

ЭХО-СИГНАЛ КОНЕЧНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ОТ ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Я. А. Метсавээр, Ю. П. Пикк

(Таллин)

Предлагается способ вычисления эхо-сигнала конечного центросимметричного импульса давления от заполненной жидкостью упругой сферической оболочки, находящейся в безграничной жидкой среде. Как окружающая оболочку среда, так и заполняющая ее жидкость моделируются по теории идеальной сжимаемой жидкости. Движение оболочки описывается при помощи линейной теории тонких оболочек типа Тимошенко. Задача решается путем применения интегрального преобразования Фурье по времени и преобразования Ватсона по полярному расстоянию. Приводятся механизмы образования различных компонентов эхо-сигнала.

Вычисление как отраженной составляющей эхо-сигнала, так и его составляющих, излученных ползущими и периферическими волнами от пустых сферических оболочек, рассмотрено в работе [1]. Вклады в эхо-сигнале волн, проходящих как жидкий, так и упругий цилиндр, изучены методом преобразования Ватсона в работах [2, 3]. В данной работе исследуется эхо-сигнал от сферической оболочки, заполненной жидкостью, причем кроме указанных составляющих эхо-сигнала, учитываются еще вклады волн, распространяющиеся частично в оболочке как периферические и частично как проходящие жидкий наполнитель.

1. Формальное решение. С использованием стандартной постановки и разложения решения в ряды по полиномам Лежандра в пространстве преобразования Фурье по времени эхо-сигнал зондирующего импульса

$$(1.1) \quad p_i = A_0 l^{-1} f(\tau - l) [H(\tau - l) - H(\tau - l - \tau_p)] \\ l = (r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \vartheta)^{1/2}$$

от сферической оболочки, заполненной жидкостью, может быть представлен в виде [1]

$$(1.2) \quad p_e = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^F \sum_{m=0}^{\infty} a_m x_m h_m^{(1)}(\omega r) P_m(\cos \vartheta) e^{-i\omega \tau} d\omega$$

$$(1.3) \quad f^F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_p} f(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau, \quad a_m = i\omega r_0 (2m + 1) h_m^{(1)}(\omega r_0)$$

$$x_m = - \frac{\omega A_{33} j_m(\omega) - (\alpha D + \alpha_0 D_0) \partial j_m(\omega) / \partial \omega}{\omega A_{33} h_m^{(1)}(\omega) - (\alpha D + \alpha_0 D_0) \partial h_m^{(1)}(\omega) / \partial \omega}$$

$$\alpha = \frac{h\rho_1 c_1^2}{R\rho c^2}, \quad \alpha_0 = \frac{\rho_0 c_0}{\rho c}, \quad D_0 = \frac{\omega A_{33} j_m(\beta_0 \omega)}{\partial j_m(\beta_0 \omega) / \partial (\beta_0 \omega)}$$

$$\beta_0 = c c_0^{-1}, \quad D = \det \| a_{ij} \|; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3$$

При описании упругих волн в оболочке по теории оболочек типа Тимошенко [4] элементы определителя D имеют вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} a_{11} &= 1 - \nu - M - \kappa^2 + (1 + a^2) \beta^2 \omega^2, & a_{12} &= \kappa^2 + 2a^2 \beta^2 \omega^2 \\ a_{13} &= 1 + \nu + \kappa^2, & a_{21} &= \kappa^2 + 2a^2 \beta^2 \omega^2, & a_{22} &= a^2 (1 - \nu - M + \\ & & & + \beta^2 \omega^2) - \kappa^2, & a_{23} &= -\kappa^2, & a_{31} &= (1 + \nu + \kappa^2) M, & a_{32} &= -\kappa^2 M \\ a_{33} &= -\kappa^2 M - 2(1 + \nu) + (1 + a^2) \beta^2 \omega^2, & M &= m(m + 1) \\ a &= \frac{h}{\sqrt{12} R}, & \beta &= \frac{c}{c_1}, & c_1 &= \left[\frac{E}{(1 - \nu^2) \rho_1} \right]^{1/2} \\ \kappa &= k_T \left[\frac{1 - \nu}{2} \right]^{1/2}, & k_T &= 0.912 \end{aligned}$$

