Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛАСТИН

В. Г. Литвинов

(Киев)

Рассматриваются задачи об определении оптимальных нагрузок на пластину, обеспечивающих наилучшее среднеквадратичное приближение к заданному распределению изгибающих и крутящих моментов либо перемещений. Изучаются вопросы существования и единственности оптимального решения, и устанавливаются необходимые и достаточные условия оптимальности в предположении, что область допустимых нагрузок — замкнутое выпуклое множество в некотором гильбертовом пространстве.

1. Некоторые соотношения теории пластин. Вспомогательные предложения. Будем рассматривать обратные задачи для пластин переменной толщины. Уравнение изгиба такой пластины имеет вид [1]

$$Pu = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right] + 2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(D\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right) = g, \quad (x, y) \in \Omega \tag{1.1}$$

Здесь $u(x, y)$ — прогиб срединной плоскости пластины, ν — коэффициент Пуассона — неотрицательная постоянная, $g(x, y)$ — интенсивность внешней нагрузки, $D(x, y)$ — цилиндрическая жесткость пластины, Ω — ограниченная открытая область на плоскости с границей S.

Рассмотрим случай смешанных граничных условий, когда на одной части границы S_1 пластина защемлена, а на другой части S_2 свободна оперта. При этом граничные условия имеют вид

$$u|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}n_x + \frac{\partial u}{\partial y}n_y = 0 \quad \text{на } S_1$$
$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}n_x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}n_y^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}n_x n_y\right) = 0 \quad \text{на } S_2 \tag{1.2}$$

Здесь n_x и n_y — направляющие косинусы вектора внешней единичной нормали к границе S, причем $S = S_1 \bigcup S_2$ и $S_1 \bigcap S_2$ — пустое множество. В частности, если одно из множеств S_1 (S_2) пустое, то имеем случай свободного опирания (защемления) по всему краю пластины.

Введем пространство Соболева $H^m(\Omega)$ ($m \geqslant 1$ — целое число)

$$H^m(\Omega) = \{v \mid D^\alpha v \in L_2(\Omega), \ |\alpha| \leqslant m\}$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

Пространство $H^m(\Omega)$ снабжается нормой

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha v\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}$$

Обозначим через V гильбертово пространство, полученное замыканием в норме пространства $H^2(\Omega)$ множества гладких функций, удовлетворяющих первым двум условиям (1.2). В пространстве V введем билинейную форму

$$a(u, v) = \iint\limits_{\Omega} D\Big[\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big) - (1-\nu)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\Big)\Big]dx\,dy$$

Для дальнейшего сделаем следующие предположения:

1) $D(x, y)$ — измеримая по Ω функция, удовлетворяющая почти всюду на Ω неравенству

(1.3) $$k_1 \leqslant D(x, y) \leqslant k_2, \quad k_1, \quad k_2 = \text{const} > 0$$

2) Постоянная ν удовлетворяет неравенству

(1.4) $$0 \leqslant \nu < 1$$

Покажем, что в пространстве V норма пространства $H^2(\Omega)$ эквивалентна следующей норме:

(1.5) $$\|u\|_V = [a(u, u)]^{1/2}$$

Имеем

(1.6) $$\Big|\iint\limits_{\Omega} D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dx\,dy\Big| \leqslant \frac{1}{2}\Big[\iint\limits_{\Omega} D\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2 dx\,dy + \iint\limits_{\Omega} D\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2 dx\,dy\Big]$$

Учитывая (1.4) и принимая во внимание неравенства (1.3), (1.6), получим

(1.7) $$a(u, u) = \iint\limits_{\Omega} D\Big[\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Big)^2\Big]dx\,dy \geqslant k_1(1-\nu)\iint\limits_{\Omega}\Big[\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Big)^2\Big]dx\,dy \geqslant c_1\iint\limits_{\Omega}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + u^2\Big]dx\,dy, \quad \forall u \in V, \quad c_1 = \text{const} > 0$$

Последняя оценка получена с использованием неравенства Пуанкаре и Фридрихса [2].

