\Omega)$.

Как и в [5], доказываются леммы.

Лемма 1. $H_3(\Omega)$ есть пространство $W = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(\Omega)$, причем на $H_3(\Omega)$ нормы $H_3(\Omega)$ и W эквивалентны.

Лемма 2. В пространстве $H_3(\Omega)$ существует полная система векторов $\{\chi_m(\chi_{1m}, \chi_{2m}, \chi_{3m})\}$, которую можно считать ортогональной в $H_3(\Omega)$, ортонормированной в X_1 и такой, что если $(\chi_{ip}, \chi_{ip})_1 = 1$, то $(\chi_{jp} \cdot \chi_{jp})_1 = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, $p = 1, \ldots, n$, $j \neq i$.

Лемма 3. X_2 $(0, \omega)$ — сепарабельное гильбертово пространство и множество E_3 $(0, \omega)$ всюду плотно в нем.

Лемма 4. $\mathbf{u}_t$ как элемент X_1, $\mathbf{u}$ как элемент $H_3(\Omega)$ являются непрерывными почти всюду функциями $0 \leqslant t \leqslant \omega$.

3. Обобщенное решение и разрешимость задачи.

8) пусть выполнены условия

$$\mathbf{F}(t + \omega) = \mathbf{F}(t), \ \max_t \|\mathbf{F}\|_1 < \infty \ \ (\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3))$$

Известно, что уравнения движения оболочки можно выразить по принципу Гамильтона — Остроградского в виде

$$\int_0^\omega \Big\{-(\mathbf{u}_t{}^* \cdot \delta\mathbf{u}_t{}^*)_1 + \varepsilon(\mathbf{u}_t{}^* \cdot \delta\mathbf{u}^*)_1 + \\ + \int_\Omega T_{ij}(\mathbf{u})\, e_{ij}(\delta\mathbf{u}^*)\, d\Omega - (\mathbf{F}^* \cdot \delta\mathbf{u}^*)_1\Big\}\, dt = 0$$

$$\int_0^\omega \Big\{-(u_{3t} \cdot \delta u_{3t})_1 + \varepsilon(u_{3t} \cdot \delta u_3)_1 + \int_\omega \Big\{T_{ij}(\mathbf{u})\Big[k_{ij}\delta u_3 + \frac{1}{2}\psi_i(u_3)\psi_j(\delta u_3) + \\ + \frac{1}{2}\psi_j(u_3)\psi_i(\delta u_3)\Big] + M_{ij}(\mathbf{u})\,\varkappa_{ij}(\delta\mathbf{u})\Big\}\, d\Omega - (F_3 \cdot \delta u_3)_1\Big\}\, dt = 0$$

Здесь $\delta\mathbf{u} = (\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3)$ — возможное перемещение.

Определение. Обобщенным ω-периодическим решением задачи (1.1)—(1.3) называется вектор-функция $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющая условиям

а) $\mathbf{u}(t + \omega) = \mathbf{u}_t(t)$, $\mathbf{u}_t(t + \omega) = \mathbf{u}_t(t)$,

б) $\max_t \|\mathbf{u}_t\|_1$, $\max_t \|\mathbf{u}\|_{H_3(\Omega)}$, $\|\mathbf{u}\|_{2,0,\omega}$ конечны,

в) для любого $\delta\mathbf{u} \in H_3(\Omega)$, сильно дифференцируемого по t, выполняются равенства Гамильтона — Остроградского.

Обычным приемом вариационного исчисления можно свести задачу отыскания обобщенного ω-периодического решения к разрешимости операторного уравнения (1.1) в пространстве $X_2(0, \omega)$.

Для приближенного отыскания обобщенного решения используется метод Бубнова — Галёркина в следующей форме. Строится последовательность $\{\mathbf{u}_n\}$ вида $\mathbf{u}_n = q_1(t)\chi_1 + q_2(t)\chi_2 + \ldots + q_n(t)\chi_n$, где χ_m определены в лемме 2. Вектор $(\mathbf{q}_n(t), \mathbf{q}_{nt}(t)) = (q_1(t), \ldots q_n(t), q_{1t}(t), \ldots q_{nt}(t))$ находится как периодическое решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\overset{*}{\mathbf{u}}_{ntt}\cdot\overset{*}{\chi}_m)_1 + \varepsilon(\overset{*}{\mathbf{u}}_{nt}\cdot\overset{*}{\chi}_m)_1 + \int_\Omega T_{ij}(\mathbf{u}_n)e_{ij}(\chi_m{}^*)\,d\Omega - (\mathbf{F}^*\cdot\chi_m{}^*)_1 = 0 \tag{3.1}$$

$$(u_{3ntt}\cdot\chi_{3m})_1 + \varepsilon(u_{3nt}\cdot\chi_{3m})_1 + \int_\Omega \Big\{T_{ij}(\mathbf{u}_n)\Big[k_{ij}\chi_{3m} + \frac{1}{2}\psi_i(u_{3n})\psi_j(\chi_{3m}) + \frac{1}{2}\psi_j(u_{3n})\psi_i(\chi_{3m})\Big] + M_{ij}(\mathbf{u}_n)\varkappa_{ij}(\varkappa_m^{\cdot})\Big\}\,d\Omega - (F_3\cdot\chi_{3m})_1 = 0 \tag{3.2}$$

