

## МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ СТАТИКИ УПРУГОГО КЛИНА

В. Н. Беркович

(Ростов-на-Дону)

Изучаются плоские контактные задачи статики упругого клина при условии его жесткого сцепления со штампом. Исследуются вопросы разрешимости указанных задач и предлагается способ их приближенного решения с помощью метода факторизации, развитого в [1] и др.

Плоские задачи упругости для клина с разрывными краевыми условиями рассматривались рядом авторов. Например, в работе [2] на основе сведения к интегральному уравнению Винера — Хопфа изучалась задача о вдавливании жесткого штампа в абсолютно гладкую грань упругого клина. В [3] аналогичная задача приведена к некоторому уравнению Фредгольма второго рода. В работе [4] и др.<sup>1</sup> были успешно применены асимптотические методы и методы ортогональных полиномов.

1. Будем рассматривать упругий клин, на верхнюю грань которого действует жестко сцепленный с нею полосовой штамп. Границы зоны контакта удалены от ребра клина на расстояния  $a^*$  и  $b^*$  соответственно ( $b^* > a^* > 0$ ). Исследуется случай плоской деформации. Для заданного в области  $\varphi = \alpha$ ,  $a^* < r < b^*$  вектора смещений  $u^\circ(r) = \{u_r^\circ(r), u_\varphi^\circ(r)\}$  требуется определить вектор полного напряжения  $\sigma^\circ(r) = \{\tau_{\varphi r}^\circ(r), \sigma_\varphi^\circ(r)\}$  в зоне контакта при каждом из следующих условий закрепления нижней грани клина ( $\varphi = 0$ ,  $0 < r < \infty$ ):

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \text{А } u_r(r, 0) = u_\varphi(r, 0) = 0 \\ \text{Б } \tau_{\varphi r}(r, 0) = \sigma_\varphi(r, 0) = 0 \\ \text{В } \tau_{\varphi r}(r, 0) = u_\varphi(r, 0) = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $r, \varphi$  — полярные координаты в любом сечении клина, перпендикулярном ребру. Предполагается также, что все смещения и напряжения затухают при  $r \rightarrow \infty$  на любом луче  $\varphi = \text{const}$ .

Воспользуемся общим решением уравнений плоской теории упругости в форме Папковича — Нейбера, приведенным в [5]. Удовлетворяя граничным условиям (1.1), придем в результате к системе интегральных уравнений относительно неизвестного вектора контактных напряжений  $\sigma^\circ(r)$ , которая в матричной форме имеет следующий вид ( $G$  — модуль

<sup>1</sup> Лутченко С. А., Попов Г. Я. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости для клина. В сб.: 3 Всесоюзный съезд по теор. и прикл. механике. М., 1968. Аннот. докл. М., «Наука», 1968.

сдвига материала клина):

$$(1.2) \quad Ls = \int_a^b \mathbf{k} \left( \frac{\rho}{\rho'} \right) s(\rho') d\rho' = \mathbf{f}(\rho), \quad a \leq \rho \leq b$$

$$\mathbf{k}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{-\infty+i\varepsilon} \mathbf{K}(z) t^{-iz/2\alpha} dz, \quad r = h\rho, \quad h = b^* - a^*, \quad \varepsilon > 0$$

$$\mathbf{K}(z) = \begin{vmatrix} K_{11}(z) & iK_{12}(z) \\ -iK_{21}(z) & K_{22}(z) \end{vmatrix}, \quad a^* = ha, \quad b^* = hb$$

$$s(\rho) = \begin{vmatrix} s_1 \\ s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_{\varphi r}(\rho)/2G \\ \sigma_{\varphi}(\rho)/2G \end{vmatrix}, \quad \mathbf{f}(\rho) = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_r^{\circ}(\rho)/h \\ u_{\varphi}^{\circ}(\rho)/h \end{vmatrix}$$

