Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

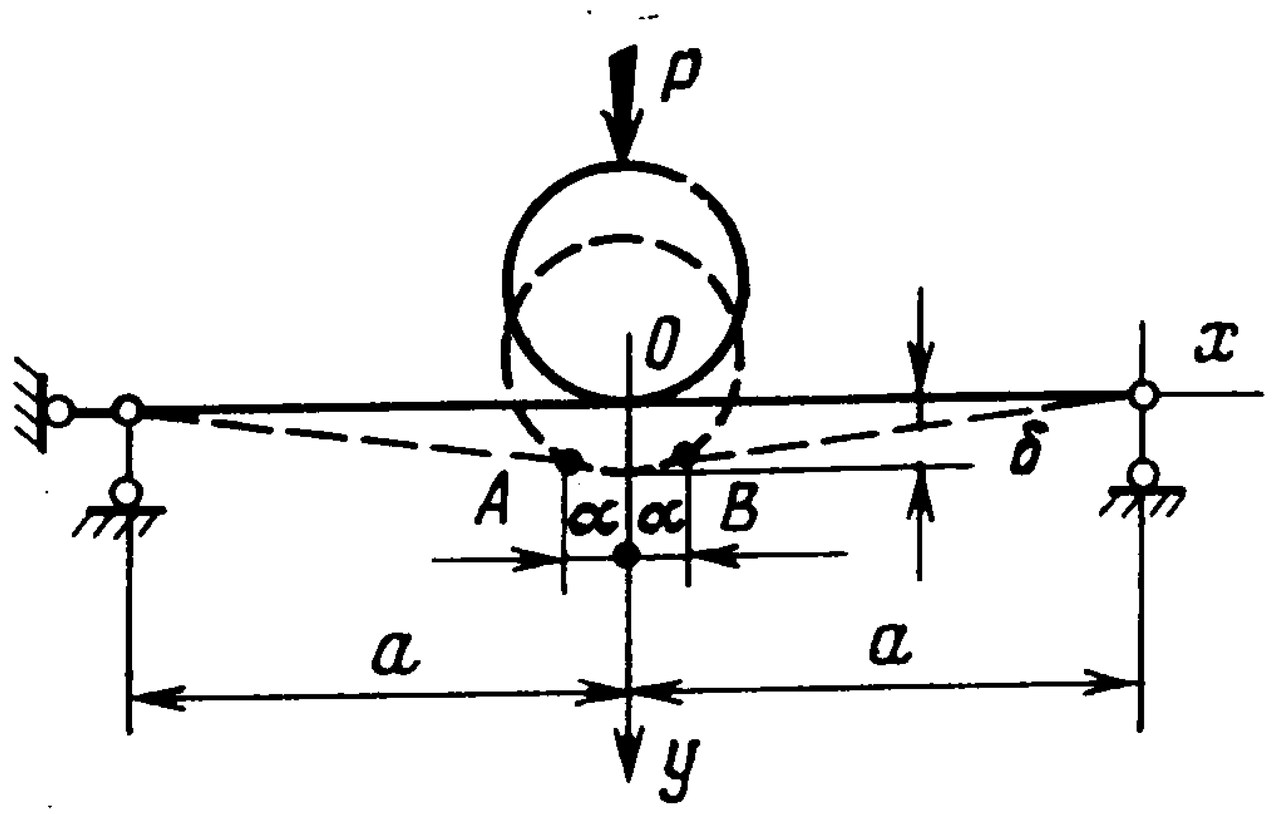
ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Г. Я. Попов

(Одесса)

Дается способ построения точного решения одномерных интегральных уравнений специального вида, к которым приводятся задачи о контакте упругих тонкостенных элементов с твердым телом и между собой. Впервые такие задачи, как известно, были поставлены Л. А. Галиным [1], исходившим из справедливости гипотезы Кирхгофа — Лява для тонкостенного элемента. Здесь, как и в работе [2], принята модель: срединная поверхность тонкостенного элемента (оболочка, пластинка, балка), нормальные перемещения которой подчиняются названной гипотезе, покрывается слоем упругого винклеровского основания с коэффициентом податливости k.

1. Формулировка типичной задачи. Рассмотрим следующую контактную задачу. В шарнирно опертую балку длиной $2a$ (фиг. 1) и жесткостью на изгиб D под действием силы P вдавливается абсолютно твердое тело (штамп). Профиль штампа описывается функцией $g(x) = g(-x)$. Требуется найти контактное напряжение $p(x)$ и длину площадки контакта 2α.



Фиг. 1

Используя известную [3] функцию влияния

$$12aG_a(x, s) = (s-a)(x+a)[(x+a)^2+(s-a)^2-4a^2], \quad x \leqslant s \tag{1.1}$$

(при $x \geqslant s$ следует поменять местами x и s) для шарнирно опертой балки, являющуюся функцией Грина краевой задачи

$$Dy^{\mathrm{IV}}(x) = q(x) \quad (|x| \leqslant a), \quad y(\pm a) = y''(\pm a) = 0 \tag{1.2}$$

поставленную контактную задачу можем сформулировать (ср. [2]) в виде следующего интегрального уравнения:

$$kp(x) + \frac{1}{D}\int_{-\alpha}^{\alpha} G_a(x, s)\, p(s)\, ds = \delta - g(x) \quad (|x| \leqslant \alpha) \tag{1.3}$$

Для определения полудлины площадки контакта α и поступательного перемещения штампа $\delta = y(0)$ будут служить уравнения

$$p(\pm\alpha) = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x)\, dx = P \tag{1.4}$$

Отметим, что функцию Грина (1.1) можно также представить [4] в виде итерации

$$G_a(x, s) = \int_{-a}^{a} G_a^\circ(x, t)\, G_a^\circ(t, s)\, dt \tag{1.5}$$

из функции Грина более простой краевой задачи: $y''(x) = f(x)$, $|x| \leqslant a$; $y(\pm a) = 0$.