Теорема. Пусть выполнены условия 1) — 8). Пусть $\{\chi_m\}$ — система векторов, определенная в лемме 2. Тогда

а) система уравнений (3.1), (3.2) имеет по меньшей мере одно ω-периодическое решение при любом n,

б) совокупность приближений $\{\mathbf{u}_n\}$ слабо компактна в $X_2(0, \omega)$,

в) каждый слабый предел $\{\mathbf{u}_n\}$ в $X_2(0, \omega)$ есть обобщенное ω-периодическое решение задачи (1.1) — (1.4).

Центральный пункт доказательства теоремы состоит в проверке диссипативности [6] уравнений (3.1), (3.2). Коренное отличие уравнений метода Бубнова — Галёркина в теории пологих оболочек от соответствующих уравнений теории тонких пластин [2] проявляется в следующем. Пусть на пространстве $H_3(\Omega)$ задается положительно определенный функционал потенциальной энергии оболочки

$$\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \{T_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + M_{ij}(\mathbf{u})\varkappa_{ij}(\mathbf{u})\}\,d\Omega$$

Относительно $q_m(t)$ форму $\Phi_n \equiv \Phi(\mathbf{u}_n)$ в теории пластин можно представить суммой $\Phi_n = \Phi_{2n} + \Phi_{4n}$ форм второй и четвертой степени. В [2] доказательство диссипативности основано на том, что положительно определенной формой переменных q_m является не только Φ_n, но и

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_m}\Phi_n\right)q_m = 2\Phi_{2n} + 4\Phi_{4n}$$

В теории пологих оболочек $\Phi_n = \Phi_{2n} + \Phi_{3n} + \Phi_{4n}$, где Φ_{3n} — функционал третьей степени относительно q_m. Поэтому форма $2\Phi_{2n} + 3\Phi_{3n} + 4\Phi_{4n}$ уже не будет положительно определенной относительно q_m, что требует иного, чем в теории пластин, подхода.

Для доказательства теоремы (3.1), (3.2) умножаются на q_{mt}, суммируются по m от 1 до n и полученные выражения складываются

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2 + \Phi_n\right) = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{nt})_1 - \varepsilon\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2$$

Вводится в рассмотрение функция

$$V_n(t) \equiv V_n(q_n(t), q_{nt}(t)) = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2 + \Phi_n + \alpha \sum_{m=1}^{n} [2(\mathbf{u}_n^* \cdot \chi_m^*)_1 \times$$

$$\times (\mathbf{u}_{nt}^* \cdot \dot{\chi}_m^*)_1 + (u_{3n} \cdot \chi_{3m})_1 (u_{3nt} \cdot \chi_{3m})_1] + \beta \sum_{m=1}^{n} [2(\mathbf{u}_n^* \cdot \dot{\chi}_m^*)_1^2 +$$

$$+ (u_{3n} \cdot \chi_{3m})_1^2]$$

На постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$ накладываются ограничения

$$^1/_2 - \alpha\varepsilon_1^2 > 0, \quad \beta - {}^1/_2\alpha\varepsilon_1^{-2} > 0$$

С учетом неравенства Юнга с постоянной ε_1^2 можно доказать достаточность этих неравенств для положительной определенности $V_n(t)$.

Вычисляется производная $V_{nt}(t)$ в силу уравнений (3.1), (3.2)

$$V_{nt}(t) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_{nt})_1 - \varepsilon\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2 + \alpha \sum_{m=1}^{n} \Big[2(\mathbf{u}_{nt}^* \cdot \chi_m^*)_1^2 +$$

$$+ (u_{3nt} \cdot \chi_{3m})_1^2 \Big] + \alpha \sum_{m=1}^{n} \Big[2(\mathbf{u}_n^* \cdot \dot{\chi}_m^*)_1 \Big\{ -\varepsilon(\mathbf{u}_{nt}^* \cdot \chi_m^*)_1 -$$

$$- \int_\Omega T_{ij}(\mathbf{u}_n) e_{ij}(\chi_m^*)\, d\Omega + (\mathbf{F}^* \cdot \chi_m^*)_1 \Big\} + (u_{3n} \cdot \chi_{3m})_1 \Big\{ -\varepsilon \times$$