В каждом из случаев А, Б, В граничных условий на нижней грани клина выражения для элементов матрицы  $\mathbf{K}(z)$  определяются соответственно соотношениями

$$(1.3) \quad \text{А} \quad \Delta(z) K_{11}(z) = C \left( \kappa \frac{\text{sh } z}{z} + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

$$\Delta(z) K_{22}(z) = C \left( \kappa \frac{\text{sh } z}{z} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

$$\Delta(z) K_{12}(z) = \frac{z}{2} \left( B \frac{\text{sh}^2 1/2z}{1/4z^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) + iC \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}$$

$$\Delta(z) = \kappa \text{ch } z + \frac{\sin^2 \alpha}{2\alpha^2} z + C^2, \quad K_{21}(z) = \overline{K_{12}(z)}$$

$$\text{Б} \quad \Delta(z) K_{11}(z) = C \left( \frac{\text{sh } z}{z} + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

$$\Delta(z) K_{22}(z) = C \left( \frac{\text{sh } z}{z} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

$$\Delta(z) K_{12}(z) = \frac{z}{2} \left( B \frac{\text{sh}^2 1/2z}{1/4z^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) + iC \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}$$

$$\Delta(z) = \frac{z^2}{2} \left( \frac{\text{sh}^2 1/2z}{1/4z^2} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right), \quad K_{21}(z) = \overline{K_{12}(z)}$$

$$\text{В} \quad \Delta(z) K_{11}(z) = C (\text{ch } z + \cos 2\alpha)$$

$$\Delta(z) K_{22}(z) = C (\text{ch } z - \cos 2\alpha)$$

$$\Delta(z) K_{12}(z) = z \left( B \frac{\text{sh } z}{z} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) + iC \sin 2\alpha$$

$$\Delta(z) = z^2 \left( \frac{\text{sh } z}{z} + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right), \quad K_{21}(z) = \overline{K_{12}(z)}$$

$$B = 1 - 2\nu, \quad C = 2(1 - \nu)$$

В соотношениях (1.3) черта над символом означает комплексное сопряжение,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Нетрудно установить, что асимптотические выражения функций  $K_{ij}(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$  даются равенствами

$$(1.4) \quad K_{ii}(z) = C |z|^{-1} [1 + O(z^2 \text{ch}^{-1} z)]$$

$$K_{ij}(z) = B |z|^{-1} \text{sgn } z [1 + O(z^2 \text{ch}^{-1} z)]$$

*Лемма 1.* Справедливы следующие асимптотические оценки ( $k_{ij}$  — элементы матрицы  $\mathbf{k}(t)$ ):

$$(1.5) \quad k_{ii}(\rho/\rho') = C_1 \ln \tau [1 + o(\tau)], \quad k_{ij}(\rho/\rho') = O(1) \\ \tau = |\ln(\rho/\rho')| \rightarrow 0$$

2. Изучим вопросы разрешимости полученной системы (1.2). Для этого рассмотрим множество вектор-функций  $s(\rho)$ , для которых существует функционал

$$(2.1) \quad E(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s^*(z)} \cdot \mathbf{K}(z) \cdot s^*(z) dz < \infty \\ s^*(z) = \int_a^b s(\rho) \rho^{-iz/2\alpha} d\rho$$

Матрица  $\mathbf{K}(z)$  для каждой из задач А, Б, В имеет конкретный вид, определяемый соотношениями (1.3). При рассмотрении задач Б и В всегда будем требовать в дальнейшем выполнения условия

$$(2.2) \quad s^*(0) = 0$$

*Лемма 2.* Имеет место неравенство  $E(s) \geq 0$ , причем равенство достигается только при  $s(\rho) \equiv 0$ .