Ниже излагаются приемы решения интегральных уравнений с ядрами в виде функций Грина или итераций из последних.

2. Интегральные уравнения на основном отрезке. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b G(x, s)\, \rho(s)\, \varphi(s)\, ds = g(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2.1}$$

Здесь $\rho(x)$ — заданная неотрицательная непрерывная функция; $g(x)$, $\varphi(x)$ — заданная и искомая функции из $L_2(a, b)$.

Ядро $G(x, s)$ представляет собой функцию Грина краевой задачи

$$\begin{gathered} l[y] = \sum_{j=0}^{n} p_j(x)\, y^{(n-j)}(x) = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \\ U_\nu[y] = U_{\nu a}[y] + U_{\nu b}[y] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1) \\ \left(\{U_{\nu a}[y],\ U_{\nu b}[y]\} = \sum_{j=0}^{n-1} \{A_{\nu j} y^{(j)}(a),\ B_{\nu j} y^{(j)}(b)\}\right) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Для общности будем считать, что функции $p_j(x)$ и коэффициенты $A_{\nu j}$, $B_{\nu j}$ зависят от параметра λ и, стало быть, от него зависит $G(x, s)$.

Функция Грина краевой задачи (2.2) существует и единственна [4], если соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, либо, что равносильно, выполнено условие

$$\det \{U_\nu [y_j]\}_{\nu, j = 0, 1, \ldots, n-1} \neq 0 \tag{2.3}$$

($y_j(x)$ — фундаментальная система оператора l).

Имеет место представление [5]

$$G(x, s) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} y_j(x)\, a_j(s) & (a \leqslant x \leqslant s) \\ \sum_{j=0}^{n-1} y_j(x)\, b_j(s) & (s \leqslant x \leqslant b) \end{cases} \tag{2.4}$$

Функции $a_j(s)$ и $b_j(s)$ находятся из уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{j=0}^{n-1} (b_j - a_j)\, y_j^{(m)}(s) = 0, \quad \sum_{j=0}^{n-1} (b_j - a_j)\, y_j^{(n-1)}(s) = p_0^{-1}(s) \\ (m = 0, 1, \ldots, n-2) \\ \sum_{j=0}^{n-1} a_j U_{\nu a}[y_j] + \sum_{j=0}^{n-1} b_j U_{\nu b}[y_j] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Интегральное уравнение (2.1) равносильно [4] краевой задаче

$$l[y]-\lambda\rho y=f \quad (a\leqslant x\leqslant b),\quad U_\nu[y]=0 \quad (\nu=0,1,\ldots,n-1) \tag{2.6}$$

при условии, что

$$g(x)=\int_a^b G(x,s)f(s)\,ds \quad (f=l[g]),\quad U_\nu[g]=0 \quad (\nu=0,1,\ldots,n-1) \tag{2.7}$$

При этом собственные числа уравнения (2.1) совпадают [4] с корнями уравнения

$$\det\{U_\nu[y_j(x,\lambda)]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n-1}=0 \tag{2.8}$$

($y_j(x,\lambda)$ — фундаментальная система оператора $l-\lambda\rho$).

Для решения уравнения (2.1) следует краевую задачу (2.6) с учетом (2.7) записать в виде

$$l[\varphi-g]-\lambda\rho(\varphi-g)=\lambda\rho g,\quad U_\nu[\varphi-g]=0$$

и воспользоваться функцией Грина $\Gamma_\lambda(x,s)$ краевой задачи (2.6). В результате получим

$$\varphi(x)=g(x)+\lambda\int_a^b\Gamma_\lambda(x,s)\rho(s)g(s)\,ds \quad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{2.9}$$

Используя теорию вполне непрерывных операторов [5, 6], можно показать (на чем здесь не будем останавливаться), что ограничения (2.7) на правую часть уравнения (2.1) можно отбросить, т. е. что имеет место следующая

Теорема 2.1. Для произвольной правой части из $L_2(a,b)$ единственное решение интегрального уравнения (2.1) имеет вид (2.9), где $\Gamma_\lambda(x,s)$ — функция Грина краевой задачи (2.6). Спектр интегрального уравнения (2.1) совпадает с корнями уравнения (2.8).

