

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ ТРОЙНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Н. М. Бородачев

(Киев)

Предлагается новый класс решений тройных интегральных уравнений, к которым может быть сведен ряд краевых задач теории упругости со смешанными граничными условиями (контактные задачи, задачи о трещинах и т. п.).

1. Рассмотрим тройные интегральные уравнения вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \int_0^{\infty} \Phi(\xi) J_{\nu}(\xi x) d\xi &= G_1(x) \quad (0 < x < a) \\ \int_0^{\infty} \xi^{-2\alpha} \Phi(\xi) J_{\nu}(\xi x) d\xi &= F_2(x) \quad (a < x < b) \\ \int_0^{\infty} \Phi(\xi) J_{\nu}(\xi x) d\xi &= G_3(x) \quad (b < x < \infty) \end{aligned}$$

Функции G_1, F_2, G_3 считаются известными, Φ — неизвестная функция, $J_{\nu}(x)$ — бесселева функция первого рода.

Наиболее важные результаты по решению системы уравнений (1.1) содержатся в работах [1-6].

Полагая [6]

$$(1.2) \quad \Phi(\xi) = \xi \psi(\xi), \quad f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{2\alpha} F(x), \quad g(x) = G(x)$$

и используя оператор Ханкеля

$$S_{\eta, \alpha} f(x) = 2^{\alpha} x^{-\alpha} \int_0^{\infty} t^{1-\alpha} J_{2\eta+\alpha}(xt) f(t) dt$$

тройные уравнения (1.1) можно компактно записать так:

$$(1.3) \quad S_{\nu/2-\alpha, 2\alpha} \psi(x) = f(x), \quad S_{\nu/2, 0} \psi(x) = g(x)$$

Здесь

$$(1.4) \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x) & (0 < x < a) \\ f_2(x) & (a < x < b) \\ f_3(x) & (b < x < \infty) \end{cases}$$

Аналогичное представление можно написать и для функции $g(x)$.

Тройные уравнения (1.1) (или (1.3)) можно свести к системе из двух интегральных уравнений или к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Этому вопросу посвящены работы [1, 3, 6], которые

основаны на «пробном» решении Снеддона [7]

$$(1.5) \quad \psi(x) = S_{\nu/2, -\alpha} h(x)$$

Решения [1,3] первоначально были получены без использования операторов Эрдейи — Кобера и Ханкеля, поэтому они были довольно громоздкими. Для упрощения анализа было предложено [7,8] использовать операторы Ханкеля и Эрдейи — Кобера. С использованием этих операторов решения, содержащиеся в работах [1,3], приведены в компактной форме в статье [6].

Операторы Эрдейи — Кобера определяются следующим образом:

$$(1.6) \quad I_{\eta, \alpha} f(x) = \frac{2x^{-2\alpha-2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - u^2)^{\alpha-1} u^{2\eta+1} f(u) du \quad (\alpha > 0)$$

$$I_{\eta, \alpha} f(x) = \frac{x^{-2\eta-2\alpha-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - u^2)^{\alpha} u^{2\eta+1} f(u) du \quad (-1 < \alpha < 0)$$

$$(1.7) \quad K_{\eta, \alpha} f(x) = \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (u^2 - x^2)^{\alpha-1} u^{-2\alpha-2\eta+1} f(u) du \quad (\alpha > 0)$$

$$K_{\eta, \alpha} f(x) = -\frac{x^{2\eta-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} (u^2 - x^2)^{\alpha} u^{-2\alpha-2\eta+1} f(u) du \quad (-1 < \alpha < 0)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Снеддон [8, 9] показал, что

$$(1.8) \quad S_{\eta+\alpha, \beta} S_{\eta, \alpha} = I_{\eta, \alpha+\beta}, \quad S_{\eta, \alpha} S_{\eta+\alpha, \beta} = K_{\eta, \alpha+\beta}$$