Из неравенств (1.7) имеем:

$$a(u, u) \geqslant c_2\|u\|^2_{H_2(\Omega)}, \quad \forall u \in V, \quad c_2 = \text{const} > 0$$

В силу неравенства (1.3) справедлива и обратная оценка

$$a(u, u) \leqslant c_3\|u\|^2_{H^2(\Omega)}, \quad \forall u \in V, \quad c_3 = \text{const} > 0$$

Для элементов $u, v \in V$ введем билинейную симметричную форму

$$b(u, v) = \iint_\Omega \Big[(1+\nu^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + + 2\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\Big] dx\,dy \tag{1.8}$$

Аналогично изложенному, используя неравенство (1.6) при $D = 1$, можно показать, что в пространстве V норма (1.5) эквивалентна следующей норме:

$$\| u \|_1 = [\, b(u, u)]^{1/2} \tag{1.9}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. В предположениях 1), 2) в пространстве V норма пространства $H^2(\Omega)$ и нормы (1.5), (1.9) эквивалентны.

Пусть U — гильбертово пространство над полем действительных чисел, U_∂ — выпуклое замкнутое множество в U.

Теорема 1.1. Пусть $\pi(f, g)$ — билинейная непрерывная симметричная на U форма $\pi(f, g) = \pi(g, f)$, удовлетворяющая условию

$$\pi(f, f) \geqslant C \| f \|_U^2, \quad \forall f \in U, \quad C = \mathrm{const} > 0 \tag{1.10}$$

$L(f)$ — линейная непрерывная на U форма). Тогда существует единственный элемент $f_0 \in U_\partial$, для которого

$$\pi(f_0, f_0) - 2L(f_0) = \inf_{g \in U_\partial} (\pi(g, g) - 2L(g)) \tag{1.11}$$

Минимизирующий элемент f_0 характеризуется тем, что

$$\pi(f_0, g - f_0) - L(g - f_0) \geqslant 0, \quad \forall g \in U_\partial$$

Если билинейная симметричная непрерывная на U форма $\pi(f, g)$ не удовлетворяет условию (1.10), но множество U_∂ ограничено, то существует элемент $f_0 \in U_\partial$, удовлетворяющий условию (1.11).

Доказательство этого утверждения имеется в работе [3]. Форму $\pi(f, g)$, удовлетворяющую условию (1.10), называют коэрцитивной.

2. Обратная задача для пластины с целевой функцией для изгибающих моментов. Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) назовем функцию $u \in V$, для которой выполняется условие

$$a(u, h) = \iint_\Omega gh\, dx\, dy, \quad \forall h \in V \tag{2.1}$$

Из известных результатов (см. [4]) следует утверждение.

Теорема 2.1. Пусть выполнены предположения 1), 2) и $g \in V^*$. Тогда задача (1.1), (1.2) имеет единственное обобщенное решение u, для которого справедливо соотношение

$$\| u \|_V = \| g \|_{V^*} \tag{2.2}$$

Здесь и ниже звездочкой обозначено сопряженное пространство.

Очевидно, что u — решение задачи (2.1) — зависит от g. Уравнение (2.1) однозначно определяет эту зависимость. Поставим следующую задачу: определить нагрузку, при которой распределение изгибающих моментов M_x, M_y и крутящего момента M_{xy}, определяемых выражениями

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad M_y = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

будет наиболее близким в указанном ниже смысле к заданным.

Более точно, с учетом предположений 1), 2) рассматриваем задачу о минимуме функционала

$$(2.3)\qquad I(g) = \iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u(g)}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u(g)}{\partial y^2} - z_1\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u(g)}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u(g)}{\partial x^2} - z_2\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 u(g)}{\partial x\,\partial y} - z_3\right)^2\right]dx\,dy, \quad g\in V_\partial^*$$

Здесь V_∂^* — замкнутое выпуклое множество в пространстве V^*, $z = (z_1, z_2, z_3)$ — заданный элемент пространства $H = L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)\times\times L_2(\Omega)$.

В пространстве V введем линейную форму

$$(2.4)\qquad Q_z(u) = \iint\limits_{\Omega}\left[z_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + z_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + z_3\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right]dx\,dy, \quad u\in V$$

а в V^* определим следующие формы:

$$(2.5)\qquad \pi_1(f, g) = b(u(f), u(g)), \quad L_z(g) = Q_z(u(g))$$

где $b(\ ,\ )$ определяется соотношением (1.8).

