

## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКИМ РАЗРЕЗОМ

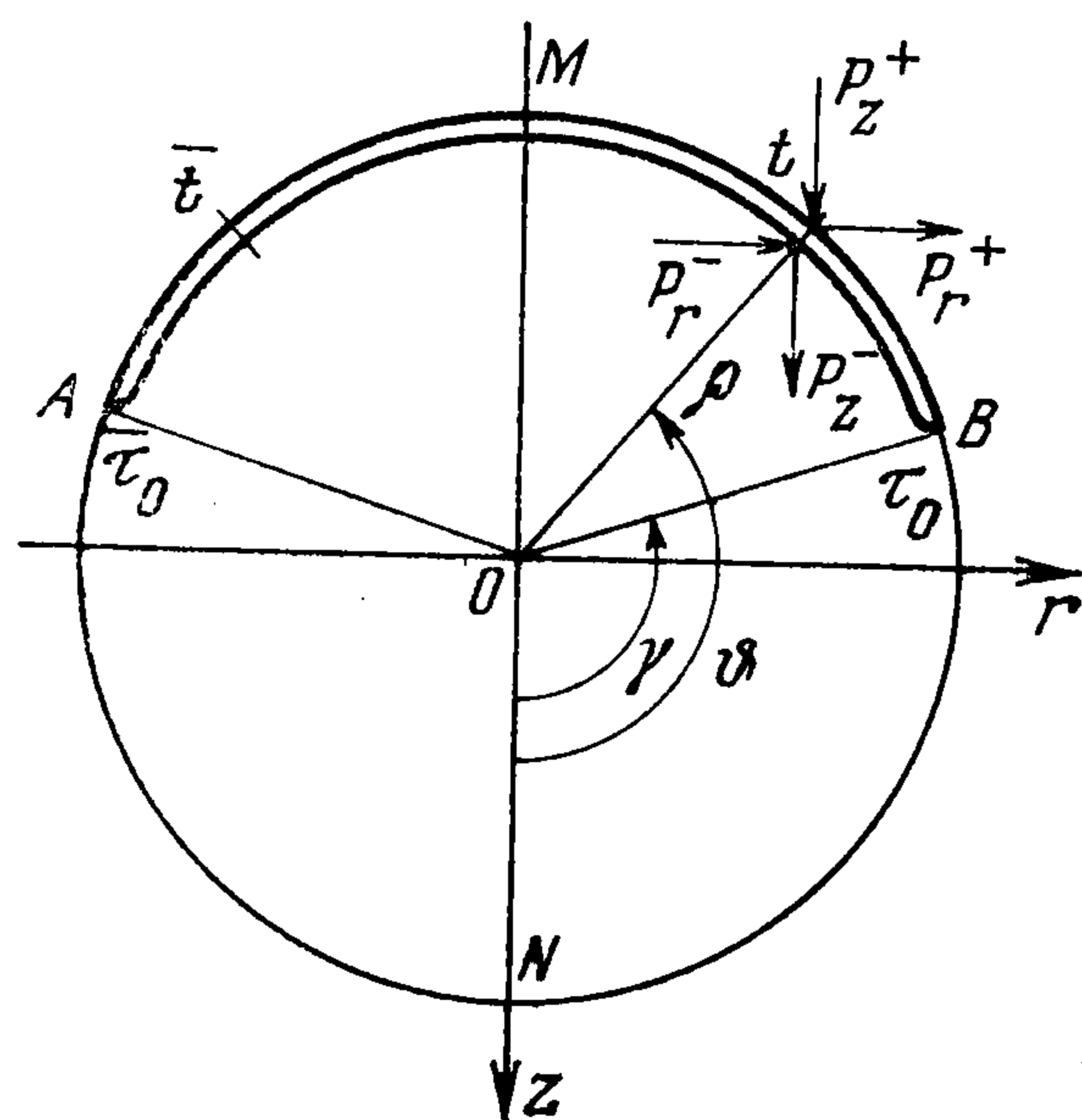
Н. Л. Прохорова, Ю. И. Соловьев

(Новосибирск)

Получено в квадратурах решение осесимметричной задачи о деформации пространства, ослабленного сферическим разрезом при заданных на берегах разреза внешних силах или перемещениях. Используется представление напряженного состояния через аналитические функции комплексного переменного. Исследован характер голоморфности этих функций и выделены неголоморфные члены. Для случая равномерного растяжения на бесконечности записаны в явном виде формулы напряжений по поверхности, дополняющей разрез до полной сферы. Указано на ошибочность ранее полученных решений.