2. Можно получить новый класс решений системы уравнений (1.3) если вместо пробного решения (1.5) положить

$$(2.1) \quad \psi(x) = S_{\nu/2+\alpha, -\alpha} H(x)$$

Подставляя (2.1) в (1.3) и используя (1.8), имеем

$$(2.2) \quad K_{\nu/2-\alpha, \alpha} H = f, \quad I_{\nu/2+\alpha, -\alpha} H = g$$

Решая эти уравнения, находим

$$(2.3) \quad H = K_{\nu/2-\alpha, \alpha}^{-1} f, \quad H = I_{\nu/2+\alpha, -\alpha}^{-1} g$$

где $I_{\eta, \alpha}^{-1}$, $K_{\eta, \alpha}^{-1}$ — обратные операторы. Известно [8, 9], что

$$(2.4) \quad I_{\eta, \alpha}^{-1} = I_{\eta+\alpha, -\alpha}, \quad K_{\eta, \alpha}^{-1} = K_{\eta+\alpha, -\alpha}$$

Используя подстановку (2.1), получим решения, «параллельные» в некотором смысле решениям, приведенным в работах [1, 3, 6]. Как поступили и авторы этих работ, положим, что

$$(2.5) \quad g_1 = 0, \quad g_3 = 0$$

Кроме того, будем считать, что $-1 < \alpha < 1$.

Из уравнений (2.2), (2.3) и соотношений (2.5) следует

$$(2.6) \quad \begin{aligned} H_1 &= 0 \\ H_2 &= \begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix} K_{\nu/2-\alpha, \alpha}^{-1} f_2 + \begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} K_{\nu/2-\alpha, \alpha}^{-1} f_3 \\ H_3 &= \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} I_{\nu/2+\alpha, -\alpha}^{-1} g_2 \\ f_3 &= \begin{pmatrix} \infty \\ x \end{pmatrix} K_{\nu/2-\alpha, \alpha} H_3, \quad g_2 = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I_{\nu/2+\alpha, -\alpha} H_2 \\ f_1 &= \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} K_{\nu/2-\alpha, \alpha} H_2 + \begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} K_{\nu/2-\alpha, \alpha} H_3 \end{aligned}$$

Буквы в скобках перед операторами указывают новые пределы интегрирования.

В дальнейшем полезно использовать операторы L и M , введенные Куком [6]

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} I_{\eta, \alpha}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix} I_{\eta, \alpha} f(x) &= - \begin{pmatrix} x, d \\ d, c \end{pmatrix} L_{\eta, \alpha} f(x) \quad (x > d > c) \\ \begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix} K_{\eta, \alpha}^{-1} \begin{pmatrix} e \\ x \end{pmatrix} K_{\eta, \alpha} f(x) &= - \begin{pmatrix} d, e \\ x, d \end{pmatrix} M_{\eta, \alpha} f(x) \quad (x < d < e) \end{aligned}$$

Подставляя четвертую формулу (2.6) во вторую, а пятую — в третью и учитывая соотношения (2.4) и (2.7), приходим к системе уравнений

$$(2.8) \quad \begin{aligned} H_2 &= \begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix} K_{\nu/2-\alpha, \alpha}^{-1} f_2 - \begin{pmatrix} b, \infty \\ x, b \end{pmatrix} M_{\nu/2-\alpha, \alpha} H_3 \quad (a < x < b) \\ H_3 &= - \begin{pmatrix} x, b \\ b, a \end{pmatrix} L_{\nu/2+\alpha, -\alpha} H_2 \quad (b < x < \infty) \end{aligned}$$

