Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 541.124+532.5

О ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ТЕОРИИ РЕАКТОРА С НЕОДНОРОДНЫМ ПСЕВДООЖИЖЕННЫМ СЛОЕМ

Б. М. Маркеев

(Москва)

На основе сращивания асимптотических разложений развит метод решения двухточечной краевой задачи для системы уравнений с одним малым параметром (большое число Пекле), возникающей в теории изотермического реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем. Внешнее аналитическое решение получено для малого коэффициента обмена между пузырями и средой в виде ряда до третьего члена разложения. Приводится аналитическое решение искомой задачи, равномерно пригодное на всем отрезке с точностью до квадратичных членов по малому параметру, фигурирующих в двухточечной краевой задаче.

Известные модели реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем (см., например, [1–4]) основаны на представлении о псевдоожиженном слое как о двухфазной системе, состоящей из непрерывной фазы, движущейся по реактору с начальной скоростью ожижения, и дискретной фазы, представляющей собой излишки ожижающего агента, проходящие через слой в виде пузырей. Расчет реакторов такого типа для реакции произвольного порядка даже в одномерном приближении сложен и может быть выполнен лишь с применением численных методов. В связи с этим особый интерес приобретают приближенные методы нелинейной механики, например, для расчета стационарного режима работы реактора.

В [5] развит метод решения стационарного уравнения для изотермического реактора при больших числах Пекле на основе сращиваемых асимптотических разложений. Позднее в [6] был развит метод решения уравнения изотермического реактора, аналогичный методу сращиваемых асимптотических разложений [7]. Однако обобщение этого метода на системы уравнений встречает определенные трудности [8–10]. Из-за нелинейности уравнений неизотермического реактора не удалось получить аналитического внешнего решения в нулевом и последующих приближениях.

1. Двухточечная краевая задача, возникающая в теории реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем катализатора при ряде предположений, формулируется следующим образом:

$$\varepsilon\frac{d^2x}{d\xi^2}=\frac{dx}{d\xi}-Kx^n+S(x-y),\quad \frac{dy}{d\xi}=S\frac{u}{v}(x-y)\qquad 0\leqslant\xi\leqslant1 \tag{1.1}$$

$$x(+0)=1+\varepsilon\frac{d}{d\xi}x(+0),\quad \frac{dx(1)}{d\xi}=0,\quad y(+0)=0$$

Здесь $\xi=z/L$ — безразмерная координата; $x=x^*/x^*(-0)$, $y=y^*/y^*(-0)$ — безразмерная концентрация реагирующего вещества в непрерывной фазе и в пузыре, $x^*(-0)$, $y^*(-0)$ — концентрация на входе в реактор, $S=S^*/(Lu)$ — безразмерный коэффициент обмена между пузырями и непрерывной фазой, u — скорость непрерывной фазы, v — скорость пузырей, $\varepsilon^{-1} = \mathrm{Pe} = Lu / D$ — число Пекле, D — коэффициент диффузии, $K = K^* x^n (-0) / (Lu)$ — безразмерная скорость реакции, n — порядок реакции, протекающей в реакторе.

Исследуем систему (1.1) в случае $\varepsilon \ll 1$. Решение будем искать методом последовательных возмущений

$$x(\xi) = \chi_x(\xi), \quad y(\xi) = \chi_y(\xi), \quad \chi_{x,y}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \chi_{x,y}^{(n)}(\xi) \tag{1.2}$$

Подставив (1.2) в (1.1) и полагая $y(-0) = 0$, приходим к системе уравнений нулевого приближения

$$\frac{d\chi_x^{(0)}}{d\xi} - K\chi_x^{(0)n} + S(\chi_x^{(0)} - \chi_y^{(0)}) = 0, \quad \frac{d\chi_y^{(0)}}{d\xi} - \frac{u}{v} S(\chi_x^{(0)} - \chi_y^{(0)}) = 0 \tag{1.3}$$

$$\chi_x^{(0)}(+0) = 1, \quad \chi_y^{(0)}(+0) = 0$$

Ограничимся исследованием случая малых коэффициентов обмена между пузырями и непрерывной фазой. Представим решение для нулевого и последующих приближений по ε рядом по малому числу S

$$\chi_{x,y}^{(l)}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} S^m \chi_{x,y(m)}^{(l)}(\xi) \tag{1.4}$$