Раскрывая скобки под интегралом в выражении (2.3), убедимся, что функционал (2.3) отличается на постоянное слагаемое от функционала

$$2.6)\qquad I_1(g) = \pi_1(g,g) - 2L_z(g), \quad g\in V_\partial^*$$

Теорема 2.2. Пусть выполнены предположения 1), 2), $z\in H$ и функция u определяется как решение задачи (2.1). Тогда существует единственный элемент $g_0\in V_\partial^*$, для которого

$$(2.7)\qquad I(g_0) = \inf_{g\in V_\partial^*} I(g)$$

Элемент g_0 характеризуется соотношением (2.1) при $g = g_0$ и неравенством

$$(2.8)\qquad \pi_1(g_0, f - g_0) - L_z(f - g_0) \geqslant 0, \quad \forall f\in V_\partial^*$$

Доказательство. Используя теорему 1.1, покажем, что существует единственный элемент $g_0\in V_\partial^*$, для которого

$$(2.9)\qquad I_1(g_0) = \inf_{g\in V_\partial^*} I_1(g)$$

Действительно, $\pi_1(f, g)$ — билинейная и симметричная форма. Используя первое соотношение (2.5), а также лемму 1.1 и теорему 2.1, получим

$$\pi_1(g, g) = b(u(g), u(g)) \geqslant C_1\|u(g)\|_V^2 = C_1\|g\|_{V^*}^2, \ \forall g\in V^*$$
$$|\pi_1(f, g)| = |b(u(f), u(g))| \leqslant \|u(f)\|_1\|u(g)\|_1 \leqslant C_2\|f\|_{V^*}\|g\|_{V^*}$$
$$\forall f, g\in V^*$$

где C_1, C_2 — положительные постоянные. Отсюда следует, что $\pi_1(f, g)$ — коэрцитивная и непрерывная на V^* форма.

Из соотношений (2.2), (2.4) и второго соотношения (2.5) вытекает

$$|L_z(g)| \leqslant C_3 \|z\|_H \|u(g)\|_V = C_3 \|z\|_H \|g\|_{V^*}$$
$$\|z\|_H = \|z_1\|_{L_2(\Omega)} + \|z_2\|_{L_2(\Omega)} + \|z_3\|_{L_2(\Omega)}, \quad C_3 = \mathrm{const} > 0$$

Поэтому $L_z(g)$ — линейная непрерывная на V^* форма.

Таким образом, условия, позволяющие применить теорему 1.1, выполнены. Поэтому существует единственный элемент $g_0 \in V_\partial^*$, для которого справедливы соотношения (2.8) и (2.9). Функционалы (2.3) и (2.6) отличаются один от другого на постоянное слагаемое, и теорема доказана.

Преобразуем неравенство (2.8) с помощью сопряженного состояния $p(g_0) \in V$, которое определим уравнением

$$a(p(g_0), h) = b(u(g_0), h) - Q_z(h), \quad \forall h \in V \tag{2.10}$$

Принимая в (2.10) $h = u(f) - u(g_0)$ и учитывая соотношения (2.5), (2.8), получаем

$$\begin{aligned} &b(u(g_0), u(f) - u(g_0)) - Q_z(u(f) - u(g_0)) = \\ &= a(p(g_0), u(f) - u(g_0)) = \iint_\Omega p(g_0)(f - g_0)\,dx\,dy \geqslant 0, \quad \forall f \in V_\partial^* \end{aligned} \tag{2.11}$$

Наоборот, из неравенства

$$\iint_\Omega p(g_0)(f - g)\,dx\,dy \geqslant 0, \quad \forall f \in V_\partial^* \tag{2.12}$$

и соотношения (2.10) следует неравенство (2.8). Отсюда имеем

Следствие. Пусть выполнены предположения 1), 2) и $z \in H$. Для того, чтобы элемент $g_0 \in V_\partial^*$ удовлетворял соотношению (2.7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.1) при $g = g_0$, (2.10), (2.12).

3. Обратная задача с целевой функцией для прогибов. Поставим задачу об определении нагрузки, при которой функция прогибов будет наиболее близкой в указанном ниже смысле к заданной. Точнее, рассматриваем задачу о минимуме следующего функционала:

$$\Phi(g) = \iint_\Omega (u(g) - z)^2\,dx\,dy, \quad g \in V_\partial^* \tag{3.1}$$

Здесь z — заданный элемент пространства $L_2(\Omega)$, $u(g)$ — решение задачи (2.1).