Кук [6] показал, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x, f \\ d, e \end{pmatrix} L_{\eta, \alpha} f(x) &= \frac{2 \sin \alpha \pi}{\pi} x^{-2\eta} (x^2 - d^2)^{-\alpha} \int_e^f \frac{(d^2 - t^2)^\alpha t^{2\eta+1} f(t)}{x^2 - t^2} dt \\ &\quad (x > d \geq f > e) \\ \begin{pmatrix} d, f \\ x, e \end{pmatrix} M_{\eta, \alpha} f(x) &= \frac{2 \sin \alpha \pi}{\pi} x^{2\eta+2\alpha} (d^2 - x^2)^{-\alpha} \int_e^f \frac{(t^2 - d^2)^\alpha t^{-2\alpha-2\eta+1} f(t)}{t^2 - x^2} dt \\ &\quad (x < d \leq e < f) \end{aligned}$$

Из этих формул видно, что (2.8) — система интегральных уравнений. Решая систему (2.8), можно найти функции $H_2(x)$ и $H_3(x)$. Из (2.6) следует, что $H_1(x) = 0$. Таким образом, будет известна функция $H(x)$, так как она имеет представление, аналогичное (1.4).

Наконец, с помощью формулы (2.1) можно найти функцию $\psi(x)$, т. е. получить решение системы тройных интегральных уравнений (1.3), а следовательно, и исходной системы (1.1). Чаще всего нужна не функция $\psi(x)$, а $f_1(x)$, $f_3(x)$ и $g_2(x)$. Эти величины можно найти, используя последние три формулы (2.6).

Подставляя вторую формулу (2.8) в первую, получим интегральное уравнение второго рода для функции $H_2(x)$

$$(2.9) \quad H_2(x) = \varphi(x) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_a^b K(x, y) H_2(y) dy$$

Здесь

$$(2.10) \quad \varphi(x) = \left(\frac{b}{x}\right) K_{\nu/2, -\alpha} f_2$$

$$K(x, y) = \sin^2 \alpha \pi \frac{x^\nu y^{1+\nu+2\alpha}}{(b^2-x^2)^\alpha (b^2-y^2)^\alpha} \int_b^\infty \frac{t^{1-2\nu-2\alpha} (t^2-b^2)^{2\alpha}}{(t^2-x^2)(t^2-y^2)} dt$$

$$(-1/2 < \alpha < 1)$$

Функцию $\varphi(x)$ нетрудно записать подробно, используя (1.7).

Таким образом, получены решения, параллельные решениям, приведенным в работах [1, 3, 6].

Так, например, в частном случае $\nu = 0$, $\alpha = 1/2$ формулы (2.10) принимают вид

$$(2.11) \quad \varphi(x) = -\frac{2}{\pi^{1/2} x} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{u^2 f_2(u) du}{(u^2-x^2)^{1/2}}$$

$$K(x, y) = \frac{y^2}{2(b^2-x^2)^{1/2} (b^2-y^2)^{1/2} (x^2-y^2)} \times$$

$$\times \left(\frac{b^2-y^2}{y} \ln \frac{b+y}{b-y} - \frac{b^2-x^2}{x} \ln \frac{b+x}{b-x} \right)$$

3. Чтобы показать отличие полученного в данной работе решения (основанного на подстановке (2.1)) от решения Кука [1, 6] (основанного на подстановке Снеддона (1.5)), рассмотрим в качестве примера задачу о вдавливании кольцевого штампа с плоским основанием в упругое полупространство. На штамп действует вертикальная сила P , направленная по оси симметрии. Предполагается, что вне штампа поверхность полупространства свободна от напряжений, а силы трения между штампом и полупространством отсутствуют. В этом случае $\nu = 0$, $\alpha = 1/2$ и, кроме того,

$$(3.1) \quad g_1(r) = 0, \quad g_3(r) = 0, \quad f_2(r) = -2\mu\delta/(1-\nu_0)r$$

$$g_2(r) = \sigma_z(r, 0) \quad \text{при} \quad a < r < b$$

Здесь μ — модуль сдвига, ν_0 — коэффициент Пуассона материала полупространства, δ — глубина вдавливания штампа, a и b — внутренний и наружный радиусы кольцевого штампа.