1. Пусть упругое пространство ослаблено щелью, которая совпадает с частью сферической поверхности единичного радиуса, имеющей центр в начале координат. В меридиональном сечении щель совпадает с дугой  $AMB$  (фигура).

На верхнем и нижнем берегах щели заданы силы  $p_z^+$ ,  $p_r^+$  и  $p_z^-$ ,  $p_r^-$ . Напряжения и перемещения на бесконечности равны нулю. Перемещения



краев щели предполагаются ограниченными, напряжения в этих точках могут быть бесконечными, но порядок их особенностей должен быть строго меньше единицы.

При аналогичных предположениях эта задача решалась в работах [1-4] и др. Однако характер голоморфности введенных там функций был установлен неверно, вследствие чего результаты оказываются пригодными лишь для ограниченного набора нагрузок.

Напряжения осесимметрично нагруженного тела выражаются через две аналитические функции  $\varphi$  и  $\psi$  комплексного переменного  $\zeta$  [5]

$$(1.1) \quad \sigma_z = \frac{1}{\pi i} \int_{\frac{i}{2}}^t (\varphi' - 2z\varphi'' - \psi') \frac{d\zeta}{X}$$

$$\sigma_r = \frac{4(1+\nu)}{\pi i} \int_{\frac{i}{2}}^t \frac{\varphi' d\zeta}{X} - \sigma_z - \sigma_\theta$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{4\nu}{\pi i} \int_{\bar{t}}^t \frac{\varphi' d\zeta}{X} - \frac{1}{\pi i r^2} \int_{\bar{t}}^t (\kappa\varphi' + 2z\varphi'' + \psi') X d\zeta$$

$$\tau_{zr} = -\frac{1}{\pi i r} \int_{\bar{t}}^t (\varphi' + 2z\varphi'' + \psi') \frac{\zeta - z}{X} d\zeta$$

$\varphi = \varphi(\zeta)$ ,  $\psi = \psi(\zeta)$ ,  $X = X(\zeta, t) = \sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar{t})}$ ,  $t = z + ir$   
 ( $z, r, \theta$  — цилиндрические координаты,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\kappa = 3 - 4\nu$ ).

Вводя функции  $F(\zeta)$ ,  $F_1(\zeta)$ ,  $F_2(\zeta)$ ,  $v(\zeta)$  соотношениями

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varphi' &= 2\zeta F' + F, & v &= \zeta^2 F'' + (1 + \nu)(2\zeta F' + F) \\ \psi' &= F - 4\zeta F' - 2(1 + \zeta^2) F'' - F_1, & v &= 1/4 (\zeta F_1' + F_1 + F_2) \end{aligned}$$

можно получить [5] следующие выражения для аксиальных и радиальных сил, приложенных к единичной сферической поверхности:

$$(1.3) \quad p_z = \frac{1}{\pi i} \int_{\bar{t}}^t F_1 \frac{\zeta d\zeta}{X}, \quad p_r = \frac{1}{\pi i r} \int_{\bar{t}}^t F_2 X d\zeta, \quad |t| = 1$$

Функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  голоморфны в плоскости меридионального сечения тела (в данном случае в плоскости, разрезанной вдоль дуги  $AMB$ ) и исчезают на бесконечности. Этот факт легко устанавливается при помощи связей между осесимметричным и плоским состояниями [6] или путем представления общего решения осесимметричной задачи через обобщенные аналитические функции и последующего перехода к аналитическим функциям [7].

Рассматривая первое из равенств (1.2) как дифференциальное уравнение относительно  $F(\zeta)$ , будем иметь

$$(1.4) \quad F = \frac{1}{2\sqrt{\zeta}} \int_0^{\zeta} \varphi' \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} + \frac{C}{\sqrt{\zeta}}$$

или

$$(1.5) \quad F = \frac{1}{2\sqrt{\zeta}} \int_{\infty}^{\zeta} \varphi' \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} + \frac{C'}{\sqrt{\zeta}}$$

Оба выражения должны приводить к одному и тому же результату. Отсюда

$$(1.6) \quad C - C' = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varphi' \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}$$

Следовательно, из двух постоянных  $C$  и  $C'$  лишь одну можно зафиксировать произвольно. В дальнейшем будем полагать  $C' = 0$ .