В формулах (1.1) — (1.4) использованы следующие обозначения: c, ρ — скорость звука и плотность среды, окружающей оболочку, c_0, ρ_0 — скорость звука и плотность заполнителя, r, ϑ — безразмерные (все размеры длины выражены в радиусах R срединной поверхности оболочки) сферические координаты, полюс которых расположен в центре сферической оболочки ($\vartheta = 0$ для радиус-вектора, направленного к центру источника зондирующего импульса), τ — безразмерное время ($\tau = ct / R$, t — время, $t = 0$ в момент включения источника), h — толщина оболочки, E, ν, ρ_1 — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки, r_0 — безразмерное расстояние между центрами источника зондирующего импульса и оболочки, A_0, f — постоянная, определяющая амплитуду и закон изменения давления в зондирующем импульсе, τ_p — безразмерная продолжительность зондирующего импульса, H — единичная функция Хевисайда, ω — параметр преобразования Фурье (частота), P_m — полиномы Лежандра, $j_m, h_m^{(1)}$ — функции Бесселя и Ханкеля первого рода, A_{33} — соответствующее алгебраическое дополнение определителя D .

Для представления эхо-сигнала в физически хорошо интерпретируемых рядах по периферическим и ползущим волнам используется преобразование Ватсона в виде [5]

$$(1.5) \quad \sum_{m=0}^{\infty} F(m, \omega) P_m(\cos \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} F(\mu, \omega) e^{i\mu\pi(2n+1)} P_{\mu}[\cos(\pi - \vartheta)] d\mu$$

где контур интегрирования Γ охватывает положительную часть вещественной оси по часовой стрелке на комплексной плоскости μ .

Используя (1.5) и соотношение

$$(1.6) \quad j_{\mu}(x) = 1/2 [h_{\mu}^{(1)}(x) + h_{\mu}^{(2)}(x)]$$

эхо-сигнал (1.2) представим в виде

$$(1.7) \quad p_e = -\frac{A_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f^F \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} a_{\mu} \left[1 + W \frac{h_{\mu}^{(2)}(\omega)}{h_{\mu}^{(1)}(\omega)} \right] S d\mu e^{-i\omega\tau} d\omega$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} S &= e^{i\mu\pi(2n+1)} h_{\mu}^{(1)}(\omega r) P_{\mu}[\cos(\pi - \vartheta)], & W &= F_0^{-1} F_1 - TUVF_0^{-2} \\ U &= (1 - VF_2F_0^{-1})^{-1}, & V &= h_{\mu}^{(1)}(\beta_0\omega) / h_{\mu}^{(2)}(\beta_0\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= (\omega A_{33} - \alpha D E_1) G_2 - \alpha_0 \omega A_{33} E_1 \\
F_1 &= (\omega A_{33} - \alpha D E_2) G_2 - \alpha_0 \omega A_{33} E_2 \\
F_2 &= -(\omega A_{33} - \alpha D E_1) G_1 + \alpha_0 \omega A_{33} E_1 \\
T &= \alpha_0 \omega^2 A_{33}^2 (E_1 - E_2) (G_1 - G_2) \\
E_{1,2} &= [\partial h_{\mu}^{(1,2)}(\omega) / \partial \omega] / h_{\mu}^{(1,2)}(\omega) \\
G_{1,2} &= [\partial h_{\mu}^{(1,2)}(\beta_0 \omega) / \partial (\beta_0 \omega)] / h_{\mu}^{(1,2)}(\beta_0 \omega)
\end{aligned}$$

Здесь a_{μ} , D , A_{33} вычисляются соответственно по формулам (1.3), (1.4) при замене m на μ .

Отношения $F_1 F_0^{-1}$, $F_2 F_0^{-1}$, $T F_0^{-2}$ в (1.8) имеют вполне определенный физический смысл: первые два из них — соответственно коэффициенты внешнего и внутреннего отражения на поверхности оболочки, а третье — произведение коэффициентов прохождения из окружающей среды в заполнитель и обратно, из заполнителя в окружающую среду. Следует обратить внимание на то, что при каждом прохождении через оболочку часть энергии проходящих волн расходуется на возбуждение волн, распространяющихся в оболочке, поэтому связь между соответствующими коэффициентами прохождения и отражения более сложная, чем в случае границы раздела двух сред.