Для доказательства необходимо привести функционал (2.1) к виду

$$(2.3) \quad E(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e(s_1^*, s_2^*) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{K_{11}(z) |s_1^*(z)|^2 + \\ + K_{22}(z) |s_2^*(z)|^2 + 2\operatorname{Re}[K_{12}(z) \overline{s_1^*(z)} s_2^*(z)]\} dz$$

Из очевидного неравенства

$$(2.4) \quad E(s) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(x_1, x_2) dz \\ T(x_1, x_2) = K_{11}(z) x_1^2 + K_{22}(z) x_2^2 - 2 |K_{12}(z)| x_1 x_2 \\ x_1 = |s_1^*(z)|, \quad x_2 = |s_2^*(z)|$$

и положительной определенности квадратичной формы  $T(x_1, x_2)$  вытекает утверждение леммы.

Результаты леммы позволяют ввести пространство  $H(a, b)$  обобщенных решений системы (1.2) с нормой  $\|s\|_{H^2}^2 = E(s)$ , определяемой правой частью соотношения (2.3).

*Лемма 3.* Справедливо неравенство

$$(2.5) \quad m(z) |s^*(z)| \leq e(s_1^*, s_2^*) \leq M(z) |s^*(z)| \\ 0 < m(z) < M(z) < \infty, \quad m(z), M(z) = O(z^{-1})$$

(выражения для  $m$  и  $M$  легко отыскиваются в явном виде).

Доказательство сводится к существованию максимума и минимума формы  $e(s_1^*, s_2^*)$  на единичной окружности.

*Теорема 1.* В пространстве  $H(a, b)$  интегральные уравнения задач А, Б, В имеют единственные обобщенные решения при условии

$$(2.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(z)|^2 m^{-1}(z) dz < \infty, \quad F(z) = \int_0^{\infty} f_{ab}(\rho) \rho^{-iz/2\alpha} d\rho$$

где  $f_{ab}(\rho)$  — продолжение  $f(\rho)$  с отрезка  $a \leq \rho \leq b$  на всю полуось  $0 < \rho < \infty$  с помощью левой части (1.2).

Для доказательства следует ввести гильбертово пространство обобщенных решений со скалярным произведением на элементах из  $H(a, b)$ , порождающим норму (2.3), а затем применить теорему Рисса и неравенство (2.5).

Установим теперь, что класс единственности содержит класс суммируемых функций. Введем наряду с  $H(a, b)$  пространства  $C(a, b)$ ,  $L_p(a, b)$ ,  $p > 1$  вектор-функций  $s(\rho) = \{s_1(\rho), s_2(\rho)\}$ , определяемые обычной метрикой

$$(2.7) \quad \|s\|_C = \max_n \sup_{\rho} |s_n(\rho)|, \quad a \leq \rho \leq b, \quad n = 1, 2$$

$$\|s\|_{L_p} = \left( \int_a^b |s(\rho)|^p d\rho \right)^{1/p}, \quad p > 1$$

Аналогично тому, как это было сделано в работе [6], можно установить следующие результаты.

*Теорема 2.* Оператор  $L$  в соотношениях (1.2) действует из  $L_p(a, b)$  в  $C(a, b)$  непрерывно.

*Теорема 3.* Справедливо вложение

$$L_p(a, b) \subset H(a, b), \quad 1 < p \leq 2$$

Доказательство непосредственно вытекает из неравенств (2.5) и неравенства Хаусдорфа — Юнга для интегралов Фурье.

Из результатов теорем 2 и 3 вытекает

*Теорема 4.* В пространстве  $L_p(a, b)$ ,  $1 < p \leq 2$  уравнение (1.2) не может иметь более одного решения.

*Замечание.* Результат леммы 2 устанавливает положительную определенность оператора  $L$  левой части (1.2), что фактически означает неотрицательность функционала энергии  $E(s)$ , накапливаемой упругой средой при деформации. Требование (2.2) обеспечивает конечность энергии в задачах Б, В и является условием самоуравновешенности нагрузки на верхней грани клина.