Разлагая  $\varphi'(\zeta)$  в ряды по положительным (при  $|\zeta| < 1$ ) и отрицательным (при  $|\zeta| > 1$ ) степеням  $\zeta$ , можно убедиться, что интегральные слагаемые в (1.4) и (1.5) представляют собой функции, голоморфные соответственно при  $|\zeta| < 1$  и  $|\zeta| > 1$ . Функция  $F(\zeta)$  будет голоморфной вне единичного круга, и  $\zeta F(\zeta) \rightarrow 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ ; внутри этого круга будет голоморфной разность  $F(\zeta) - C/\sqrt{\zeta}$ .

*Замечание.* В работах [1, 3, 4]  $F(\zeta)$  считалась голоморфной функцией, т. е. фактически было принято  $C = C' = 0$ , что возможно лишь в случае, когда интеграл (1.6) равен нулю. В работе [2] за голоморфные были приняты несколько иные функции, которые в общем случае также не являются голоморфными.

Функции  $F_1(\zeta)$ ,  $F_2(\zeta)$  и  $v(\zeta)$  также голоморфны вне единичного круга, причем

$$(1.7) \quad \lim \zeta^n F_n(\zeta) = 0, \quad n = 1, 2; \quad \lim \zeta v(\zeta) = 0, \quad \zeta \rightarrow \infty$$

Внутри круга голоморфными являются разности

$$F_n(\zeta) - (n+1)g(\zeta), \quad v(\zeta) - {}^{3/4}C\zeta^{-1/2}$$

$$(g(\zeta) = {}^{3/4}C(\zeta^{-1/2} - \zeta^{-3/2}))$$

Неголоморфную внутри круга  $F_n(\zeta)$  можно выделить, вводя функции

$$f_1(\zeta) = \frac{3}{4i\sqrt{\zeta}} \left( \frac{1}{\zeta^2} - 1 \right) L(\zeta) + \frac{4a^3}{\zeta X_0^2} (\zeta + 1) - 3a \frac{\zeta + 1}{\zeta^2}$$

$$f_2(\zeta) = \frac{\zeta + 1}{X_0^4}, \quad L(\zeta) = \ln \frac{\zeta - 2ia\sqrt{\zeta} - 1}{\zeta + 2ia\sqrt{\zeta} - 1}$$

$$X_0 = X(\zeta, \tau_0), \quad \tau_0 = e^{i\gamma_0}, \quad a = \sin \frac{\gamma_0}{2}$$

$$L(0) = -2\pi i, \quad L(\infty) = 0$$

( $2\gamma_0$  — угол раствора дуги  $ANB$ , дополняющей разрез до полной окружности). Тогда

$$(1.8) \quad F_n = F_{n0} + (n+1)C_1 f_1 + (n-1)C_2 f_2, \quad C_1 = \frac{1}{2\pi} C$$

Функции  $F_{n0}(\zeta)$  ( $n = 1, 2$ ) голоморфны в плоскости с разрезом  $AMB$ . Линию разветвления  $\sqrt{\zeta}$  во всех этих представлениях будем проводить по отрицательной части оси  $z$  (от точки  $O$  вверх).

Разрешая второе из равенств (1.2) относительно  $F(\zeta)$ , будем иметь

$$(1.9) \quad F - \frac{C}{\sqrt{\zeta}} = \frac{\zeta^{\alpha_1}}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_0^{\zeta} \left( v - \frac{3C}{4\sqrt{\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha_1+1}} -$$

$$- \frac{\zeta^{\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_0^{\zeta} \left( v - \frac{3C}{4\sqrt{\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha_2+1}} + D_1 \zeta^{\alpha_1} + D_2 \zeta^{\alpha_2}$$