Опуская единицу в квадратных скобках (1.7) и представляя функцию U в виде ряда

$$(1.9) \quad U = \sum_{j=1}^{\infty} (V F_2 F_0^{-1})^{j-1}$$

эхо-сигнал (1.7) получает вид

$$\begin{aligned}
(1.10) \quad p_e &= -\frac{A_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f^F \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left(\frac{F_1}{F_0} - \sum_{j=1}^{\infty} T \frac{V^j F_2^{j-1}}{F_0^{j+1}} \right) K d\mu e^{-i\omega\tau} d\omega \\
K &= a_{\mu} h_{\mu}^{(1)-1}(\omega) h_{\mu}^{(2)}(\omega) h_{\mu}^{(1)}(\omega r) e^{i\mu\pi(2n+1)} P_{\mu}[\cos(\pi - \vartheta)]
\end{aligned}$$

2. Обращение преобразований. Преобразование Ватсона обращается приближенно, методом перевала. Для этого быстроизменяющиеся функции V и K в (1.10) заменяются их приближенными представлениями. Подставляя асимптотические представления

$$(2.1) \quad h_{\mu}^{(1,2)}(\omega) \sim \omega^{-1} (1 + z^2)^{-1/4} \exp \{ \pm i [\omega (\sqrt{1 - z^2} - z \arccos z) - \pi / 4] \}$$

$$\begin{aligned}
(2.2) \quad P_{\mu}[\cos(\pi - \vartheta)] &\sim \eta^{-1} (\exp \{ i [\omega z (\pi - \vartheta) - \pi / 4] \} + \\
&+ \exp \{ -i [\omega z (\pi - \vartheta) - \pi / 4] \}) \\
\eta &= [2\pi (\omega z - 1/2) \sin \vartheta]^{1/2}, \quad z = (\mu + 1/2) / \omega
\end{aligned}$$

в формулы для V , K в (1.8), (1.10), имеем

$$(2.3) \quad V = \exp \{ 2i\omega\beta_0 [(1 - z^2\beta_0^{-2})^{1/2} - z\beta_0^{-1} \arccos(z\beta_0^{-1})] - i\pi / 2 \}$$

$$K = 2zNr^{-1}\eta^{-1} \sum_{k=1}^2 \exp \left\{ i\omega [d_0 + z(g_0 + \vartheta_{nk})] + i \left[(3 - 2k) \frac{\pi}{4} - n\pi \right] \right\}$$

$$N = [(1 + z^2 r_0^{-2})(1 + z^2 r^{-2})]^{-1/4}, \quad d_0 = (r_0^2 - z^2)^{1/2} + (r^2 - z^2)^{1/2} - 2(1 - z^2)^{1/2}$$

$$g_0 = 2 \arccos z - \arccos(zr_0^{-1}) - \arccos(zr^{-1})$$

$$\vartheta_{n1} = \vartheta + 2n\pi, \quad \vartheta_{n2} = 2\pi - \vartheta + 2n\pi$$

Подставляя (2.3) в (1.10), эхо-сигнал запишем в виде

$$(2.4) \quad p_e = \frac{A_0}{2r} \int_{-\infty}^{\infty} f^F \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{jnk} e^{-i\omega\tau} d\omega$$

Здесь

$$(2.5) \quad T_{0nk} = -2e^{i\alpha_{nk}^0} \int_{\Gamma_z} \omega z N \eta^{-1} F_0^{-1} F_1 \exp[i\omega\varphi_{nk}^0(z)] dz$$

$$(2.6) \quad T_{jnk} = 2e^{i\alpha_{nk}^j} \int_{\Gamma_z} \omega z N \eta^{-1} T F_0^{-j-1} F_2^{j-1} \exp[i\omega\varphi_{nk}^j(z)] dz, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\varphi_{nk}^j(z) = d_j(z) + z[g_j(z) + \vartheta_{nk}], \quad \alpha_{nk}^j = (3 - 2k)\pi/4 - n\pi - j\pi/2$$

$$d_j(z) = d_0 + 2j\beta_0(1 - z^2\beta_0^{-2})^{1/2}, \quad g_j(z) = g_0 - 2j \arccos(z\beta_0^{-1}),$$

$$j = 0, 1, 2, \dots$$

Контур интегрирования Γ_z имеет такой же вид на плоскости z , как и контур Γ на плоскости μ .