3. Интегральные уравнения на суженном отрезке. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_\alpha^\beta G(x,s)\rho(s)\varphi(s)\,ds=g(x) \quad (a<\alpha\leqslant x\leqslant\beta<b) \tag{3.1}$$

В первую очередь выясним, каким условиям удовлетворяет функция Грина краевой задачи (2.2) в точках $x=\alpha$ и $x=\beta$. Из (2.4) следует, что

$$G^{(m)}(\alpha,s)=\sum_{j=0}^{n-1}y_j^{(m)}(\alpha)a_j(s) \quad (\alpha\leqslant s),\quad m=0,1,\ldots,n-1$$

$$G^{(m)}(\beta,s)=\sum_{j=0}^{n-1}y_j^{(m)}(\beta)b_j(s) \quad (\beta\geqslant s) \tag{3.2}$$

Поскольку

$$\det\{y_j^{(m)}(x)\}_{j,m=0,1,\ldots,n-1}\neq0 \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$$

как определитель Вронского, то из (3.2) найдем

$$a_j(s) = \sum_{k=0}^{n-1} M_{jk}(\tilde{\alpha}) G^{(k)}(\tilde{\alpha}, s), \quad b_j(s) = \sum_{k=0}^{n-1} M_{jk}(\beta) G^{(k)}(\beta, s)$$

Подставив эти выражения во второе уравнение из (2.5), обнаружим, что

$$U_\nu^{\alpha,\beta}[G(x, s)] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Здесь

$$U_\nu^{\alpha,\beta}[y] = \sum_{k=0}^{n-1} S_{\nu k}(\tilde{\alpha}) y^{(k)}(\alpha) + \sum_{k=0}^{n-1} S_{\nu k}(\beta) y^{(k)}(\beta)$$

$$\left(S_{\nu k}(\alpha) = \sum_{j=0}^{n-1} M_{jk}(\tilde{\alpha}) U_{\nu a}[y_j], \quad S_{\nu k}(\beta) = \sum_{j=0}^{n-1} M_{jk}(\beta) U_{\nu b}[y_j]\right) \tag{3.3}$$

Если учесть, что по построению матрицы

$$\{y_j^{(m)}(x)\}_{j,m=0,1,\ldots,n-1}, \quad \{M_{jk}(x)\}_{j,k=0,1,\ldots,n-1}$$

обратны, то легко показать справедливость равенства

$$U_\nu^{\alpha,\beta}[y_j] = U_\nu[y_j]$$

и, следовательно

$$\det\{U_\nu^{\alpha,\beta}[y_j]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n-1} \neq 0$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 3.1. Функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи (2.2), заданной на отрезке $[a, b]$, является одновременно и единственной функцией Грина краевой задачи

$$l[y] = f, \quad U_\nu^{\alpha,\beta}[y] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{3.4}$$

заданной на отрезке $[\alpha, \beta]$, содержащемся в $[a, b]$.

Из теорем 2.1 и 3.1 вытекает

Теорема 3.2. Для произвольной правой части из $L_2(\alpha, \beta)$ единственное решение интегрального уравнения (3.1) дается формулой

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_\alpha^\beta \Gamma_\lambda(x, s) \rho(s) g(s)\, ds \tag{3.5}$$

где резольвента $\Gamma_\lambda(x, s)$ — функция Грина краевой задачи

$$l[y] - \lambda\rho y = f \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \quad U_\nu^{\alpha,\beta}[y] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)! \tag{3.6}$$

Спектр интегрального уравнения (3.1) совпадает с корнями уравнения

$$\det\{U_\nu^{\alpha,\beta}[y_j(x, \lambda)]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n-1} = 0$$

В случае симметричного ядра, пользуясь теорией Гильберта — Шмидта [4, 6, 7], можно указать форму решения интегрального уравнения, отличную от даваемой теоремой 3.2. Для этого обозначим ортонормированные собственные функции однородной краевой задачи (3.6) через $\varphi_\rho(x, \lambda_n)$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta G(x, s)\rho(s)\varphi_\rho(s, \lambda_n)\,ds = \lambda_n^{-1}\varphi_\rho(x, \lambda_n)$$

$$\int_\alpha^\beta \rho(x)\varphi_\rho(x, \lambda_n)\varphi_\rho(x, \lambda_m)\,dx = \delta_{mn}$$

Принимая это во внимание, для решения уравнения (3.1) получаем формулу

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda_n f_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_\rho(x, \lambda_n), \quad f_n = \int_\alpha^\beta f(x)\varphi_\rho(x, \lambda_n)\,dx$$

Можно показать, что доказанные выше теоремы 2.1, 3.1, 3.2 остаются справедливыми и для систем интегральных уравнений вида (2.1) или (3.1), только роль скалярных краевых задач и их функций Грина будут выполнять матричные [4] краевые задачи и матричные функции Грина.

4. Интегральные уравнения с итерированными ядрами Грина. Рассмотрим уравнение (3.1) с ядром

$$G(x, s) = \int_\alpha^\beta G_0(x, t)G_1(t, s)\,dt \tag{4.1}$$

представляющим итерацию двух функций Грина, каждая из которых соответствует различным краевым задачам, заданным на различных отрезках, содержащих отрезок $[\alpha, \beta]$. Теорема 3.1 позволяет считать, что указанные функции Грина отвечают краевым задачам ($j = 0$ и $j = 1$) на общем отрезке $[\alpha, \beta]$, т. е.

$$l_j[y] = f \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \qquad U_{\nu,j}^{\alpha,\beta}[y] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_j) \tag{4.2}$$

Из (4.1) вытекает, что $l_0[G] = G_1$ и свидетельствует о непрерывности на всем отрезке $[\alpha, \beta]$ всех производных вплоть до n_0-го порядка функции $G(x, s)$ при любом фиксированном s. Кроме того, из (4.1) и (4.2) следует, что

$$U_{\nu,0}^{\alpha,\beta}[G] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_0 - 1), \quad U_{\nu,1}^{\alpha,\beta}[l_0 G] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_1 - 1) \tag{4.3}$$