3. В целях дальнейшего исследования сведем уравнение (1.2) к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Будем исходить из соотношения

$$(3.1) \quad K(z) s^*(z) = f^*(z) + f_a^*(z) + f_b^*(z), \quad -\infty < z < \infty$$

вытекающего из (1.2). Через  $f_a^*(z)$  и  $f_b^*(z)$  обозначены трансформанты Меллина от естественного продолжения  $f(\rho)$  в области  $0 \leq \rho \leq a$ ,  $b \leq \rho < \infty$  соответственно. Нетрудно установить, что вектор-функции

$$(3.2) \quad \Phi^+(z) = f_a^*(z) a^{-iz/2\alpha}, \quad F^+(z) = f^*(z) b^{-iz/2\alpha}$$

регулярны в верхней полуплоскости и исчезают при  $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ , а вектор-функции

$$(3.3) \quad \Psi^-(z) = f_b^*(z) b^{-iz/2\alpha}, \quad F^-(z) = f^*(z) a^{-iz/2\alpha}$$

регулярны в нижней полуплоскости и исчезают при  $\text{Im } z \rightarrow -\infty$ . Тогда в силу (3.2) и (3.3) соотношение (3.1) можно записать в двух эквивалентных формах

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}(z) S^+(z) &= \mathbf{F}^+(z) + \Phi^+(z) \lambda^{iz/2\alpha} + \Psi^-(z) \\ \mathbf{K}(z) S^-(z) &= \mathbf{F}^-(z) + \Phi^+(z) + \Psi^-(z) \lambda^{-iz/2\alpha} \\ -\infty < z < \infty, \quad \lambda = b/a > 1 \end{aligned}$$

Для применения метода факторизации к соотношениям (3.4) необходимо факторизовать матрицу-функцию  $\mathbf{K}(z)$  относительно вещественной оси в комплексной плоскости  $z$ . Из асимптотических соотношений (1.4) вытекает, что при  $|z| \rightarrow \infty$  эта матрица близка к некоторой функционально-коммутирующей матрице [1], факторизуемой в конечном виде.

Учитывая сказанное, введем некоторую функционально-коммутирующую матрицу

$$(3.5) \quad \mathbf{A}(z) = \begin{vmatrix} K_{11}(z) & iK_{12}(z) \\ -iK_{12}(z) & K_{11}(z) \end{vmatrix}, \quad -\infty < z < \infty$$

На основе теории функций от матриц [7] можно получить формулы факторизации, которые имеют следующий вид:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}(z) &= \mathbf{A}_+(z) \mathbf{A}_-(z), \quad R_+(z) R_-(z) = K_{11}(z) + K_{12}(z), \\ K_+(z) K_-(z) &= K_{11}(z) - K_{12}(z) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_\pm(z) = \begin{vmatrix} R_{11}^\pm(z) & iR_{12}^\pm(z) \\ -iR_{12}^\pm(z) & R_{11}^\pm(z) \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} R_{11}^\pm(z) &= R_\pm(z) + K_\pm(z) \\ R_{12}^\pm(z) &= R_\pm(z) - K_\pm(z) \end{aligned}$$

*Лемма 4.* Справедливы следующие оценки [1]:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} R_\pm(z) &= C_1 (\mp iz)^{-\tau \mp} [1 + o(z^{-1})], \quad \tau_\pm = 1/2 (1 \pm i\pi^{-1} \ln \kappa) \\ K_\pm(z) &= C_2 (\mp iz)^{-\tau \pm} [1 + o(z^{-1})], \quad \kappa = 3 - 4\nu \end{aligned}$$

Доказательство леммы вытекает из оценок (1.4) и соотношений (3.6).