В данном случае решение, основанное на подстановке (2.1), приводит после соответствующих преобразований к следующим уравнениям:

$$(3.2) \quad \sigma_z(r, 0) = -\frac{\gamma_a P}{2\pi r} \frac{d}{dr} \int_\varepsilon^{r/b} \left(\frac{1-y^2}{r^2/b^2-y^2} \right)^{1/2} \psi(y) dy \quad (a < r < b)$$

$$\frac{1-x^2}{x^2} \psi(x) = 1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \int_\varepsilon^1 K_a(x, y) \psi(y) dy$$

$$K_a(x, y) = \frac{1}{2(x^2-y^2)} \left(\frac{1-y^2}{y} \ln \frac{1+y}{1-y} - \frac{1-x^2}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{a}{b}, \quad \gamma_a^{-1} = \int_\varepsilon^1 \psi(y) dy, \quad \delta = \gamma_a \frac{P(1-\nu_0)}{4\mu b}$$

При получении формул (3.2) были использованы (2.6), (2.9), (2.11) и (3.1). Здесь $\sigma_z(r, 0)$ — нормальное напряжение на площадке контакта.

Решение этой же задачи, основанное на подстановке Снеддона (1.5) и использовании результатов Кука [1, 6], приводит к уравнениям [10]

$$(3.3) \quad \sigma_z(r, 0) = \frac{\gamma_b P}{2\pi r} \frac{d}{dr} \int_{r/b}^1 \left(\frac{y^2 - \varepsilon^2}{y^2 - r^2/b^2} \right)^{1/2} \eta(y) dy \quad (a < r < b)$$

$$\frac{x^2 - \varepsilon^2}{x^2} \eta(x) = 1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \int_{\varepsilon}^1 K_b(x, y) \eta(y) dy$$

$$K_b(x, y) = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \left(\frac{x^2 - \varepsilon^2}{x} \ln \frac{x + \varepsilon}{x - \varepsilon} - \frac{y^2 - \varepsilon^2}{y} \ln \frac{y + \varepsilon}{y - \varepsilon} \right)$$