Если считать, что коэффициенты дифференциального оператора l_0 дифференцируемы n_1 раз, то будет иметь смысл оператор l_1 и можно рассматривать краевую задачу

$$l_1 l_0[y] = f \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \quad U_\nu^*[y] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_0 + n_1 - 1) \tag{4.4}$$

Здесь

$$U_\nu^*[y] = U_{\nu,0}^{\alpha,\beta}[y] \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_0 - 1), \quad U_{n_0+\nu}^*[y] = U_{\nu,1}^{\alpha,\beta}[l_0 y] \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_1 - 1) \tag{4.5}$$

Ее однородный вариант имеет только тривиальное решение, так как

$$\det\{U_\nu^*[y_j]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n_0+n_1-1} \neq 0 \tag{4.6}$$

где $y_j(x)$ — фундаментальная система уравнения из (4.4). Она связана с фундаментальными системами $y_j^0(x)$ и $y_j^1(x)$ дифференциальных операторов l_0 и l_1 следующим образом:

$$y_j(x) = y_j^0(x) \quad (j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1), \quad y_{n_0+j}(x) = = y_j^1(x) \quad (j = 0, 1, \ldots, n - 1) \tag{4.7}$$

причем

$$l_0[y_j^1] = y_j^0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n_1 - 1)$$

Чтобы убедиться в справедливости (4.6), следует учесть, что содержащаяся там матрица в силу (4.7) и (4.5) является правой треугольной блочной матрицей, состоящей из четырех блоков, причем диагональными блоками будут матрицы

$$\{U_{\nu,0}^{\alpha,\beta}[y_j^0]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n_0-1}, \quad \{U_{\nu,1}^{\alpha,\beta}[y_j^1]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n_1-1}$$

с отличными от нуля в силу теоремы 3.1 определителями. Определитель же (4.6) равен [7] произведению этих определителей. Следовательно, если существует функция Грина задачи (4.4), то она единственна [4]. Но в силу (4.1) и (4.3) функция

$$y(x) = \int_\alpha^\beta G(x, s) f(s)\, ds$$

— решение краевой задачи (4.4), а потому формула (4.1) определяет ее функцию Грина. Таким образом, если учесть теорему 2.1, то доказана следующая

Теорема 4.1. Единственное из $L_2(\alpha, \beta)$ решение интегрального уравнения (3.1) с ядром вида (4.1) определяется (при $g \in L_2$) формулой (3.4), в которой $\Gamma_\lambda(x, s)$ — функция Грина краевой задачи

$$l_1 l_0[y] - \lambda\rho y = f \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \quad U_\nu^*[y] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_0 + n_1 - 1) \tag{4.8}$$

При этом спектр определяется корнями уравнения

$$\det\{U_\nu^*[y_j(x, \lambda)]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n_0+n_1-1}$$

где $y_j(x, \lambda)$ — фундаментальная система решения оператора $l_1 l_0 - \lambda\rho$.

В частном случае, когда

$$G(x, s) = \int_\alpha^\beta G_0(x, t) G_0(t, s)\, dt \tag{4.9}$$

можно указать еще одну форму (в предположении, что G_0 не зависят от λ) решения. Для этого в уравнении (3.1) с ядром (4.9) положим $\lambda = \mu^2$ и обозначим резольвенту уравнения

$$\varphi(x) - \mu \int_\alpha^\beta G_0(x, s)\varphi(s)\, ds = g(x) \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$$

через $\Gamma_0(x, s, \mu)$. Тогда резольвента $\Gamma(x, s, \mu^2)$ рассматриваемого интегрального уравнения запишется в виде (см. [3], стр. 100)

$$2\mu\Gamma(x, s, \mu^2) = \Gamma_0(x, s, \mu) - \Gamma_0(x, s, -\mu)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4.2. Единственное решение из $L_2(\alpha, \beta)$ интегрального уравнения (3.1) при $\lambda = \mu^2$ с ядром (4.9) дается (при $\rho \equiv 1$) формулой

$$\varphi(x) = g(x) + \frac{\mu}{2}\int_\alpha^\beta [\Gamma_0(x, s, \mu) - \Gamma_0(x, s - \mu)]\, g(s)\, ds$$

где $\Gamma_0(s, x, \mu)$ — функция Грина краевой задачи

$$l_0[y] - \mu y = f \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \quad U_{\nu,0}^{\alpha,\beta}[y] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_0 - 1)$$

При этом собственные значения равны квадратам корней уравнения

$$\det\{U_{\nu,0}^{\alpha,\beta}[y_j^0(x, \mu)]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n_0-1} = 0$$

где $y_j^0(x, \mu)$ — фундаментальная система оператора $l_0 - \mu$.