Представим матрицу  $\mathbf{K}(z)$  в двух эквивалентных формах

$$(3.8) \quad \mathbf{K}(z) = \mathbf{A}_-(z) \mathbf{\Pi}(z) \mathbf{A}_+(z), \quad \mathbf{K}(z) = \mathbf{A}_+(z) \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{A}_-(z)$$

*Теорема 5.* Элементы матрицы  $\mathbf{\Pi}(z)$  имеют вид

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \Pi_{11}(z) &= 1 + \frac{1}{4} [R_{12}^- R_{12}^+ (K_{22} - K_{11}) + R_{11}^+ R_{12}^- (K_{12} - \bar{K}_{12})] \theta^{-1} \\ \Pi_{22}(z) &= 1 + \frac{1}{4} [R_{11}^- R_{11}^+ (K_{22} - K_{11}) + R_{11}^+ R_{12}^- (K_{12} - \bar{K}_{12})] \theta^{-1} \\ \Pi_{12}(z) &= -\frac{i}{4} [R_{12}^- R_{11}^+ (K_{22} - K_{11}) + R_{12}^- R_{12}^+ (K_{12} - \bar{K}_{12})] \theta^{-1} \\ \Pi_{21}(z) &= \frac{i}{4} [R_{11}^- R_{12}^+ (K_{22} - K_{11}) + R_{11}^- R_{11}^+ (K_{12} - \bar{K}_{12})] \theta^{-1} \\ \theta &= \det \mathbf{K}(z) \end{aligned}$$

и обладают следующими асимптотическими свойствами:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \Pi_{11}(z), \Pi_{22}(z) &= 1 + O(z^2 \operatorname{ch}^{-1} z) \\ \Pi_{12}(z), \Pi_{21}(z) &= O(z^2 \operatorname{ch}^{-1} z), \quad |z| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Доказательство теоремы основано на непосредственном вычислении элементов матрицы  $\Pi(z)$  и применении асимптотических оценок (3.7). Соотношения, аналогичные (3.9) и (3.10), оказываются справедливыми и для матрицы  $\Lambda(z)$ .

В силу асимптотических оценок вида (3.10) элементы матриц  $\Pi(z)$  и  $\Lambda(z)$  можно приблизить дробно-рациональными функциями с любой степенью точности. Тогда к полученным матрицам можно применить известные результаты [8] о факторизации матриц-функций и, следовательно, получить представления вида

$$(3.11) \quad \Pi(z) \approx \Pi_-^*(z) \Pi_+^*(z), \quad \Lambda(z) \approx \Lambda_+^*(z) \Lambda_-^*(z)$$

где  $\Pi_{\pm}^*(z), \Lambda_{\pm}^*(z)$  — матрицы-функции с дробно-рациональными элементами, регулярные в областях  $\operatorname{Im} z > 0$  и  $\operatorname{Im} z < 0$  соответственно. Внося выражения (3.8) в (3.4) и производя факторизацию относительно вещественной оси с учетом (3.11), приходим к соотношениям

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \{U_-^{-1}(z) F^+(z)\}^- + \{U_-^{-1}(z) \Phi^+(z) \lambda^{iz/2\alpha}\}^- + U_-^{-1}(z) \Psi^-(z) &= 0, \\ U_-(z) &= A_-(z) \Pi_-^*(z) \\ \{V_+^{-1}(z) F^-(z)\}^+ + \{V_+^{-1}(z) \Psi^-(z) \lambda^{-iz/2\alpha}\}^+ + V_+^{-1}(z) \Phi^+(z) &= 0, \\ V_+(z) &= A_+(z) \Lambda_+^*(z) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$(3.13) \quad \begin{aligned} U_-^{-1}(z) V_+(z) &= C(z) \\ U_-^{-1}(z) \Psi^-(z) &= -X_1(z), \quad V_+^{-1}(z) \Phi^+(z) = X_2(z) \end{aligned}$$