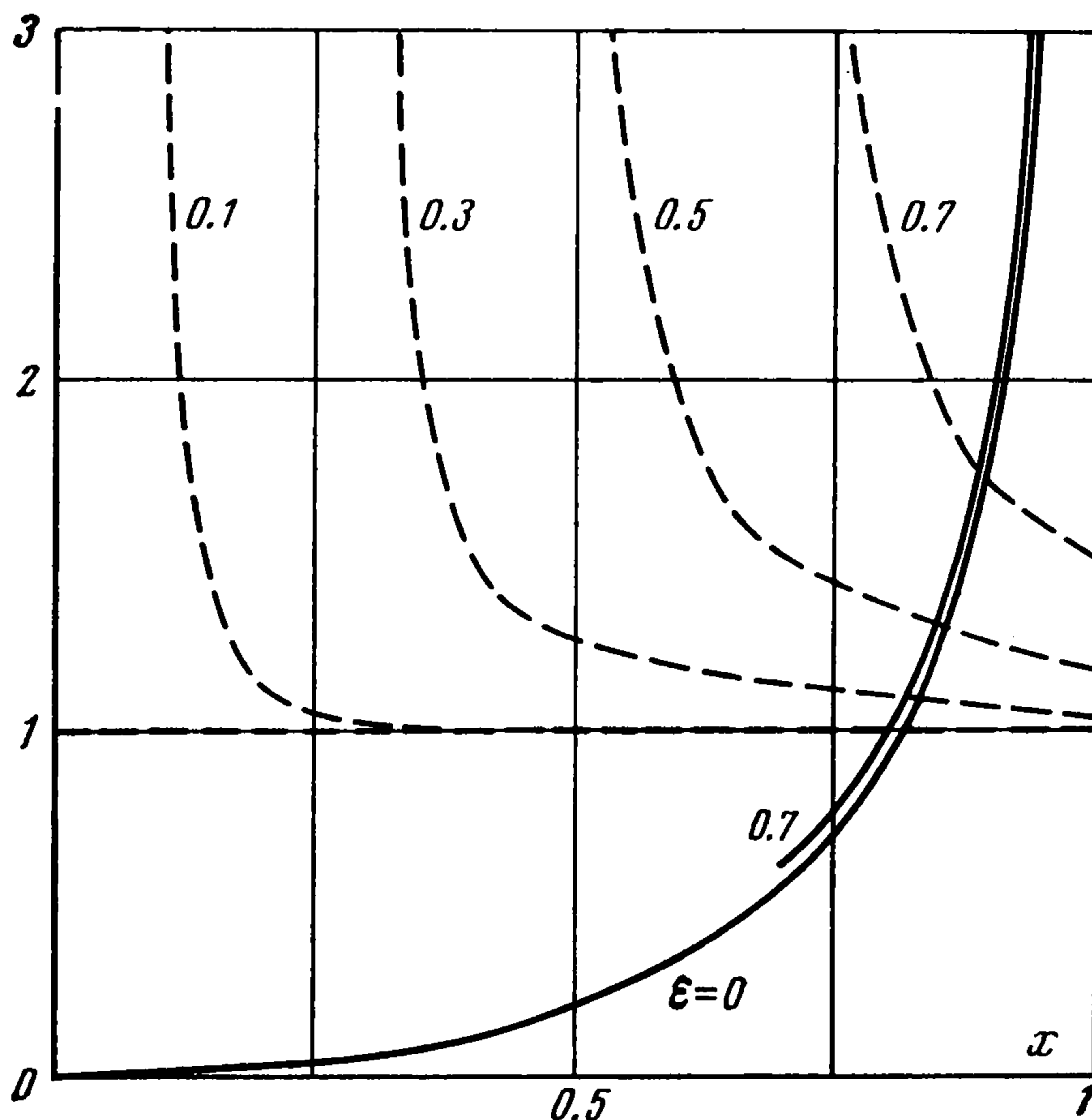
$$\gamma_b^{-1} = \int_{\varepsilon}^1 \eta(y) dy, \quad \delta = \gamma_b \frac{P(1 - \nu_0)}{4\mu b}$$

Нетрудно доказать, что $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$.

Сравнивая и анализируя формулы (3.2) и (3.3), можно сделать некоторые выводы.

а. Решение задачи полностью определяется формулами (3.2) или формулами (3.3).

б. Формулы (3.2) позволяют получить асимптотическое представление для $\sigma_z(r, 0)$ при $r \rightarrow a + 0$, т. е. при приближении к внутреннему контуру штампа, а формулы (3.3) — при $r \rightarrow b - 0$, т. е. при приближении к наружному контуру (подробнее об этом см. [11]). Таким образом, решения (3.2) и (3.3) в этом смысле дополняют одно другое.



в. Ядро $K_a(x, y)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода в решении (3.2) не зависит от параметра $\varepsilon = a/b$. Это может облегчить вычисления (и упростить программу при использовании ЭВМ), если задача решается несколько раз для разных значений ε . Ядро же $K_b(x, y)$ в решении (3.3) зависит от ε .

г. При $\varepsilon = 0$ решения интегральных уравнений (3.2) и (3.3) имеют вид

$$(3.4) \quad \psi(x) = \frac{x}{\pi(1-x^2)^{1/2}} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \eta(x) = 1$$

При $\varepsilon \neq 0$ для решения интегральных уравнений (3.2) и (3.3) применялись численные методы. Интегралы в интегральных уравнениях заменялись квадратурной формулой Гаусса (число узлов доходило до 40). Полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений решалась с помощью ЭВМ. На основе этих вычислений (при $\varepsilon \neq 0$) и формул (3.4) (при $\varepsilon = 0$) были построены графики функций $\psi(x)$ и $\eta(x)$ для некоторых значений параметра ε . Эти графики представлены на фигуре соответственно сплошными и штриховыми линиями. Видно, что функции $\eta(x)$, соответствующие разным значениям ε , сильно различаются. В то же время графики функции $\psi(x)$ при различных ε ($0 \leq \varepsilon \leq 0.5$) практически совпадают. Этот характерный факт можно использовать для построения приближенных решений при $\varepsilon \leq 0.5$. В рассматриваемом случае, подставив выражение для $\psi(x)$ из (3.4) в первую формулу (3.2), можно получить приближенную формулу для вычисления нормального напряжения на площадке контакта кольцевого штампа и полупространства (при $\varepsilon \leq 0.5$).