$$(1.10) \quad F = \frac{\zeta^{\alpha_1}}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_{\infty}^{\zeta} \frac{v d\zeta}{\zeta^{\alpha_1+1}} - \frac{\zeta^{\alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_{\infty}^{\zeta} \frac{v d\zeta}{\zeta^{\alpha_2+1}} + D_1' \zeta^{\alpha_1} + D_2' \zeta^{\alpha_2}$$

$$\alpha_{1,2} = -1/2 - v \pm i \sqrt{3/4 - v^2}$$

Левые части равенств (1.9), (1.10) представляют собой функции, голоморфные соответственно внутри и вне единичного круга. Используя разложение подынтегральных функций в ряды, можно убедиться, что интегральные слагаемые правых частей также голоморфны в соответствующих областях. Отсюда вытекает, что

$$D_1 = D_2 = D_1' = D_2' = 0$$

Значения  $F(\zeta)$ , определенные из (1.9) и (1.10), должны совпадать. Это возможно лишь в случае, когда

$$\int_0^{\infty} \frac{v d\zeta}{\zeta^{\alpha_1+1}} = 0, \quad \int_0^{\infty} \frac{v d\zeta}{\zeta^{\alpha_2+1}} = 0$$

Подставляя сюда последнее из выражений (1.2) и учитывая (1.8), приходим к системе двух уравнений относительно постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , решение которой дает

$$(1.11) \quad C_1 = \frac{\delta_{12}\delta_{20} - \delta_{22}\delta_{10}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}, \quad C_2 = \frac{\delta_{21}\delta_{10} - \delta_{11}\delta_{20}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}$$

$$\delta_{n1} = \int_0^{\infty} (2\zeta f_1' + 5f_1) \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha_n+1}}, \quad \delta_{n2} = \int_0^{\infty} f_2 \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha_n+1}}$$

$$\delta_{n0} = \int_0^{\infty} [(\alpha_n + 1)F_{10} + F_{20}] \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha_n+1}}, \quad n = 1, 2$$

Здесь интегрировать можно по произвольному пути, но не пересекая отрезка  $OM$  и разреза  $AMB$ .

2. Рассмотрим граничные условия. Пусть точка  $t$  принадлежит нижнему берегу разреза  $AMB$ . Путь интегрирования в (1.3) может быть принят произвольным, но не пересекающим линий разветвления подынтегральных функций. При пересечении оси симметрии он должен располагаться либо ниже точки  $M$  и линии разветвления  $X$ , либо выше их [7].

Представим выражение для  $p_z^-$  в форме

$$p_z^- = \frac{1}{\pi i} \int_{\bar{t}}^t (F_1 - 2g) \frac{\zeta d\zeta}{X} + \frac{2}{\pi i} \int_{\bar{t}}^t g \frac{\zeta d\zeta}{X}$$

Последний интеграл как показывает непосредственное вычисление, равен нулю, а путь интегрирования для первого интеграла можно проводить по нижнему берегу разреза  $AMB$ . Тогда

$$(2.1) \quad p_r^- = \frac{1}{\pi i} \int_{\bar{t}}^t [F_1^-(\sigma) - 2g(\sigma)] \frac{\sigma d\sigma}{X^-}, \quad X^- = X^-(\sigma, t), \quad |\sigma| = 1$$

(значком минус помечены величины, относящиеся к нижнему берегу разреза). Аналогично

$$(2.2) \quad p_z^- = \frac{1}{\pi i r} \int_{\bar{t}}^t [F_2^-(\sigma) - 3g(\sigma)] X^- d\sigma$$

Когда  $t$  принадлежит верхнему берегу разреза, путь интегрирования в (1.3) будем проводить по этому же берегу

$$(2.3) \quad p_z^+ = \frac{1}{\pi i} \int_{\bar{t}}^t F_1^+(\sigma) \frac{\sigma d\sigma}{X^+}, \quad p_r^+ = \frac{1}{\pi i r} \int_{\bar{t}}^t F_2^+(\sigma) X^+ d\sigma$$

Подставим в (2.1) — (2.3) представления (1.8). Члены, зависящие от постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , после выкладок уничтожаются. Разрешая получен-