Желая применить теорему 1.1, введем симметричную билинейную форму

$$\pi_2(f, g) = \iint_\Omega u(f)\,u(g)\,dx\,dy \tag{3.2}$$

С учетом соотношения (2.2) имеем

$$\begin{aligned} &|\pi_2(f, g)| \leqslant \|u(f)\|_{L_2(\Omega)} \|u(g)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C \|u(f)\|_V \|u(g)\|_V = \\ &= C \|f\|_{V^*} \|g\|_{V^*}, \quad C = \mathrm{const} > 0 \end{aligned}$$

Следовательно, $\pi_2(f, g)$ — непрерывная на V^* форма. Однако эта форма не коэрцитивна. Учитывая, что $z \in L_2(\Omega)$, и используя (2.2), можно убедиться, что линейная форма

$$L_z(g) = \iint_\Omega u(g)\, z\, dx\, dy \tag{3.3}$$

непрерывна в V^*.

Обозначим через X множество таких элементов $f \in V_\partial^*$, что

$$\Phi(f) = \inf_{g \in V_\partial^*} \Phi(g) \tag{3.4}$$

Форма (3.2) не коэрцитивна, поэтому множество X может быть и пустым. Но если множество V_∂^* ограничено, то X не пусто (это следует из теоремы 1.1).

Если вместо функционала (3.1) ввести «регуляризованный» функционал

$$\Phi_1(g) = \Phi(g) + \alpha \| g \|^2_{V^*}, \quad \alpha > 0 \tag{3.5}$$

то соответствующая ему билинейная форма

$$\pi_3(f, g) = \iint_\Omega u(f)\, u(g)\, dx\, dy + \alpha [f, g]_{V^*}$$

где $[f, g]_{V^*}$ — скалярное произведение в V^*, будет коэрцитивной, так как $\pi_3(g, g) \geqslant \alpha \| g \|_{V_*}{}^2$. Применяя теорему 1.1, получим следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть выполнены предположения 1), 2), $z \in L_2(\Omega)$ и функция u определяется как решение задачи (2.1). Тогда существует единственный элемент $f \in V_\partial^*$, для которого

$$\Phi_1(f) = \inf_{g \in V_\partial^*} \Phi_1(g) \tag{3.6}$$

Этот элемент f характеризуется соотношением (2.1) при $g = f$ и неравенством

$$\iint_\Omega [u(f) - z]\,[u(g) - u(f)]\, dx\, dy + \alpha [f, g - f]_{V^*} \geqslant 0, \quad \forall g \in V_\partial^* \tag{3.7}$$

Определим сопряженное состояние $p(f) \in V$ как решение уравнения

$$a(p(f), h) = \iint_\Omega (u(f) - z)\, h\, dx\, dy, \quad \forall h \in V \tag{3.8}$$

Тогда аналогично изложенному получим

Следствие. Пусть выполнены предположения 1), 2) и $z \in L_2(\Omega)$. Для того, чтобы элемент $f \in V_\partial^*$ был решением задачи (3.6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (2.1) при $g = f$ (3.8), а также неравенство

$$\iint_\Omega p(f)(g - f)\, dx\, dy + \alpha [f, g - f]_{V^*} \geqslant 0, \quad \forall g \in V_\partial^*$$

Замечания. 1. Пусть V_∂^* — замкнутое выпуклое множество в конечномерном подпространстве V_n^* пространства V^*. В этом случае для функционала (3.1) существует единственный элемент $f \in V_\partial^*$, такой, что

(3.9) $$\Phi(f) = \inf_{g \in V_\partial^*} \Phi(g)$$

Действительно, в конечномерном пространстве две любые нормы эквивалентны, поэтому

(3.10) $$\| u(g) \|_{L_2(\Omega)} \geqslant C_4 \| u(g) \|_V, \quad \forall g \in V_n^*, \quad C_4 = \text{const} > 0$$

Используя соотношения (2.2), (3.2) и (3.10), получим

$$\pi_2(g,g) = \| u(g) \|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant C_4^2 \| u(g) \|_V^2 = C_4^2 \| g \|^2_{V^*}, \quad \forall g \in V_n^*$$

Следовательно, форма $\pi_2(f, g)$ коэрцитивна в V_n^* и существование единственного элемента $f \in V_\partial^*$, удовлетворяющего соотношению (3.9), следует из теоремы 1.1.

2. Можно рассматривать задачу о минимуме функционала

(3.11) $$\Phi_2(g) = \Phi(g) + \alpha \| g \|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \alpha > 0, \quad g \in L_{2\partial}(\Omega)$$

Здесь $L_{2\partial}(\Omega)$ — замкнутое выпуклое множество в пространстве $L_2(\Omega)$.