Координаты $z = z_{jnk}$ седловых точек интегралов (2.5), (2.6) определяются из уравнения

$$g_j(z) + \vartheta_{nk} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Это уравнение имеет решения $z = z_{jnk}$ лишь при выполнении соответственно следующих условий:

$$(2.7) \quad 0 \leq \vartheta_{nk} \leq \arccos r_0^{-1} + \arccos r^{-1}, \quad j = 0$$

$$\arccos(\beta_0 r_0^{-1}) + \arccos(\beta_0 r^{-1}) - 2\arccos \beta_0 \leq \vartheta_{nk} \leq j\pi, \quad \beta_0 \leq 1, \\ j = 1, 2, \dots$$

$$\arccos r_0^{-1} + \arccos r^{-1} + 2j \arccos \beta_0^{-1} \leq \vartheta_{nk} \leq j\pi; \quad \beta_0 \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Седловые точки интегралов (2.5), (2.6) располагаются на вещественной оси плоскости z между 0 и 1, а контуры наискорейшего спуска перпендикулярны к вещественной оси. Для вычисления интегралов (2.5) контур Γ_z сначала заменяется контуром Γ' и, поскольку во второй и четвертой четвертях нет особых точек, то Γ' в свою очередь будет заменен контуром, состоящим из участков Γ_∞' , Γ_{0nk} (фиг. 1, а). Для интегралов (2.6) контур Γ_z заменяется контуром, состоящим из участков Γ_∞ , Γ_{jnk} (фиг. 1, б). Вклады от участков Γ_∞ , Γ_∞' контуров интегрирования пренебрегаются.

Следует обратить внимание на то, что при вычислении интегралов (2.5) необходимо дополнительно к вкладам от седловых точек учитывать еще вклады от полюсов первой четверти плоскости z , расположенных слева от седловых точек, а при вычислении интегралов (2.6) — вклады от полюсов первой четверти, расположенных справа от седловой точки. Когда седловая точка отсутствует, т. е. условие (2.7) нарушается, либо слева, либо справа, то для выяснения того, вклады каких полюсов надо учесть в интегралах (2.5), (2.6), следует исследовать, нарушается ли условие (2.7) слева или справа. Если оно нарушается слева, то не учитываются вклады ни одного полюса, и если справа, то следует учитывать вклады всех полюсов первой четверти плоскости z .

Вычисляя вклады от седловых точек и от полюсов, координаты $z = z_s$, которых определяются как решения уравнения $F_0 = 0$, интегралы (2.5), (2.6) можно представить в виде

$$(2.8) \quad T_{jnk} = G_{jnk}^{\circ} e^{i\omega d_j(z_{jnk})} + \sum_{s=1}^{\infty} G_{jnk}^s e^{i\omega \varphi_{nk}^j(z_s)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$(2.9) \quad G_{0nk}^{\circ} = [F_0^{-1} F_1 N C_0 B]_{z=z_{0nk}}$$

$$G_{0nk}^s = \frac{4\pi i \omega z_s}{\eta} \left[\frac{F_1 N}{\partial F_0 / \partial z} \right]_{z=z_s} e^{i\alpha_{nk}^{\circ}} H(\vartheta_{nk} - \vartheta_s)$$

$$(2.10) \quad G_{jnk}^{\circ} = [F_0^{-j-1} F_2^{j-1} T B C_j N]_{z=z_{jnk}} e^{i(\alpha_{nk}^j - \pi/4)}$$

$$G_{jnk}^s = \frac{4\pi i \omega}{e^{i\omega \varphi_{nk}^j(z_s)}} \operatorname{Res} \left[\frac{z T F_2^{j-1} N}{\eta F_0^{j+1}} e^{i\omega \varphi_{nk}^j(z)} \right]_{z=z_s} e^{i\alpha_{nk}^j} H(\vartheta_{nk} - \vartheta_s)$$