В силу соотношений (3.12), (3.13), а также теорем о факторизации, приходим к следующей системе интегральных уравнений второго рода относительно неизвестных векторов  $X_1(z), X_2(z)$  ( $\operatorname{Im} z < 0$ ):

$$(3.14) \quad \begin{aligned} 2\pi i X_1(z) &= \int_{\Gamma} \frac{C(-\zeta) X_2(\zeta)}{\zeta + z} \lambda^{-i\zeta/2\alpha} d\zeta + \int_{\Gamma} \frac{U_-^{-1}(\zeta) F^+(\zeta)}{\zeta + z} \lambda^{-i\zeta/2\alpha} d\zeta \\ 2\pi i X_2(z) &= \int_{\Gamma} \frac{C^{-1}(\zeta) X_1(\zeta)}{\zeta + z} \lambda^{-i\zeta/2\alpha} d\zeta + \int_{\Gamma} \frac{V_+^{-1}(\zeta) F^-(\zeta)}{\zeta + z} \lambda^{-i\zeta/2\alpha} d\zeta \end{aligned}$$

где контур  $\Gamma$  расположен в полуплоскости  $\operatorname{Im} \zeta < 0$  и огибает сверху нули подынтегральных функций в этой полуплоскости.

Тогда в случае разрешимости системы (3.14) из соотношений (3.4) получим выражение для вектора напряжений в области контакта, имею-

щее вид

$$(3.15) \quad 2\pi s(\rho)\rho = \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} K^{-1}(u) f^*(u) \rho^{-iu/2\alpha} du - \\ - \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} U_+^{-1}(u) X_1(u) \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-iu/2\alpha} du + \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} V_+^{-1}(u) X_2(-u) \left(\frac{b}{\rho}\right)^{-iu/2\alpha} du \\ s(\rho) = \sigma^\circ(r)/2G$$

Для изучения вопроса о разрешимости системы (3.14) введем пространство  $c(\gamma)$  вектор-функций  $f(z) = \{f_1(z), f_2(z)\}$ ,  $z \in \Gamma$ , определяемое метрикой

$$\|f\|_{c(\gamma)} = \max_n \max_z |f_n(z) z^\gamma|, \lim |f_n(z) z^\gamma| = 0, |z| \rightarrow \infty, \gamma > 0$$

**Теорема 6.** Если свободный член системы (3.14) принадлежит  $c(\gamma)$ ,  $0 < \gamma < 1$ , то в указанном пространстве система однозначно разрешима.

Для доказательства теоремы устанавливается полная непрерывность оператора левой части системы (3.14) в  $c(\gamma)$ ,  $0 < \gamma < 1$ . При этом контур интегрирования  $\Gamma$  в нижней полуплоскости предварительно деформируется таким образом, чтобы достаточно удаленные его части лежали на биссектрисах углов третьего и четвертого квадрантов координатной плоскости  $\zeta$ . Затем проверяется выполнение условий критерия компактности.

4. В качестве примера рассмотрим более детально задачу о штампе с плоским основанием, жестко сцепленным с упругим клином, нижняя грань которого также жестко закреплена (задача А).

В соответствии с изложенной теорией, а также с учетом соотношения (1.3) А для факторизации функций (3.6) оказалось удобным введение следующей аппроксимации:

$$(4.1) \quad K_{11}(z) \pm K_{12}(z) \approx \sqrt{\kappa} b^\pm \frac{\text{sh}(b^\pm z + 1/2 \ln \kappa)}{b^\pm z + 1/2 \ln \kappa} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

Здесь  $P_{2n}(z)$ ,  $Q_{2n}(z)$  — полиномы степени  $2n$ , а  $b^\pm$  — константы аппроксимации, находимые из условий совпадения левой и правой части при  $z = 0$ . (Факторизация выражения, стоящего в правой части, не представляет труда и осуществляется точно относительно вещественной оси. При этом выполняются оценки (3.7).)

При построении приближенного решения в рассматриваемой задаче ограничивались случаем  $n = 0$ . Как показал численный анализ, погрешность аппроксимации (4.1) при этом не превосходит 2%.