Рассуждениями, аналогичными приведенным, можно убедиться, что существует единственный элемент $f \in L_{2\partial}(\Omega)$, для которого

$$\Phi_2(f) = \inf_{g \in L_{2\partial}(\Omega)} \Phi_2(g)$$

Отметим, что если множество X решений не регуляризованной задачи (3.4) не пусто, то при $\alpha \to 0$ решения задачи (3.6) сходятся в V^* к элементу f_0, который является проекцией нулевого элемента в V^* на множество X (см. [3]).

Выше установлено существование единственного решения задачи оптимизации с целевой функцией для перемещений в случае регуляризации последней. Покажем, что при некоторых допущениях существует единственное решение и не регуляризованной задачи.

Сделаем дополнительно к предположениям 1) и 2) следующие предположения:

3) Ω — ограниченная область на плоскости с границей S, являющейся бесконечно дифференцируемой кривой, причем локально Ω находится по одну сторону от S, т. е. $\Omega \cup S$ — многообразие с краем класса C^∞ (см. [5,6]);

4) функция $D(x, y)$ бесконечно дифференцируемая в области $\bar\Omega = \Omega \cup S$.

Рассмотрим случай жесткого защемления пластины по всему контуру. При этом краевые условия имеют вид

(3.12) $$u = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = 0 \quad \text{на } S$$

Обозначим через V_1 пространство, полученное замыканием в норме пространства $H^4(\Omega)$ множества гладких функций $u(x, y)$, удовлетворяющих краевым условиям (3.12).

Назовем слабым решением задачи (1.1), (3.12) функцию $u \in L_2(\Omega)$, для которой

(3.13) $$\iint_\Omega uPh\, dx\, dy = \iint_\Omega gh\, dx\, dy, \quad \forall h \in V_1$$

где оператор P определяется выражением (1.1).

Далее исходим из следующего результата: если выполнены предположения 1) — 4) и $\varphi(x)$ — заданная функция пространства $L_2(\Omega)$, то решение задачи

$$Ph = \varphi, \quad h = 0 \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y = 0 \quad \text{на } S$$

принадлежит пространству $H^4(\Omega)$ (см. [7]). Иначе говоря, P — изоморфизм из V_1 на $L_2(\Omega)$ (утверждение А). Поэтому для $\forall g \in V_1{}^*$ существует единственный элемент $u \in L_2(\Omega)$, для которого справедливо тождество (3.13).

Рассмотрим далее задачу о минимуме функционала

$$\Phi(g) = \iint_\Omega (u(g) - z)^2\, dx\, dy, \quad g \in V_{1\partial}^* \tag{3.14}$$

Здесь z — заданный элемент пространства $L_2(\Omega)$, $u(g)$ — решение задачи (3.13), $V_{1\partial}{}^*$ — замкнутое выпуклое множество в пространстве $V_1{}^*$.

Теорема 3.2. Пусть выполнены предположения 1) — 4) и $z \in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственный элемент $f \in V_{1\partial}{}^*$, для которого

$$\Phi(f) = \inf_{g \in V_{1\partial}^*} \Phi(g) \tag{3.15}$$

Этот элемент f характеризуется соотношением (3.13) при $g = f$ и неравенством

$$\iint_\Omega (u(f) - z)(u(g) - u(f))\, dx\, dy \geqslant 0, \quad \forall g \in V_{1\partial}^* \tag{3.16}$$

Доказательство. Покажем, что соответствующая функционалу (3.14) симметричная билинейная форма

$$\pi(f, g) = \iint_\Omega u(f)\, u(g)\, dx\, dy$$

непрерывна и коэрцитивна в $V_1{}^*$. В силу выполнения предположений 1)—4) в соответствии с изложенным справедливо утверждение A.