5. Интегральные уравнения с суперпозицией функций Грина. Уравнения вида

$$\varphi - \lambda(G_0\varphi + G_1\varphi) = g \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta) \tag{5.1}$$

$$G_j\varphi = \int_\alpha^\beta G_j(x, s)\rho_j(s)\varphi(s)\, ds \quad (j = 0, 1)$$

возникают при контакте двух тонкостенных элементов между собой. С целью построения их решения введем функции

$$\chi_0 = \varphi - \lambda G_0\varphi, \quad \chi_1 = \varphi - \lambda G_1\varphi \tag{5.2}$$

и перепишем (5.1) в виде

$$\chi_0 + \chi_1 - \varphi = g \tag{5.3}$$

Если

$$\det\{U_{\nu,m}^{\alpha,\beta}[y_j^m(x, \lambda)]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n_m-1} \neq 0 \quad (m = 0, 1) \tag{5.4}$$

то согласно теореме 2.1 можно обратить уравнения (5.2)

$$\varphi = \chi_0 + \lambda\Gamma_0\chi_0, \quad \varphi = \chi_1 + \lambda\Gamma_1\chi_1 \tag{5.5}$$

$$\left(\Gamma_m f = \int_\alpha^\beta \Gamma_\lambda^m(x, s) f(s)\, ds,\ m = 0, 1\right)$$

где $\Gamma_\lambda^m(x, s($ — функции Грина краевых задач

$$l_m[y] - \lambda\rho_m y = f \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \quad U_{\nu,m}^{\alpha,\beta}[y] = 0 \tag{5.6}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n_m - 1), \quad m = 0, 1$$

$(y_j^m(x, \lambda)$ — фундаментальные системы операторов $l_m - \lambda\rho_m)$.

Подставляя последовательно значения для φ из (5.5) в (5.3), приходим к системе интегральных уравнений

$$\chi_0 - \lambda\Gamma_1\chi_1 = g, \quad \chi_1 - \lambda\Gamma_0\chi_0 = g \tag{5.7}$$

Покажем, что если построено решение этой системы, то решение исходного уравнения (5.1) будет даваться одной из формул (5.5). Для этого подставим, например, первое выражение для φ из (5.5) в исходное уравнение (5.1) и примем во внимание, что известные интегральные уравнения, которым удовлетворяют резольвентные ядра [3,5,6], в разбираемом случае будут иметь вид

$$(5.8)\qquad \lambda\Gamma_0 - \lambda G_0 = \lambda^2 G_0 \Gamma_0, \qquad \lambda\Gamma_1 - \lambda G_1 = \lambda^2 G_1 \Gamma_1$$

В результате вместо (5.1) получим $\chi_0 - \lambda G_1 \chi_0 - \lambda^2 G_1 \Gamma_0 \chi_0 = g$.

Чтобы убедиться в том, что это уравнение представляет собой тождество, следует подставить туда выражения

$$\lambda G_1 \chi_0 = \lambda^2 G_1 \Gamma_1 \chi_1 + \lambda G_1 g_1, \quad \lambda^2 G_1 \Gamma_0 \chi_0 = \lambda G_1 \chi_1 - \lambda G_1 g$$

полученные из равенств (5.7) путем действия на них оператора G_1, и учесть первое уравнение (5.7).

С другой стороны, всякое решение интегрального уравнения (5.1) приводит через формулы (5.2) к решению системы (5.7). Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить в (5.7) формулы (5.2) и воспользоваться (5.8).

Займемся теперь решением системы (5.7). Очевидно, всякое ее решение одновременно является и решением таких двух независимых уравнений:

$$(5.9)\qquad \chi_0 - \lambda^2 \Gamma_1 \Gamma_0 \chi_0 = g + \lambda \Gamma_1 g, \qquad \chi_1 - \lambda^2 \Gamma_0 \Gamma_1 \chi_1 = g + \lambda \Gamma_0 g$$

получаемых исключением из системы χ_1 (первое уравнение) и χ_0 (второе уравнение). Покажем, что и, наоборот, решения χ_0, χ_1 интегральных уравнений (5.9) являются решением системы (5.7), если λ не является собственным числом интегральных уравнений (спектр у них общий [3,5]). Действительно, подействовав на первое уравнение из (5.9) оператором Γ_0, приведем его к виду

$$g + \lambda \Gamma_0 \chi_0 - \lambda^2 \Gamma_0 \Gamma_1 (g + \lambda \Gamma_0 \chi_0) = g + \lambda \Gamma_0 g$$

Сопоставив это уравнение со вторым из (5.9), приходим к выводу, что $\chi_1 - \lambda \Gamma_0 \chi_0 = g$. Аналогично получим второе уравнение системы (5.7), подействовав на второе уравнение из (5.9) оператором Γ_1.

Таким образом, приходим к решению одного из уравнений (5.9), например второго. Для его решения следует воспользоваться результатами п. 4. При этом роль ядер $G_0(x, s)$ и $G_1(x, s)$ будут выполнять ядра $\Gamma_\lambda{}^0(x, s)$ и $\Gamma_\lambda{}^1(x, s)$, краевая же задача (4.8) примет следующий вид:

$$(5.10)\qquad \begin{aligned} &(l_1 - \lambda\rho_1)(l_0 - \lambda\rho_0)[y] - \lambda^2 y = f \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta) \\ &U_\nu'[y] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_0 + n_1 - 1) \end{aligned}$$

где

$$U_\nu'[y] = U_{\nu,0}^{\alpha,\beta}[y] \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_0 - 1)$$

$$U'_{\nu+n_0}[y] = U_{\nu,0}^{\alpha,\beta}[l_0 y] - \lambda U_{\nu,1}^{\alpha,\beta}[\rho_0 y] \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n_1 - 1)$$

Очевидно, чтобы введенный здесь дифференциальный оператор имел смысл, необходима непрерывная дифференцируемость функции $\rho_0(x)$ не менее n_1 раз.