ные равенства относительно граничных значений функции  $F_n(\tau)$ , будем иметь [5]

$$(2.4) \quad \tau F_{n0}^{\pm}(\tau) - \bar{\tau}^2 \overline{F_{n0}^{\pm}(\tau)} = y_n^{\pm}(\tau)$$

$$y_1^{\pm} = 2e^{i\gamma_1/2} \frac{d}{d\gamma_1} \int_0^{\gamma_1} \frac{p_z^{\pm}(\vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta_1 - \cos \gamma_1)}}$$

$$y_2^{\pm} = -2e^{i\gamma_1/2} \frac{d}{d\gamma_1} \left[ \frac{1}{\sin \gamma_1} \frac{d}{d\gamma_1} \int_0^{\gamma_1} \frac{p_r^{\pm}(\vartheta_1) \sin^2 \vartheta_1 d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta_1 - \cos \gamma_1)}} \right]$$

$$\tau = e^{i\gamma} = -e^{-i\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \pi - \gamma, \quad \vartheta_1 = \pi - \vartheta, \quad 0 \leq \gamma_1 < \pi - \gamma_0$$

Здесь  $\gamma$  и  $\vartheta$  — углы, отсчитываемые от положительного направления оси  $z$ ; при  $\text{Im } \tau < 0$  значения  $y_n^{\pm}(\tau)$  назначаются из условия  $y_n^{\pm}(\tau) = \overline{y_n^{\pm}(\bar{\tau})}$ .

Задачу определения  $F_n(\zeta)$  по условию (2.4) легко свести к задаче сопряжения для функций

$$\Phi_{nm}(\zeta) = \left[ \zeta F_{n0}(\zeta) + (-1)^m \frac{1}{\zeta^2} F_{n0}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right] X_0^k,$$

$$k = 2n + m - 2; \quad n, m = 1, 2$$

которые голоморфны в плоскости с разрезом  $AMB$ , и в бесконечно удаленной точке имеют полюс порядка  $n + m - 2$ ; порядок их особенностей в точках  $A$  и  $B$  менее единицы. Последнее вытекает из условия ограниченности перемещений краев щели.

После решения задачи имеем

$$(2.5) \quad F_{n0}(\zeta) = \frac{1}{4\pi i} \sum_{m=1}^2 \frac{\zeta^{n-1}}{X_0^k} \int_{\frac{\tau_0}{\zeta}}^{\tau_0} \frac{y_{nm}' d\tau}{(\tau - \zeta) \tau^n} + \frac{X_0^{1-2n}}{8i\zeta} \left[ \zeta^{n-1} + (n-2) \frac{\zeta+1}{X_0} \right] \times$$

$$\times \int_{\frac{\tau_0}{\zeta}}^{\tau_0} y_{n1} \frac{d\tau}{\tau^n} + (n-1) C_2' \frac{\zeta+1}{X_0^4}$$

$$y_{nm} = [(-1)^m y_n^+(\tau) - y_n^-(\tau)] (X_0^-)^k$$

$$X_0^- = e^{i\gamma_1/2} \sqrt{2(\cos \gamma_1 + \cos \gamma_0)}$$

Коэффициент  $C_2'$  остается неопределенным. Он может быть зафиксирован произвольно, так как множитель при  $C_2'$  совпадает с множителем при  $C_2$  в (1.8).

3. Рассмотрим растяжение упругого пространства со сферической щелью аксиальными и радиальными силами  $p_1$  и  $p_2$ , приложенными на бесконечности. На равномерное поле напряжений следует наложить напряжения, вызванные действием нагрузки

$$p_z^{\pm} = \mp p_1 \cos \vartheta_1, \quad p_r^{\pm} = \pm p_2 \sin \vartheta_1$$

по поверхности щели. В этом случае

$$F_{n0} = \frac{n r_n}{\pi} \left[ \frac{1}{2i} \left( 1 - \frac{1}{\zeta^3} \right) \ln \frac{\zeta - \tau_0}{\zeta - \bar{\tau}_0} - \frac{\pi - \gamma_0}{\zeta^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{r_0}{X_0^2} \left( \frac{1}{\zeta^2} - \frac{z_0}{\zeta} + \zeta - z_0 \right) \right]$$

$$\delta_{10} = \bar{\delta}_{20} = \frac{(\alpha + 1) p_1 + 2p_2}{2 \sin \alpha \pi} \left( \frac{\alpha + 2}{2} S_0 + S_1 - S_2 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} S_3 \right)$$