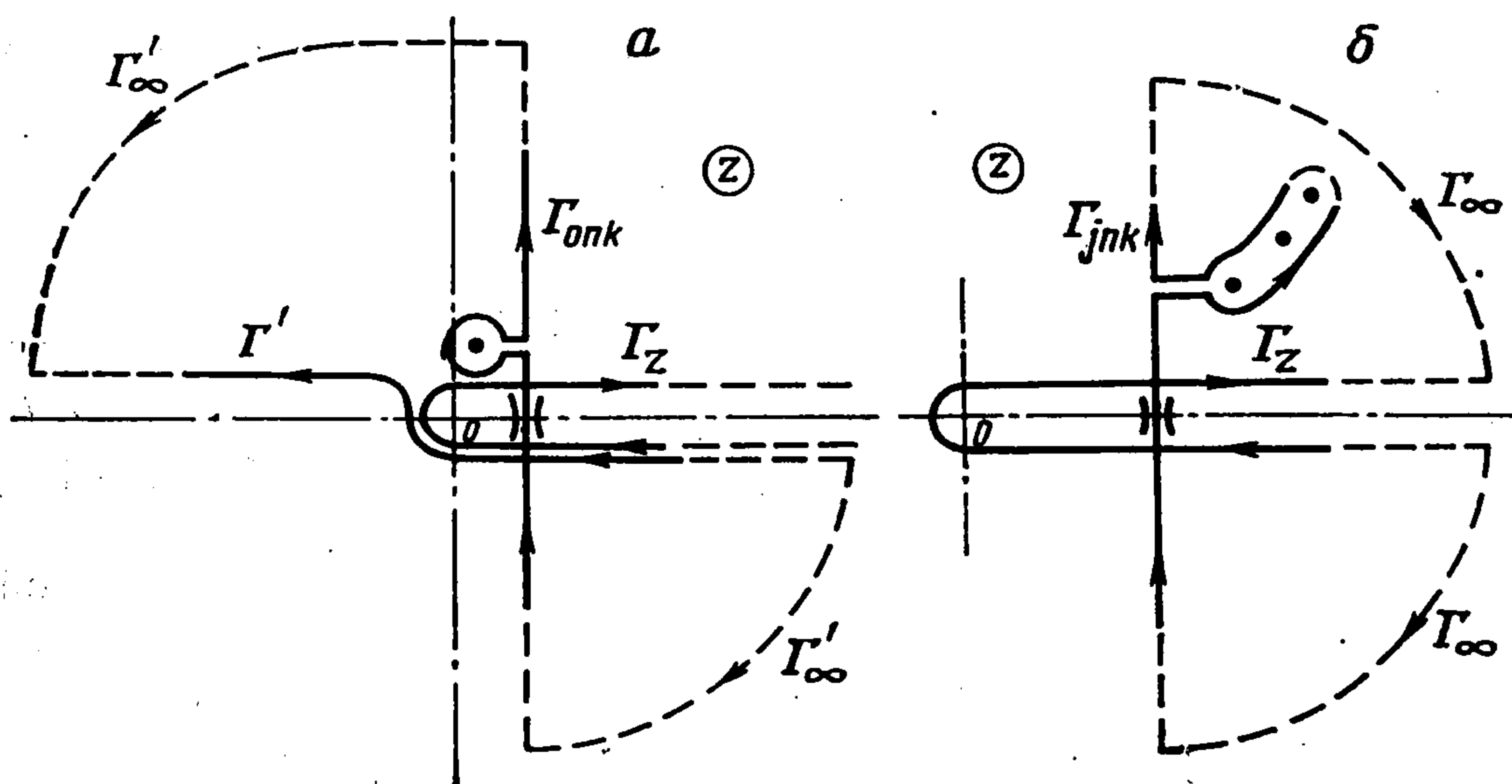
$j = 1, 2, \dots$

$$G_j = \{1 - 1/2 (1 - z^2)^{1/2} [(r_0^2 - z^2)^{-1/2} + (r^2 - z^2)^{-1/2} + 2j\beta_0^{-1} (1 - z^2\beta_0^{-2})^{-1/2}]\}^{-1/2}$$

$$B = 2z\eta^{-1} [\pi\omega (1 - z^2)^{1/2}]^{1/2}, \quad \vartheta_s = -\operatorname{Re} g_j(z_s), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

При отсутствии седловых точек при любом значении j функции $G_{jnk}^{\circ} \equiv 0$, а в формулах для G_{jnk}^s в (2.9), (2.10) $\vartheta_s = j\pi$.