Для осуществления приближенной факторизации матриц  $\Pi(z)$  и  $\Lambda(z)$  в соответствии с (3.8) элементы этих матриц предварительно приближали дробно-рациональными функциями с использованием полиномов Бернштейна [1, 9]. Полученную в результате систему второго рода (3.14) посредством разложения входящих в нее интегралов в ряды по вычетам сводили в некоторой бесконечной системе. В предположении  $\lambda = b/a > 1$  строили асимптотическое решение системы.

После нахождения вектор-функций  $X_{1,2}(z)$  искомые контактные напряжения выражаются формулами (3.15). Полученные при этом интегралы преобразуются к формулам операционного исчисления и вычисляются в замкнутой форме [10]. Главный член асимптотического выражения вектора контактных напряжений представляется в следующем виде ( $\lambda \gg 1$ ):

$$(4.2) \quad Y\rho [\tau_{\varphi r}^\circ(\rho) + i\sigma_\varphi^\circ(\rho)]/4G = -K^{-1}(0) f(\rho) - \\ - \{Y_a \Gamma^{-1}(\tau_+) (\rho/a)^{-\beta\epsilon} [1 - (\rho/a)^{-\beta}]^{-\tau_+} +$$

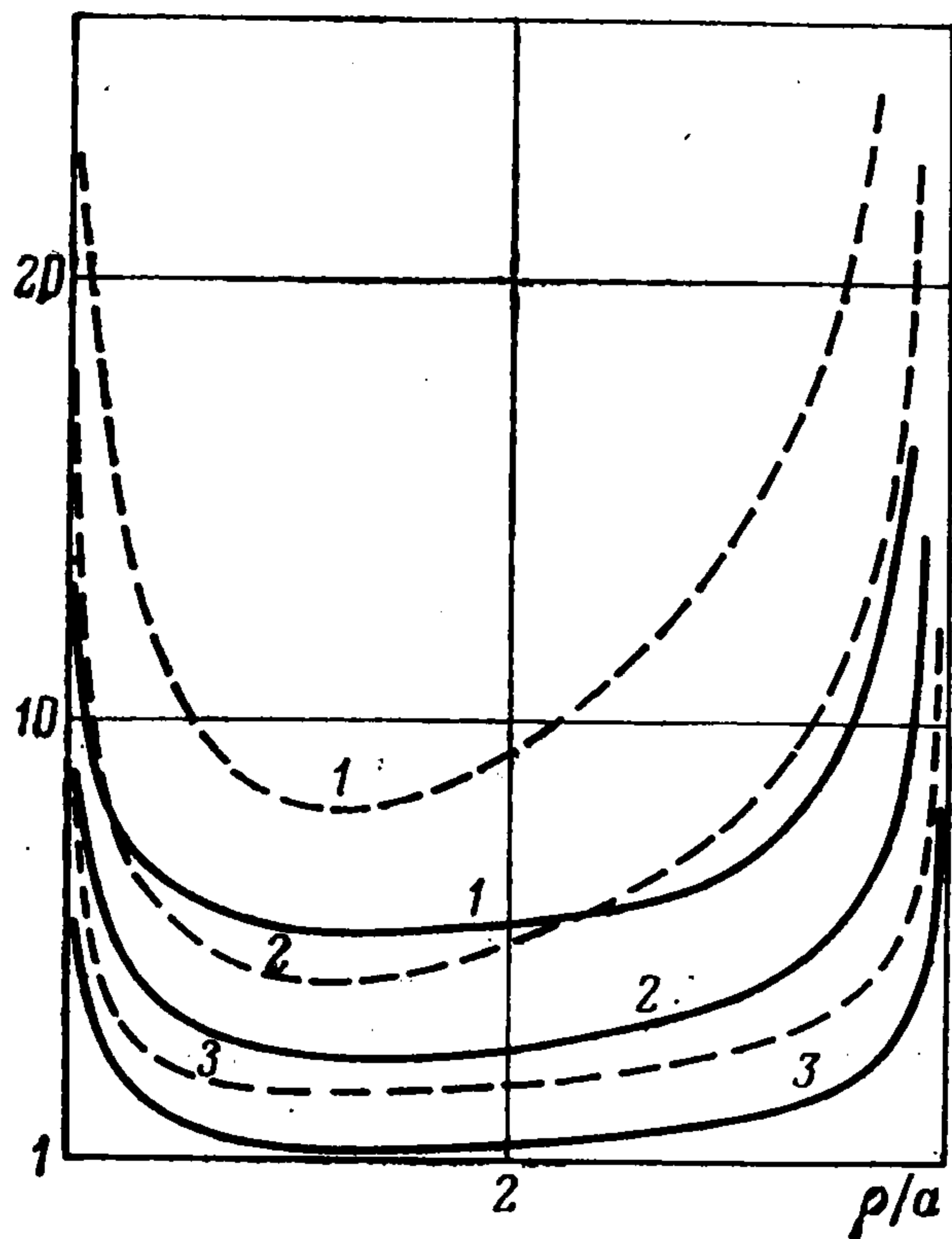
$$\dagger Y_b \Gamma^{-1}(\tau_-) (b/\rho)^{-\beta \varepsilon_+} [1 - (b/\rho)^{-\beta}]^{-\tau_-} [1 + O(\alpha^{-1} \lambda^{-m/2\alpha})]$$