$$\times (u_{3nt} \cdot \dot{\chi}_{3m})_1 - \int_\Omega T_{ij}(\mathbf{u}_n) \Big[k_{ij}\dot{\chi}_{3m} + \frac{1}{2}\psi_i(u_{3n})\psi_j(\dot{\chi}_{3m}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\psi_j(u_{3n})\psi_i(\chi_{3m}) \Big] + M_{ij}(\mathbf{u}_n)\varkappa_{ij}(\chi_m) \Big\} d\Omega + (F_3 \cdot \dot{\chi}_{3m})_1 \Big\} \Big] +$$

$$+ 2\beta \sum_{m=1}^{n} \Big[2(\mathbf{u}_n^* \cdot \chi_m^*)_1 (\mathbf{u}_{nt}^* \cdot \chi_m^*)_1 + (u_{3n} \cdot \chi_{3m})_1 (u_{3nt} \cdot \chi_{3m})_1 \Big]$$

Пусть $\alpha\varepsilon = 2\beta$. Неравенства Юнга с постоянными ε_2^2, ε_3^2 дают

$$V_n(t) \leqslant -a\|\mathbf{u}_{nt}\|_1^2 - \alpha \int_\Omega \{T_{ij}(\mathbf{u}_n)[2\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_n) - k_{ij}u_{3n}] +$$

$$+ M_{ij}(\mathbf{u}_n)\varkappa_{ij}(\mathbf{u}_n)\}\, d\Omega + \alpha\varepsilon_3^2\|\mathbf{u}_n\|_1^2 + b\|\mathbf{F}\|_1^2$$

Пусть $a = \varepsilon - {}^1/_2\varepsilon_2^2 - 2\alpha > 0$, $b = {}^1/_2\varepsilon_2^{-2} + \alpha\varepsilon_3^{-2}$ и

$$\Phi_n^\circ \equiv \int_\Omega \{T_{ij}(\mathbf{u}_n)[2\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_n) - k_{ij}u_{3n}] + M_{ij}(\mathbf{u}_n)\varkappa_{ij}(\mathbf{u}_n)\}\, d\Omega - \varepsilon_3^2\|\mathbf{u}_n\|_1^2$$

Лемма 5. Пусть $\|\mathbf{u}\|_{H_3(\Omega)} = R$ — сфера пространства $H_3(\Omega)$ достаточно большого радиуса R, не зависящего от t. Если элемент $\mathbf{u}_n(t)$, принадлежащий пространству $H_3(\Omega)$ при каждом фиксированном $-\infty < t < \infty$ и всех n, попадает при некотором $t = t^*$ на сферу достаточно большого радиуса R, то выполнено неравенство $\Phi_n^\circ(t^*) \geqslant \delta R^2$, где $\delta > 0$ — константа, не зависящая от $\mathbf{u}_n(t^*)$.

Для доказательства нужно повторить основные рассуждения работы [4], используемые при выводе априорной оценки, и учесть независимость от $\mathbf{u}_n(t)$ вводимых в [4] констант.

Из леммы 5 следует, что функционал Φ_n°, растущий в пространстве $H_3(\Omega)$. Поэтому существует константа $m_3 > 0$, не зависящая от $\mathbf{u}_n(t)$ и t, такая, что форма $\Phi_n^\circ + m_3$ будет положительно определенной в $H_3(\Omega)$ (можно, например, взять $m_3 = |\inf \Phi_n^\circ|$ в шаре $\| u_n \|_{H_3(\Omega)} \leqslant R$). Из структуры форм $V_n(t)$ и $a \| \mathbf{u}_{nt} \|_1^2 + \alpha\Phi^\circ$ вытекает существование констант $m > 0$, $c > 0$, не зависящих от $\mathbf{u}_n(t)$, t, таких, что

$$a \| \mathbf{u}_{nt} \|_1^2 + \alpha\Phi_n^\circ + c \geqslant mV_n$$

Зависимость постоянных m и c от ε_1^2, ε_2^2, ε_3^2, α, β может быть получена явно. С учетом леммы 5 можно записать

$$V_{nt}(t) \leqslant -mV_n(t) + c + b \| \underline{\mathbf{F}} \|_1^2$$

Отсюда

$$V_n(t) \leqslant V_n(q_n(t_0), q_{nt}(t_0))\, e^{-m(t-t_0)} + (c + b \max_t \| \mathbf{F} \|_1^2)\, m^{-1} \times$$

$$\times (1 - e^{-m(t-t_0)}) \tag{3.3}$$

$$\limsup V_n(t) \leqslant (c + b \max_t \| F \|_1^2)\, m^{-1} < \infty \quad \text{при } t \to \infty$$