Обращение преобразования Фурье по времени выполняется способом, предложенным в работах [1, 6].



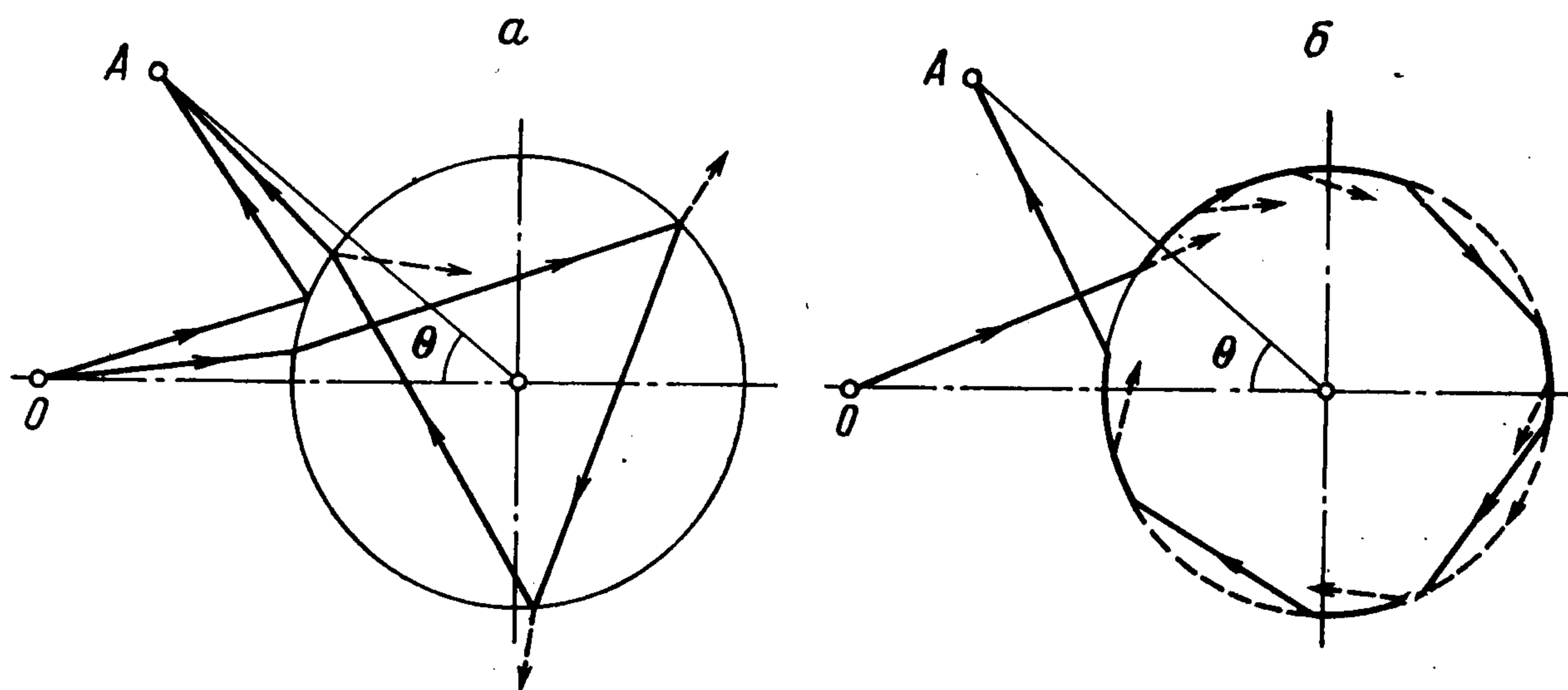
Фиг. 1

3. Анализ полученных результатов. Функции T_{jnk} в (2.4) имеют смысл компонентов стационарного эхо, т. е. компонентов эхо стационарной зондирующей волны

$$p_i = 2rl^{-1} e^{i\omega l}$$

от заполненной жидкостью сферической оболочки. Функции G_{jnk}° , G_{jnk}^s в (2.8) определяют комплексные амплитуды и d_j , φ_{nk}^j — времена поступления отдельных компонентов стационарного эхо. Первый член в (2.8)