4. В заключение покажем, как можно получить решения (1.5) и (2.1). Решение уравнений (1.3) ищем в виде

$$\psi = S_{\beta, \gamma} \xi$$

Здесь возможны два случая.

1°. Уравнения (1.3) можно свести к уравнениям вида

$$I_{\mu_1, \lambda_1} \xi = f, \quad K_{\mu_2, \lambda_2} \xi = g$$

Эти уравнения будут иметь место, если

$$(4.1) \quad S_{\nu/2-\alpha, 2\alpha} S_{\beta, \gamma} = I_{\mu_1, \lambda_1}, \quad S_{\nu/2, 0} S_{\beta, \gamma} = K_{\mu_2, \lambda_2}$$

Используя (1.8) и (4.1), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= \nu / 2 - \alpha, & \mu_1 &= \beta, & \lambda_1 &= 2\alpha + \gamma \\ \beta &= \nu / 2, & \mu_2 &= \nu / 2, & \lambda_2 &= \gamma \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\beta = \nu / 2, \quad \gamma = -\alpha, \quad \mu_1 = \nu / 2, \quad \mu_2 = \nu / 2, \quad \lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\alpha$$

Следовательно, в этом случае $\psi = S_{\nu/2, -\alpha} \xi$, т. е. приходим к решению Снеддона (1.5).

2°. Уравнения (1.3) можно свести к уравнениям вида

$$K_{\mu_3, \lambda_3} \xi = f, \quad I_{\mu_4, \lambda_4} \xi = g$$

Дальнейшие выкладки выполняются по тому же плану, что и в первом случае. В результате находим

$$\begin{aligned} \beta &= \nu / 2 + \alpha, & \gamma &= -\alpha, & \mu_3 &= \nu / 2 - \alpha, & \mu_4 &= \nu / 2 + \alpha, \\ \lambda_3 &= \alpha, & \lambda_4 &= -\alpha \end{aligned}$$

В этом случае $\psi = S_{\nu/2+\alpha, -\alpha} \xi$, т. е. приходим к решению (2.1).

Поступила 13 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cooke J. C.* Triple integral equations. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1963, vol. 16, pt 2.
2. *Cooke J. C.* Some further triple integral equations solutions. *Proc. Edinburg Math. Soc. Ser. 2*, 1963, vol. 13, pt 4.
3. *Williams W. E.* Note on the electrostatic problem for a circular annulus. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1963, vol. 16, pt 2.
4. *Williams W. E.* Integral equation formulation of some three part boundary value problems. *Proc. Edinburg. Math. Soc. Ser. 2*, 1963, vol. 13, pt 4.

5. *Collins W. D.* On some triple series equations and their applications. Arch. Ration Mech. Analysis, 1962, vol. 11, No. 2.
 6. *Cooke J. C.* The solution of triple integral equations in operational form. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1965, vol. 18, pt 1.
 7. *Sneddon I. N.* Fractional integration and dual integral equations. Raleigh, North Carolina State College (Contract N PSR-6), 1962.
 8. *Erdelyi A., Sneddon I. N.* Fractional integration and dual integral equations. Canad. J. Math., 1962, vol. 14, No. 4.
 9. *Sneddon I. N.* Dual equations in elasticity. В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1965.
 10. *Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н.* Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
 11. *Бородачев Н. М.* О характере особенностей контактных напряжений под кольцевым штампом. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
-