$$\delta_{11} = \bar{\delta}_{21} = \frac{\pi}{b \sin \alpha \pi} \left[ (\bar{\alpha} + 1)(S_3 - S_1) + (\bar{\alpha} + 4)(S_2 - S_0) + 6 \frac{S_1 - S_0}{2\alpha + 1} \right]$$

$$\delta_{12} = \bar{\delta}_{22} = \frac{\pi}{4r_0^3 \sin \alpha \pi} [(\bar{\alpha} + 1) S_3 - \alpha S_2 - (\bar{\alpha} + 3) S_1 + (\bar{\alpha} + 2) S_0]$$

$$S_m = \sin [(\alpha + m)(\pi - \gamma_0)], \quad \alpha = \alpha_n, \quad n = 1, 2; \quad m = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \cos \gamma_0, \quad r_0 = \sin \gamma_0, \quad b = \cos (\gamma_0 / 2)$$

Значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  при  $\nu = 0, 0.3, 0.5$  приведены в таблице.

$\gamma_0$	$p_1 = 1$		$p_2 = 0$	
	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
	$\nu = 0$			
30°	0.04919	-0.00861	0.05699	0.06980
60°	0.04215	-0.04309	0.03658	0.40354
90°	0.02988	-0.04088	0.01674	0.71904
120°	0.01430	0.02278	0.00393	0.52607
150°	0.00252	0.01886	0.00018	0.10598
	$\nu = 0.3$			
30°	0.04406	-0.21810	0.03916	0.07006
60°	0.03870	-0.12188	0.02495	0.40640
90°	0.02796	-0.18818	0.01124	0.71065
120°	0.01365	-0.09991	0.00263	0.51361
150°	0.00248	-0.01051	0.00012	0.10469
	$\nu = 0.5$			
30°	0.04336	-0.03243	0.02956	0.07426
60°	0.03827	-0.18226	0.01859	0.42517
90°	0.02768	-0.29349	0.00819	0.72720
120°	0.01350	-0.18218	0.00188	0.51573
150°	0.00247	-0.02989	0.00009	0.10454

Для определения функции  $F(\zeta)$  можно воспользоваться любой из формул (1.9), (1.10);  $\varphi'(\zeta), \psi'(\zeta)$  определяются из (1.2), а напряжения — при помощи (1.1). При вычислении интегралов приходится прибегать к численным квадратурам.

Напряжения  $p_z$  и  $p_r$  по дуге  $ANB$  определяются в замкнутом виде

$$p_z = \left( \frac{2n_1}{\pi} b - 4C_1 \right) \frac{3z - 2z_0 - 1}{\sqrt{2(z - z_0)}} + \frac{2n_1}{\pi} \left( z \arccos \sqrt{\frac{1 + z_0}{1 + z}} - \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{z - z_0} \right)$$

$$r p_r = \frac{C_2}{4b^3} \frac{1 - z}{\sqrt{2(z - z_0)}} + 6C_1 (3z - 2z_0 - 1) [\sqrt{2(z - z_0)} - 2a] + \frac{2n_2}{\pi} \left[ r^2 \arccos \sqrt{\frac{1 + z_0}{1 + z}} + b(3 - 4z_0 + z) \sqrt{2(z - z_0)} - 4r_0(z - z_0) \right]$$

Эти выражения отличаются от полученных в работах [1-4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко Л. Т., Зюзин В. А., Моссаковский В. И. Сферический разрез в упругом пространстве. Докл. АН СССР, 1968, т. 181, № 6.
  2. Зюзин В. А., Моссаковский В. И. Осесимметричное нагружение пространства со сферическим разрезом. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
  3. Капшицкий А. А., Ногин Н. В. К решению основных задач осесимметричной теории упругости для пространства со сферическим разрезом. В сб.: Математическая физика. Киев, «Наукова думка», 1971, вып. 9.
  4. Бойко Л. Т. Сферический разрез в упругом пространстве под действием внутреннего давления. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 4.
  5. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решение этих задач для сферы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
  6. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимостей между осесимметричными и плоскими состояниями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
  7. Соловьев Ю. И. Представление общего решения осесимметричной задачи теории упругости для многосвязных тел вращения при помощи аналитических функций комплексного переменного. Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1970, вып. 96.
-