определяет компоненты стационарного эхо, возбужденные волнами, проходящими через оболочку в заполнитель, отраженными несколько раз от внутренней поверхности оболочки при распространении в заполнителе и затем снова проходящими через оболочку в окружающую среду. Члены под знаком суммы по s в (2.8) определяют компоненты стационарного эхо, возбужденные волнами, распространяющимися часть своего пути в оболочке и возле ее поверхности как периферические и ползущие, и часть пути как проходящие через заполнитель.



Фиг. 2

Во всех членах число j показывает, сколько раз волна прошла через заполнитель, члены $j = 0$ определяют составляющие эхо-сигнала, которые имеют место и в случае пустой сферической оболочки. Число n показывает, сколько полных оборотов волны совершили в оболочке или в заполнителе до отправления к точке наблюдений, и число k показывает, распространялись ли эти волны по ($k = 1$) или против ($k = 2$) часовой стрелки. Число s в (2.8) — номер полюса, т. е. номер мод периферических или ползущих волн. В прикладных расчетах часто достаточно учитывать только вклады от безмоментной ($s = 1$) и изгибной ($s = 2$) мод периферических волн.

На фиг. 2, *a* представлены пути от источника O зондирующего импульса до точки A наблюдений проходящих и отраженных от внутренней поверхности оболочки волн при $n = 0, k = 1, j = 0$ и $k = 1, n = 1, j = 3$. На фиг. 2, *б* представлен один из бесконечно многих возможных путей одной моды периферических волн при $n = 1, k = 1, j = 3$.

Следует обратить внимание на то, что применение асимптотического представления (2.2) оправдано только в случае

$$(3.1) \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon, \quad |\mu| \gg \varepsilon^{-1}$$

Эти условия не всегда выполняются. Рассмотрим возможности расширения области применимости результатов за указанные в (3.1) пределы. Из поведения функции $P_\mu(\cos \vartheta)$ видно, что при $|\mu| \leq \varepsilon^{-1}$ асимптотическое представление (2.2) может быть применено также при малых значениях $\sin \vartheta$, если функцию η аппроксимировать более точной для этой

области формулой. Такой формулой может быть

$$(3.2) \quad \eta = \sqrt{2} (1 + \chi^{-1} \sin \vartheta), \quad \chi = 4\pi^{-1} (\omega z - 1/2)^{-1}$$

Формула (3.2) применима при $\sin \vartheta < |\chi|$. В случае $\sin \vartheta \geq |\chi|$ функция η может быть вычислена по формуле (2.2).

При вычислении эхо-сигнала в секторах, в которых величины $\sin \vartheta$ и z_{jn_k} малы, т. е. нарушаются оба условия (3.1), компоненты изображения эхо-сигнала могут быть также определены по формулам (2.8) — (2.10), если входящую в них функцию B вычислять по формуле

$$(3.3) \quad B = [2z (1 - z^2)^{1/2} \sin^{-1} \vartheta]^{1/2}$$

хотя применение формулы (3.3) обосновано только при достаточно больших значениях z и $\sin \vartheta$.

Поступила 7 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Нугул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Эхо-сигналы от упругих объектов II. Таллин, Изд-во Ин-та кибернетики АН ЭстССР, 1974.
2. Brill D., Uberall H. Transmitted waves in the diffraction of sound from liquid cylinders. J. Acoust. Soc. America, 1970, vol. 47, No. 5, pt 2.
3. Brill D., Uberall H. Acoustic waves transmitted through solid elastic cylinders. J. Acoust. Soc. America, 1971, vol. 50, No. 3, pt 2.
4. Jdhanshahi A. Equations of motion of spherical shells. J. Acoust. Soc. America, 1965, vol. 38, No. 5.
5. Хёнл Х, Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
6. Метсавээр Я. А. Эхо-сигнал конечного сферического импульса от упругой цилиндрической оболочки. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.