2. Для определенности исследуем случай реакции второго порядка ($n = 2$), тогда система нулевого приближения

$$d\chi_{x(0)}^{(0)} / d\xi - K\chi_{x(0)}^{(0)2} = 0, \quad dx_{y(0)}^{(0)} / d\xi = 0 \tag{2.1}$$

$$\chi_{x(0)}^{(0)}(+0) = 1, \quad \chi_{y(0)}^{(0)}(+0) = 0$$

имеет решение

$$\chi_{x0}^{(0)}(\xi) = [-K\xi + 1]^{-1}$$

Решение системы уравнений первого приближения по малому числу S

$$d\chi_{x(1)}^{(0)} / d\xi - 2K\chi_{x(0)}^{(0)}\chi_{x(1)}^{(0)} + (\chi_{x(0)}^{(0)} - \chi_{y(0)}^{(0)}) = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{d\chi_{y(1)}^{(0)}}{d\xi} - \frac{u}{v}(\chi_{x(0)}^{(0)} - \chi_{y(0)}^{(0)}) = 0, \quad \chi_{x(1)}^{(0)}(+0) = \chi_{y(1)}^{(0)}(+0) = 0$$

используя систему нулевого приближения (2.1), можно представить в виде

$$\chi_{x(1)}^{(0)}(\xi) = \frac{1}{2K}(1 - \chi_{x(0)}^{(0)2}(\xi)), \quad \chi_{y(1)}^{(0)}(\xi) = \frac{u}{vK} \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)$$

Аналогично (2.2) система уравнений второго приближения по малому S представляет собой систему линейных неоднородных уравнений, и ее решение можно представить в виде

$$\chi_{x(2)}^{(0)}(\xi) = \left(\frac{\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)}{K}\right)^2 \left[\frac{1}{12} \frac{1 - \chi_{x(0)}^{(0)3}(\xi)}{\chi_{x(0)}^{(0)3}(\xi)} + \frac{1}{4}(\chi_x^{(0)}(\xi) - 1) - \right.$$

$$- \frac{u}{9v}\left(\frac{3\ln\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)+1}{\chi_{x(0)}^{(0)3}(\xi)} - 1\right)\Big]$$

$$\chi_{x(2)}^{(0)}(\xi) = \frac{u}{vK^2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)}{\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)} - \frac{1}{2}(\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{u}{v}\left(\frac{\ln\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)-1}{\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)} - 1\right)\right\}$$

Решение систем линейных неоднородных уравнений в последующих приближениях всегда можно представить, по крайней мере, в квадратурах.

Обратимся к системе уравнений первого приближения по ε. Подставляя (1.2) в (1.1), имеем для первого приближения

$$\frac{d\chi_x^{(1)}}{d\xi} - 2K\chi_x^{(0)}\chi_x^{(1)} + S(\chi_x^{(1)} - \chi_y^{(1)}) = \frac{d^2\chi_x^{(0)}}{d\xi^2} \tag{2.3}$$

$$\frac{d\chi_y^{(1)}}{d\xi} - S\frac{u}{v}(\chi_x^{(1)} - \chi_y^{(1)}) = 0, \quad \chi_x^{(1)}(+0) = K - S, \quad \chi_y^{(1)}(+0) = 0$$

Решение данной системы при малых коэффициентах поверхностного обмена ищем по прежнему в виде (1.4). Система уравнения нулевого приближения

$$\frac{d\chi_{x(0)}^{(1)}}{d\xi} - 2K\chi_{x(0)}^{(0)}\chi_{x(0)}^{(1)} = \frac{d^2\chi_{x(0)}^{(0)}}{d\xi^2}, \quad \frac{d\chi_{y(0)}^{(1)}}{d\xi} = 0$$

$$\chi_{x(0)}^{(1)}(+0) = K, \quad \chi_{y(0)}^{(1)}(+0) = 0$$

обладает следующим решением:

$$\chi_{x(0)}^{(1)}(\xi) = K\chi_{x(0)}^{(0)2}(\xi)\,[1 + \ln\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)], \quad \chi_{y(0)}^{(1)}(\xi) = 0 \tag{2.4}$$

При получении (2.4) использовано решение системы (2.1).