$$\beta = \pi / 2\alpha b^+, \tau_{\pm} = 1/2 (1 \pm i\pi^{-1} \ln \kappa), \varepsilon_{\pm} = \tau_{\pm} - 1/2, m > 0$$

где  $\Gamma(z)$  — эйлеров интеграл второго рода,  $f(\rho)$  — вектор смещений в области контакта,  $Y, Y_a, Y_b$  зависят от постоянных аппроксимации.

Для численного анализа полагали  $f(\rho) = \{1, 2\}$ ,  $\kappa = 1.6$ ,  $\lambda = 3$ . На фигуре показаны зависимости  $\alpha \tau_{\varphi}^{\circ} / 2G$  (сплошные линии) и  $\alpha \sigma_{\varphi}^{\circ} / 2G$  (пунктир) от  $\rho/a$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям угла раствора  $\alpha$ , равным  $3\pi/10$ ,  $\pi/5$ ,  $\pi/10$ . Кривые контактных напряжений с ростом  $\alpha$  располагаются в обратном порядке.

*Замечание.* В окрестности границ зоны контакта в соответствии с (4.2) наблюдается значительная осцилляция контактных напряжений, частота которой увеличивается с приближением к границам  $\rho = a$ ,  $\rho = b$ . Аналогичное явление ранее отмечалось авторами работ [11–13] и др. при изучении контактных задач с учетом сил сцепления. Указанный эффект в действительности не наблюдается и возникает в результате нарушения линейности связи между напряжениями и деформациями при внедрении жестко сцепленной со средой острой кромки штампа. Как показывает анализ соотношений (4.2), осцилляция появляется на весьма малых расстояниях от краев штампа ( $\sim 10^{-4}$  ширины зоны контакта) и поэтому на фигуре не отражена.



Автор благодарит В. А. Бабешко за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

Поступила 29 IX 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В. А. О системах интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1957, т. 220, № 6.
2. Matezynski M. Elastic wedge with discontinuous boundary conditions. Arch. mech. stosowanej, 1963, vol. 15, No. 6.
3. Srivastav R. P. Certain two-dimensional mixed boundary-value problems for wedge-shaped regions and dual integral equations. Proc. Edinburg. Math. Soc. Ser. 2, 1965, vol. 14, No. 4.
4. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости М., «Наука», 1974.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
6. Беркович В. Н. Некоторые контактные задачи для пространственного клина с конечным числом областей контакта. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Физматгиз, 1966.
8. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., «Наука», 1970.
9. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. М., «Наука», 1966.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 1. М., «Наука», 1969.
11. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 4.
12. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
13. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Физматгиз, 1966.