при любых конечных $V_n(t_0)$, t_0 и всех n. Отсюда вытекает $\max_t \| \mathbf{u}_{nt} \|_1 \leqslant \gamma_1$, $\max_t \| \mathbf{u}_n \|_{H_3(\Omega)} \leqslant \gamma_2$, $\| \mathbf{u}_n \|_1 \leqslant \gamma_3$ с конечными не зависящими от $\mathbf{u}_n(t)$, n константами γ_1, γ_2, γ_3 и диссипативность системы (3.1), (3.2). Диссипативность влечет существование [6] хотя бы одного субгармонического колебания периода $k_n\omega$, где k_n — целое положительное число, зависящее от n.

Доказывается, что для задачи (1.1) — (1.4) период колебаний равен не $k_n\omega$, а — ω при любом n. В $2n$-мерном пространстве коэффициентов ($\mathbf{q}_n$, $\mathbf{q}_{nt}$) вводится оператор $\mathbf{K}(\mathbf{q}_n(0), \mathbf{q}_{nt}(0)) = (\mathbf{q}_n(\omega), \mathbf{q}_{nt}(\omega))$. Введенное здесь преобразование непрерывно. Рассматривается область

$$V_n(\mathbf{q}_n(0), \mathbf{q}_{nt}(0)) < M$$

где константа M не зависит от n и t. Из (3.3) следует существование такой константы. Пусть M взято так, что

$$M^* = M^{-1}(c + b \max_t \| \mathbf{F} \|_1^2)\, m^{-1} < 1$$

Тогда при достаточно большом M, с учетом (3.3) и леммы 5, показывается, что

$$V_n(\mathbf{q}_n(\omega), \mathbf{q}_{nt}(\omega)) \leqslant V_n(\mathbf{q}_n(0), \mathbf{q}_{nt}(0))\, [e^{-mt} + M^*(1 -$$

$$- e^{-mt})] < V_n(\mathbf{q}_n(0), \mathbf{q}_{nt}(0))$$

и область

$$V_n(\mathbf{q}_n(0), \mathbf{q}_{nt}(0)) \leqslant M$$

звездная. По теореме Шраудера следует существование хотя бы одной неподвижной точки преобразования $\mathbf{K}$. Соответствующее решение системы (3.1), (3.2) будет ω-периодическим при любом n. Из (3.3) и гильбертовости пространства $X_2(0, \omega)$ следует слабая компактность последовательности $\{\mathbf{u}_n\}$ в $X_2(0, \omega)$ и неравенство

$$\| \mathbf{u}_0 \|_{2,0,\omega} \leqslant \liminf \| \mathbf{u}_n \|_{2,0,\omega} \quad \text{при } n \to \infty$$

где $\mathbf{u}_0$ — слабый предел в $X_2(0, \omega)$ последовательности $\{\mathbf{u}_n\}$. С использованием теорем вложения [7], как и в [5], доказывается, что $\mathbf{u}_0$ — обобщенное ω-периодическое решение задачи (1.1) — (1.4).

Теорема доказана.

Замечания. 1°. Если, например, брать константы ε_1^2, ε_2^2, ε_3^2, α, β, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha < {}^1/_4\,\varepsilon, \quad (2\varepsilon)^{-1} < \varepsilon_1^2 < 2\varepsilon^{-1}, \quad \beta < {}^1/_8\,\varepsilon^2, \quad \varepsilon_2^2 < \varepsilon, \quad \alpha\varepsilon = 2\beta$$

то все наложенные на них ограничения будут выполнены.

2°. Используя метод доказательства теоремы, можно получить теоремы существования ω-периодического решения задачи о колебании оболочки с учетом затухания при условиях

$$u_i|_\Gamma = g_i(s, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad \left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_\Gamma = g_4(s, t)$$

$$g_j(s, t+\omega) = g_j(s, t), \quad g_{jt}(s, t+\omega) = g_{jt}(s, t), \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$g_j(s, t) \in L^\infty(0, \omega), \quad g_{jt}(s, t) \in L^\infty(0, \omega), \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$g_j(s, t) \in H_{1/2}(\Gamma), \quad g_3(s, t) \in H_{3/2}(\Gamma), \quad j = 1, 2, 4$$

где $H_{1/2}(\Gamma)$, $H_{3/2}(\Gamma)$ — пространства Соболева — Слободецкого.

Поступила 25 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В. И.* Периодические движения вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 6.
2. *Морозов Н. Ф.* Исследование нелинейных колебаний тонких пластин с учетом затухания. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 4.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
4. *Ворович И. И., Лебедев Л. П.* О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
5. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, т. 21, № 6.
6. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.— Л., «Наука», 1964.
7. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.