Аналогично из (2.3) в первом приближении по S получим систему уравнений, которая имеет следующие решения:

$$\chi_{x(1)}^{(1)}(\xi) = \chi_{x(0)}^{(0)2}(\xi)\,\{2\,[2\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - 1) - \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)\ln\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)] - 1\}$$

$$\chi_{y(1)}^{(1)}(\xi) = \frac{u}{v}\{2\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)\ln\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - (\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - 1)\}$$

И, наконец, подставляя в систему уравнений второго приближения

$$\frac{dx_x^{(2)}}{d\xi} - 2K\chi_x^{(0)}\chi_x^{(0)} + S(\chi_x^{(2)} - \chi_y^{(2)}) = \frac{d^2\chi_x^{(1)}}{d\xi^2} + K\chi_x^{(1)2} \tag{2.5}$$

$$\frac{d\chi_y^{(2)}}{d\xi} - \frac{u}{v}S(\chi_x^{(2)} - \chi_y^{(2)}) = 0$$

$$\chi_x^{(2)}(+0) = 2(K-S)(2K-S) + \frac{u}{v}S^2, \quad \chi_y^{(2)}(+0) = 0$$

решение в виде ряда по S, приходим в нулевом приближении по S, к системе уравнений

$$\frac{d\chi_{x(0)}^{(2)}}{d\xi} - 2K\chi_{x(0)}^{(0)}\chi_{x(0)}^{(2)} = \frac{d^2\chi_{x(0)}^{(1)}}{d\xi^2} + K\chi_{x(0)}^{(1)2}$$

$$d\chi_{y(0)}^{(2)}/d\xi = 0, \quad \chi_{x(0)}^{(2)}(+0) = 4K^2, \quad \chi_{y(0)}^{(2)}(+0) = 0$$

которая имеет следующие решения:

$$\chi_{x(0)}^{(2)}(\xi) = (K\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi))^2 \{9(\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) - 1) +$$
$$+ [(\chi_{x(0)}^{(0)}(\xi) \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi))(2 + \ln \chi_{x(0)}^{(0)}(\xi)) + 1]\}, \quad \chi_{y(0)}^{(2)}(\xi) = 0$$

Аналогично получаются решения системы (2.5) в последующих приближениях по S.

3. Для того чтобы решение системы (1.1) удовлетворяло граничным условиям на конце отрезка, введем в окрестности точки $\xi = 1$ «пограничный слой» [7]. После замены переменной $\eta = (1 - \xi) / \varepsilon$ исходная система уравнений (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\psi_x}{d\eta^2} + \frac{d\psi_x}{d\eta} = \varepsilon[-K\psi_x{}^n + S(\psi_x - \psi_y)] \tag{3.1}$$
$$\frac{d\psi_y}{d\eta} = -\varepsilon S \frac{u}{v}(\psi_x - \psi_y), \qquad \frac{d\psi_x(0)}{d\eta} = 0$$

где наибольшими будут члены, содержащие производные от ψ_x и ψ_y по координатам. При этом $x(\xi) = \psi_x(\eta)$, $y(\xi) = \psi_y(\eta)$, а в качестве граничного условия взято условие обращения производной от $\psi_x(\eta)$ в нуль для $\eta = 0$, которое представляет собой соотношение для определения одной из трех констант, фигурирующих в решениях системы (3.1). Еще две константы определяются процедурой сращивания внешнего решения с внутренним. Решение (3.1) представим разложением по степеням малого параметра ε

$$\psi_{x,y}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi_{x,y}^{(m)}(\eta) \tag{3.2}$$

Система уравнений нулевого приближения обладает решением

$$\psi_x^{(0)}(\eta) = h_{x0}^{(0)}, \qquad \psi_y^{(0)}(\eta) = h_{y0}^{(0)}$$

Здесь $h_{x0}{}^{(0)}$ и $h_{y0}{}^{(0)}$ — постоянные, определяемые процедурой сращивания. Функции $\psi_{x,y}^{(1)}$ удовлетворяют системе уравнений первого приближения

$$\frac{d^2\psi_x^{(1)}}{d\eta^2} + \frac{d\psi_x^{(1)}}{d\eta} = -[Kh_{x0}^{(0)2} - S(h_{x0}^{(0)} - h_{y0}^{(0)})]$$
$$\frac{d\psi_y^{(1)}}{d\eta} = -\frac{u}{v} S(h_{x0}^{(0)} - h_{y0}^{(0)}), \quad \frac{d\psi_x^{(1)}(0)}{d\eta} = 0$$

и имеют вид

$$\psi_x^{(1)} = h_{x0}^{(1)} + h_x^{(1)}(\eta + e^{-\eta}), \qquad \psi_y^{(1)} = h_{y0}^{(1)} + h_{y1}^{(1)}\eta$$

Величины $h_x{}^{(1)}$ и $h_{y1}{}^{(1)}$ представляют собой функции от $h_{x0}{}^{(0)}$ и $h_{y0}{}^{(0)}$

$$h_x^{(1)} = -[Kh_{x0}^{(0)2} - S(h_{x0}^{(0)} - h_{y0}^{(0)})], \qquad h_{y1}^{(1)} = -\frac{u}{v} S(h_{x0}^{(0)} - h_{y0}^{(0)}) \tag{3.3}$$

а $h_{x0}{}^{(1)}$ и $h_{y0}{}^{(1)}$ — постоянные, определяемые сращиванием внутреннего разложения с внешним.