Для фундаментальной системы дифференциального уравнения из (5.10) сохраним прежнее обозначение $y_j(x, \lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, n_0 + n_1 - 1$.

Тогда, согласно п. 4, условие

$$\det \{U_\nu' [y_j(x, \lambda)]\}_{\nu, j=0,1,\ldots,n_0+n_1-1} \neq 0 \tag{5.11}$$

обеспечит возможность построения единственной функции Грина $\Gamma(x, s, \lambda)$ краевой задачи (5.10) и тем самым рассматриваемого интегрального уравнения из (5.9). Таким образом, доказана следующая

Теорема 5.1. Если в интегральном уравнении (5.1) $\rho_0(x)$ непрерывно дифференцируема n_1 раз, а параметр λ такой, что обеспечены условия (5.11) и (5.4), то его решение можно получить по формулам

$$\varphi(x) = \chi_1(x) + \lambda \int_\alpha^\beta \Gamma_\lambda^1(x, s)\chi_1(s)\,ds \tag{5.12}$$

$$\chi_1(x) = g(x) + \int_\alpha^\beta \left[\Gamma(x, s, \lambda) + \Gamma_\lambda^0(x, s) + \lambda^2 \int_\alpha^\beta \Gamma(x, t, \lambda)\Gamma_\lambda^0(t, s)\,dt\right] g(s)\,ds$$

6. Интегральные уравнения на нескольких отрезках. Рассмотрим уравнение на двух отрезках

$$\varphi(x) - \lambda\left(\int_\alpha^\omega + \int_\rho^\beta\right) G(x, s)\rho(s)\varphi(s)\,ds = g(x) \tag{6.1}$$

$$x \in [\alpha, \omega] + [\rho, \beta], \quad a \leqslant \alpha < \omega < \rho < \beta \leqslant b$$

Согласно теореме 3.1 ядро рассматриваемого уравнения одновременно является функцией Грина и краевой задачи (3.4). Считая

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad \omega < x < \rho \tag{6.2}$$

доопределим интегральное уравнение (6.1) на всем отрезке $[\alpha, \beta]$ следующим образом:

$$\varphi(x) - \lambda \int_\alpha^\beta G(x, s)\rho(s)\varphi(s)\,ds = h(x) + \psi(x), \quad x \in [\alpha, \beta] \tag{6.3}$$

$$h(x) = g(x), \quad \psi(x) \equiv 0, \quad x \in [\alpha, \omega] + [\rho, \beta]$$

$$h(x) = 0, \psi(x) = -\lambda \int_\alpha^\beta G(x, s)\rho(s)\varphi(s)\,ds, \quad x \in [\omega, \rho]$$

Функция $\rho(x)$ на отрезок $[\omega, \rho]$ продолжается по произвольному закону, но так, чтобы сохранялась ее непрерывность.

Если временно считать функцию $\psi(x)$ известной и λ отличным от собственного числа, то единственным решением интегрального уравнения (6.3), согласно теореме 3.2, будет функция

$$\varphi(x) = h(x) + \psi(x) + \lambda \int_\alpha^\beta \Gamma_\lambda(x, s)[h(s) + \psi(s)]\rho(s)\,ds, \quad x \in [\alpha, \beta] \tag{6.4}$$

При этом резольвента $\Gamma_\lambda(x, s)$ будет представлять собой функцию Грина краевой задачи (3.6), а спектр интегрального уравнения (6.3) будет определяться нулями определителя

$$\det \{U_\nu^{\alpha,\beta} [y_j(x, \lambda)]\}_{\nu, j=0,1,\ldots,n-1} \tag{6.5}$$

Если теперь в (6.4) принять во внимание (6.2), то приходим к следующему уравнению относительно $\psi(x)$:

$$\psi(x)+\lambda\int_{\omega}^{\rho}\Gamma_{\lambda}(x,s)\,\rho(s)\,\psi(s)\,ds=r(x)\quad(\omega\leqslant x\leqslant\rho)\tag{6.6}$$

$$r(x)=-\lambda\left(\int_{\alpha}^{\omega}+\int_{\rho}^{\beta}\right)\Gamma_{\lambda}(x,s)\,\rho(s)\,g(s)\,ds$$

Согласно теореме 3.1 при λ, отличных от корней определителя (6.5), его ядро $\Gamma_{\lambda}(x,s)$ будет функцией Грина краевой задачи

$$l[y]-\lambda\rho y=f\quad(\omega\leqslant x\leqslant\rho),\quad U_{\nu}^{\omega,\rho}[y]=0\quad(\nu=0,1,\ldots,n-1)\tag{6.7}$$

При этом

$$U_{\nu}^{\omega,\rho}[y]=\sum_{k=0}^{n-1}S_{\nu k}(\omega,\lambda)\,y^{(k)}(\omega)+\sum_{k=0}^{n-1}S_{\nu k}(\rho,\lambda)\,y^{(k)}(\rho)\tag{6.8}$$

$$\begin{bmatrix}S_{\nu k}(\omega,\lambda)\\ S_{\nu k}(\rho,\lambda)\end{bmatrix}=\sum_{j=0}^{n-1}\begin{bmatrix}M_{jk}(\omega,\lambda)\\ M_{jk}(\rho,\lambda)\end{bmatrix}\sum_{l=0}^{n-1}\begin{bmatrix}s_{\nu l}(\alpha)\;\;y_j^{(l)}(\alpha,\lambda)\\ s_{\nu l}(\beta)\;\;y_j^{(l)}(\beta,\lambda)\end{bmatrix}$$

Матрица $\{M_{jk}(x,\lambda)\}_{j,k=0,1,\ldots,n-1}$ представляет собой обратную к матрице $\{y_k^{(j)}(x,\lambda)\}_{j,k=0,1,\ldots,n-1}$, определитель которой — вронскиан дифференциального уравнения из (6.7) и потому отличен от нуля. Коэффициенты $s_{\nu l}(\alpha)$ и $s_{\nu l}(\beta)$ по-прежнему определяются формулами (3.3).