Отсюда, принимая в выражении (3.13) $Ph_0 = u$, имеем

$$\| u \|^2_{L_2(\Omega)} = \iint_\Omega g h_0\, dx\, dy \leqslant \| g \|_{V_1^*} \| h_0 \|_{V_1} \leqslant c \| g \|_{V_1^*} \| u \|_{L_2(\Omega)}, \quad c = \mathrm{const} > 0$$

Из этого неравенства найдем

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} \| \leqslant c \| g \|_{V_1^*} \tag{3.17}$$

Отсюда получим

$$|\pi(f, g)| = \left| \iint_\Omega u(f)\, u(g)\, dx\, dy \right| \leqslant \| u(f) \|_{L_2(\Omega)} \| u(g) \|_{L_2(\Omega)} \leqslant c^2 \| f \|_{V_1^*} \| g \|_{V_1^*}$$

Следовательно, $\pi(f, g)$ — непрерывная на $V_1{}^*$ форма. Далее, из соотношения (3.13) и утверждения А имеем

$$\left| \iint_\Omega g h\, dx\, dy \right| = \left| \iint_\Omega u P h\, dx\, dy \right| \leqslant \| u \|_{L_2(\Omega)} \| Ph \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \tag{3.18}$$

$$\leqslant c_1 \| u \|_{L_2(\Omega)} \| h \|_{V_1}, \quad c_1 = \mathrm{const} > 0$$

Из неравенства (3.18) найдем $\| g \|_{V_1^*} \leqslant c_1 \| u \|_{L_2(\Omega)}$. Теперь имеем

$$\pi(g, g) = \iint\limits_{\Omega} u^2(g)\, dx\, dy \geqslant \frac{1}{c_1^2} \| g \|^2_{V_1^*}$$

т. е. $\pi(f, g)$ — коэрцитивная форма. Учитывая, что $z \in L_2(\Omega)$, и используя неравенство (3.17), можно убедиться, что соответствующая функционалу (3.14) линейная форма

$$L_z(g) = \iint\limits_{\Omega} u(g)\, z\, dx\, dy$$

непрерывна на V_1^*. Теперь существование единственного элемента $f \in V_{1\partial}^*$, для которого справедливы соотношения (3.15), (3.16), следует из теоремы 1.1.

Определим сопряженное состояние $p(f) \in V_1$ как решение задачи

$$Pp(f) = u(f) - z \tag{3.19}$$

Тогда элемент f характеризуется соотношениями (3.13) при $g = f$, (3.19) и неравенством

$$\iint\limits_{\Omega} p(f)(g - f)\, dx\, dy \geqslant 0, \quad \forall g \in V_{1\partial}^* \tag{3.20}$$

Перейдем к случаю шарнирного опирания пластины. Обозначим через V_2 пространство, полученное замыканием в норме $H^4(\Omega)$ множества гладких функций $u(x, y)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u = 0 \text{ на } S, \quad \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (1 - \nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} n_x^2 + \right. \tag{3.21}$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} n_y^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} n_x n_y\right) = 0 \text{ на } S$$

Назовем слабым решением задачи (1.1), (3.21) функцию $u \in L_2(\Omega)$, для которой

$$\iint\limits_{\Omega} uPh\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} gh\, dx\, dy, \quad \forall h \in V_2 \tag{3.22}$$

Если выполнены предположения 1) — 4), то для $\forall g \in V_2^*$ существует единственное решение задачи (3.22). Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\Phi_1(g) = \iint\limits_{\Omega} (u(g) - z)^2\, dx\, dy, \quad g \in V_{2\partial}^*$$

где $u(g)$ — решение задачи (3.22), $V_{2\partial}^*$ — замкнутое выпуклое множество в пространстве V_2^*.

Аналогично изложенному доказывается следующее утверждение

Теорема 3.3. Пусть выполнены предположения 1) — 4) и $z \in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственный элемент $f \in V_{2\partial}^*$, для которого

$$\Phi_1(f) = \inf_{g \in V_{2\partial}^*} \Phi_1(g)$$

Этот элемент f характеризуется соотношением (3.22) при $g = f$ и неравенством

$$\iint\limits_{\Omega} (u(f) - z)(u(g) - u(f))\, dx\, dy \geqslant 0, \quad \forall g \in V_{2\partial}^*$$

Можно дать необходимые и достаточные условия оптимальности, используя сопряженное состояние. Эти условия выражаются соотношением (3.22) при $g = f$, уравнением (3.19), в котором $u(f)$ — решение задачи (3.22) и $p(f) \in V_2$, и неравенством (3.20), которое должно выполняться для любого g из $V_{2\partial}{}^*$.

Поступила 15 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. Киев, «Наукова думка», 1972.
2. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
4. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
5. *Шварц Л.* Анализ, т. 2. М., «Мир», 1972.
6. *Картан А.* Дифференциальное исчисление, дифференциальные формы. М., «Мир», 1971.
7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.