Функции второго приближения разложения (3.2) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2\psi_x^{(2)}}{d\eta^2}+\frac{d\psi_x^{(2)}}{d\eta}=-(2Kh_{x0}^{(0)}-S)\,\psi_x^{(1)}(\eta)-S\,(\psi_x^{(1)}(\eta)-\psi_y^{(1)}(\eta))$$

$$\frac{d\psi_y^{(2)}}{d\eta}=-\frac{u}{v}\,S\,(\psi_x^{(1)}(\eta)-\psi_y^{(1)}(\eta)),\qquad \frac{d\psi_x^{(2)}(0)}{d\eta}=0$$

и имеют вид

$$\psi_x^{(2)}=h_{x0}^{(2)}+h_{x1}^{(2)}(\eta+e^{-\eta})+h_{x2}^{(2)}\frac{\eta^2}{2}+h_{x3}^{(2)}(\eta+1)\,e^{-\eta}$$

$$\psi_y^{(2)}=h_{y0}^{(2)}+h_{y1}^{(2)}\eta+h_{y2}^{(2)}\frac{\eta^2}{2}+h_y^{(2)}e^{-\eta}$$

Причем $h_{x1}^{(2)}, h_{x2}^{(2)}, h_{x3}^{(2)}, h_{y1}^{(2)}, h_{y2}^{(2)}, h_y^{(2)}$ выражаются через $h_{x0}^{(0)}, h_{y0}^{(0)}, h_{x0}^{(1)}, h_{y0}^{(1)}$ посредством соотношений

$$\begin{aligned}(3.4)\qquad h_{x1}^{(2)}&=-(2Kh_{x0}^{(0)}-S)\{[Kh_{x0}^{(0)2}-S\,(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})]+h_{x0}^{(1)}\}-\\&-S\left\{\frac{u}{v}\,S\,(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})+h_{y0}^{(0)}\right\},\quad h_{x2}^{(2)}=(2Kh_{x0}^{(0)}-S)\,[Kh_{x0}^{(0)2}-\\&-S\,(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})]+\frac{u}{v}\,S^2\,(h_{x0}^{(0)}-h_y^{(0)}),\quad h_{y1}^{(2)}=-\frac{u}{v}\,S\,(h_{x0}^{(1)}-h_{y0}^{(1)})\\ h_{y2}^{(2)}&=\frac{u}{v}\,S\left\{[Kh_{x0}^{(0)2}-S\,(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})]-\frac{u}{v}\,S\,(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})\right\}\\ h_y^{(2)}&=-\frac{u}{v}\,S\,[Kh_{x0}^{(0)2}-S\,(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})]\\ h_{x3}^{(2)}&=-(2Kh_{x0}^{(0)}-S)\,[Kh_{x0}^{(0)2}-S\,(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})]\end{aligned}$$

4. Определим постоянные, фигурирующие во внешнем решении, используя процедуру сращивания асимптотических разложений. Перейдем к промежуточной переменной [7] $\eta=\eta^*/\mu(\varepsilon)$, $\xi=1\,(\varepsilon/\mu(\varepsilon))\,\eta^*$, предполагая, что $\varepsilon\ll\mu(\varepsilon)\ll 1$, и запишем внешнее решение в виде разложения по $\varepsilon/\mu(\varepsilon)\ll 1$

$$(4.1)\qquad \chi_\gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon)}\,\eta^*\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\left\{\chi_\gamma^{(m)}(1)-\frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon)}\,\eta^*\frac{d\chi_\gamma^{(m)}(1)}{d\xi}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon)}\right)^2\frac{\eta^{*2}}{2}\frac{d^2\chi_\gamma^{(m)}(1)}{d\xi^2}+\ldots\right\},\qquad \gamma=x,y$$