Таким образом, для решения интегрального уравнения (6.6), согласно теореме 2.1, следует построить функцию Грина краевой задачи

$$l[y]=f\quad(\omega\leqslant x\leqslant\rho),\quad U_{\nu}^{\omega,\rho}[y]=0\quad(\nu=0,1,\ldots,n-1)\tag{6.9}$$

Если λ таково, что обеспечивается условие

$$\det\{U_{\nu}^{\omega,\rho}[y_j]\}_{\nu,j=0,1,\ldots,n-1}\neq0\tag{6.10}$$

по формулам типа (2.4) и (2.5) можно построить единственную функцию Грина $R_{\lambda}(x,s)$ краевой задачи (6.9) и получить решение интегрального уравнения (6.6) в форме

$$\psi(x)=r(x)-\lambda\int_{\omega}^{\rho}R_{\lambda}(x,s)\,\rho(s)\,r(s)\,ds\quad(\omega\leqslant x\leqslant\rho)\tag{6.11}$$

Для получения исходного уравнения (6.1) остается подставить (6.11) в (6.4) и учесть (6.3), а также уравнения типа (5.8) для резольвенты R_{λ}. В результате будем иметь

$$\varphi(x)=g(x)-r(x)+\lambda\int_{\omega}^{\rho}R_{\lambda}(x,s)\,\rho(s)\,r(s)\,ds\tag{6.12}$$

$$x\in[\alpha,\omega]+[\rho,\beta],\quad r(x)=-\lambda\left(\int_{\alpha}^{\omega}+\int_{\rho}^{\beta}\right)\Gamma_{\lambda}(x,s)\,g(s)\,ds$$

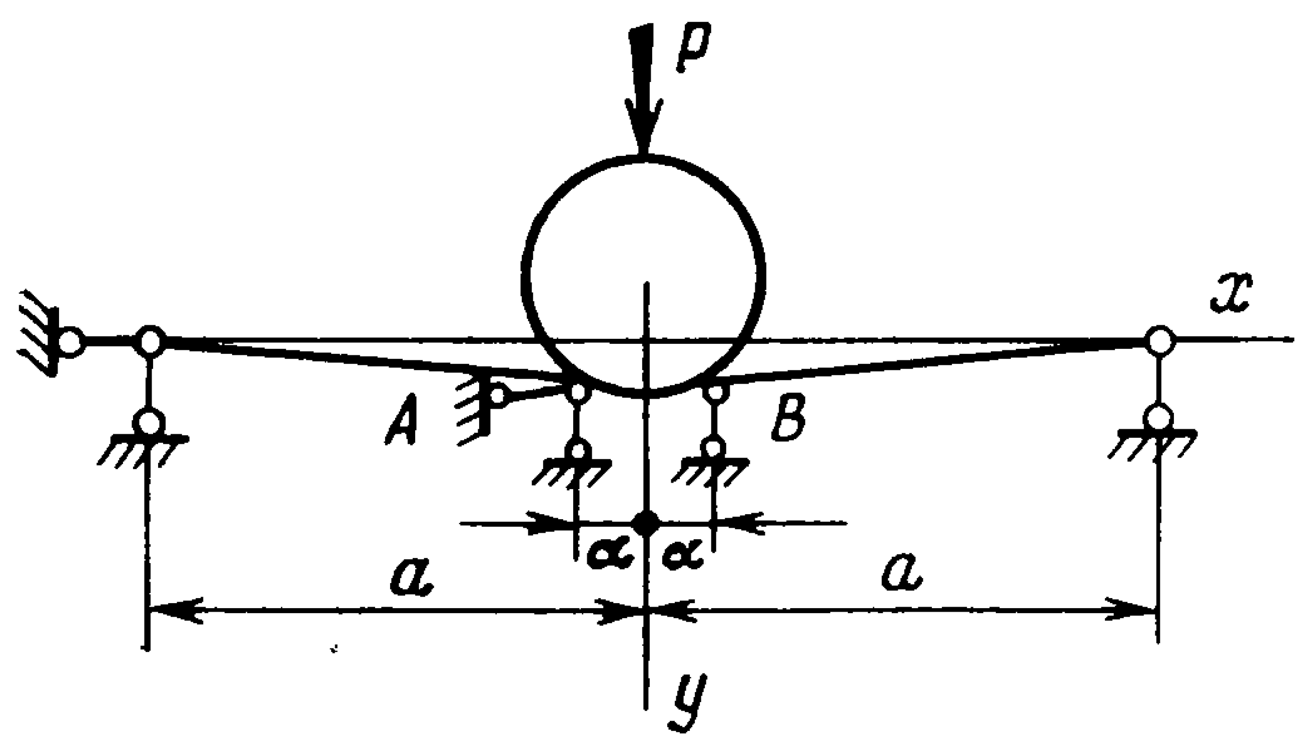
Полученный результат можно сформулировать в виде следующего предложения.

Теорема 6.1. Если выполнены условия (6.5) и (6.10), то решение уравнения (6.1) дается формулой (6.12). При этом функции $\Gamma_\lambda(x, s)$ и $R_\lambda(x, s)$ представляют собой функции Грина краевых задач соответственно (3.6) и (6.9).

Из хода доказательства можно еще сделать вывод, что спектр интегрального уравнения содержится во множестве нулей определителей (6.5) и (6.10).

Изложенный прием решения уравнения (6.1) очевидным образом обобщается на случай, когда количество участков интегрирования более двух. Такие уравнения соответствуют задачам с несколькими участками контакта (например вдавливание в балку нескольких штампов и т. п.)

7. Пример использования полученных результатов. Использование теоремы 3.2 позволяет выписать решение интегрального уравнения (1.3), к которому сведена контактная задача, рассмотренная в п. 1 (фиг. 1). Однако можно получить более простые формулы, если несколько изменять математическую формализацию задачи.



Фиг. 2

С этой целью анализ перемещений поверхностных точек балки в зоне контакта будем проводить, отправляясь от момента, когда процесс контакта окончен. В концевых точках A и B (фиг. 2) участка контакта $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ поставим фиктивные опоры. Перемещения балки на указанном участке будут складываться из прогибов $y_p(x)$ шарнирно опертой балки (длиной 2α), вызванных контактным давлением $p(x)$, и из прогибов $y_M(x)$, вызванных концевыми моментами $M = {}^1/_2P\beta$ ($\beta = a - \alpha$), равными изгибающим моментам в сечениях $x = \pm\alpha$ исходной балки (длиной $2a$). Перемещения точек штампа, вступивших в контакт, будут выражаться формулой

$$h(x) = \delta_0 - g(x), \quad \delta_0 = \delta - y(\alpha)$$

причем $h(\alpha) = 0$ и, значит, $\delta_0 = g(\alpha)$. Следовательно, условие контакта

$$kp(x) + y_p(x) + y_M(x) = g(\alpha) - g(x) \tag{7.1}$$

Принимая во внимание равенства

$$4Dy_M(x) = P\beta(\alpha^2 - x^2), \quad Dy_p(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} G_\alpha(x, s)\, p(s)\, ds$$

вместо (1.3) получаем интегральное уравнение

$$p(x) + c^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} G_\alpha(x, s)\, p(s)\, ds = f(x), \quad |x| \leqslant \alpha \tag{7.2}$$

$$c^2 = (kD)^{-1}, \quad f(x) = k^{-1}[g(\alpha) - g(x)] - {}^1/_4P\beta c^2(\alpha^2 - x^2)$$

ядро которого определяется формулой (1.1) с заменой a на α. Уравнение (7.2) представляет собой частный случай уравнения, решение которого дается теоремой 5.1 и имеет вид

$$p(x) = f(x) + c\,\mathrm{Im}\left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \Gamma_0(x, s, ic)\, f(s)\, ds\right] \tag{7.3}$$

$$\nu\Gamma_0(x, s, ic) = \sin\nu(\alpha + x)\sin\nu(\alpha - s)\,\mathrm{cosec}\,2\nu\alpha$$
$$(x \leqslant s,\ \nu = \sqrt{{}^1/_2\, c}\,(1 + i))$$

(при $x \geqslant s$ следует поменять местами x и s).

Здесь $\Gamma_0(x, s, ic)$ — функция Грина краевой задачи

$$-y''(x) - \nu^2 y(x) = f(x) \quad (|x| \leqslant \alpha, \quad \nu^2 = ic), \quad y(\mp\alpha) = 0$$

При этом полученное решение автоматически удовлетворяет первому условию из (1.4).

Если принять (как это обычно делается в контактных задачах [8]), что $g(x) = \gamma x^2$, то формулу (7.3) можно привести к следующему простому выражению:

$$\frac{cp(x)}{2C_P} = \frac{\omega^2 - \xi^2}{2} + \frac{\sin{}^1/_2(\omega - \xi)\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2(\omega + \xi) + \mathrm{sh}\,{}^1/_2(\omega - \xi)\sin{}^1/_2(\omega + \xi)}{\cos\omega + \mathrm{ch}\,\omega} \tag{7.4}$$

$$(C_P = k^{-1}\gamma - {}^1/_4 P\beta c^2,\ \omega = \alpha\sqrt{2c},\ \xi = x\sqrt{2c})$$

Длину участка контакта следует находить из уравнения

$$\frac{P}{C_P} = \frac{8}{3}\alpha^3 + \frac{4}{\sqrt{2}\,c^{3/2}}\,\frac{\mathrm{sh}\,\omega - \sin\omega}{\cos\omega + \mathrm{ch}\,\omega}$$

представляющего собой реализацию второго условия из (1.4) с учетом (7.4).

Поступила 25 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
2. *Попов Г. Я.* О контактных задачах для оболочек и пластин. Тр. X Всес. конференции по теории оболочек и пластин. Кутаиси, 1975.
3. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
5. *Рисс Ф.*, *Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
6. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (спецкурс). М., Физматгиз, 1960.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Гостехиздат, 1954.
8. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.