Производные от функции $\chi_x{}^{(m)}$ и $\chi_y{}^{(m)}$ в (4.1) целесообразно выразить, используя уравнения соответствующих приближений, через значения этих функций в данной точке. Например, для производных от $\chi_x{}^{(0)}$, $\chi_y{}^{(0)}$, $\chi_x{}^{(1)}$, $\chi_y{}^{(1)}$ по ξ при $\xi=1$ имеем

$$(4.2)\qquad \frac{d\chi_x^{(0)}}{d\xi}=K\chi_x^{(0)2}-S\,(\chi_x^{(0)}-\chi_y^{(0)}),\qquad \frac{d\chi_y^{(0)}}{d\xi}=\frac{u}{v}\,S\,(\chi_x^{(0)}-\chi_y^{(0)})$$

$$\frac{d^2\chi_x^{(0)}}{d\xi^2}=(2K\chi_x^{(0)}-S)\,[K\chi_x^{(0)2}-S\,(\chi_x^{(0)}-\chi_y^{(0)})]+\frac{u}{v}\,S^2\,(\chi_x^{(0)}-\chi_y^{(0)})$$

$$\frac{d^2\chi_y^{(0)}}{d\xi^2}=\frac{u}{v}\,S\left\{K\chi_x^{(0)2}-S\left(1+\frac{u}{v}\right)(\chi_x^{(0)}-\chi_y^{(0)})\right\}$$

$$\frac{d\chi_x^{(1)}}{d\xi}=2K\chi_x^{(0)}\chi_x^{(1)}-S\,(\chi_x^{(1)}-\chi_y^{(1)})+$$

$$+(2K\chi_x^{(0)}-S)[K\chi_x^{(0)2}-S(\chi_x^{(0)}-\chi_y^{(0)})]+\frac{u}{v}S^2(\chi_x^{(0)}-\chi_y^{(0)}),$$

$$\frac{d\chi_y^{(1)}}{d\xi}=\frac{u}{v}S(\chi_x^{(1)}-\chi_y^{(1)})$$

Осуществим сращивание внутреннего решения с внешним. Для этого коэффициенты во внешних решениях (4.1) и соответствующих внутренних решениях при одинаковых степенях промежуточной переменной η^* приравняем. В нулевом приближении по малому параметру ε имеем

$$\chi_x^{(0)}(1)=h_{x0}^{(0)},\quad \frac{d\chi_x^{(0)}(1)}{d\xi}=[Kh_{x0}^{(0)2}-S(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})] \tag{4.3}$$

$$\frac{d^2\chi_x^{(0)}(1)}{d\xi^2}=(2Kh_{x0}^{(0)}-S)[Kh_{x0}^{(0)2}-S(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})]+$$

$$+\frac{u}{v}S^2(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})$$

$$\chi_y^{(0)}(1)=h_{y0}^{(0)},\quad \frac{d\chi_y^{(0)}(1)}{d\xi}=\frac{u}{v}S(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})$$

$$\frac{d^2\chi_y^{(0)}(1)}{d^2\xi}=\frac{u}{v}S\left\{[Kh_{x0}^{(0)2}-S(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})]-\frac{u}{v}S(h_{x0}^{(0)}-h_{y0}^{(0)})\right\}$$

При получении данной системы во внутренних решениях пренебрегалось экспоненциально малыми членами. Уравнения, содержащие значения внешних решений $\chi_x^{(0)}(1)$ и $\chi_y^{(0)}(1)$, определяют значения постоянных $h_{x0}^{(0)}=\chi_x^{(0)}(1)$ и $h_{y0}^{(0)}=\chi_y^{(0)}(1)$. Если подставить эти выражения в оставшиеся уравнения системы (4.3) и воспользоваться значениями производных в точке $\xi=1$ из (4.2), то непосредственно можно убедиться, что второе, третье, пятое и шестое соотношения, соответствующие равенству коэффициентов внутреннего и внешнего разложений при первой и второй степенях промежуточной переменной, обращаются в тождества.

Таким образом, в нулевом приближении по малому параметру внутреннее решение переходит во внешнее с точностью до $(\varepsilon/\mu)^2$. Выделяя общую часть во внешнем и внутреннем решениях, получим в первом приближении по ε равномерно пригодные решения на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$

$$x=\chi_x^{(0)}(\xi)+\varepsilon\chi_x^{(1)}(\xi)+\varepsilon h_x^{(1)}\exp\left\{-\frac{1-\xi}{\varepsilon}\right\},\quad y=\chi_y^{(0)}(\xi) \tag{4.4}$$

Здесь $\chi_{x,y}^{(0)}(\xi)$ и $\chi_{x,y}^{(1)}(\xi)$ представляют собой внешние решения системы (1.3). В п. 1 приведены данные решения для малых коэффициентов поверхностного взаимодействия. Значение постоянной $h_x^{(1)}$ в (4.4) определяется формулой (3.3).

В первом приближении, чтобы не превышать точности сращивания, принятого в нулевом приближении по параметру $(\varepsilon/\mu)\ll 1$, достаточно коэффициенты внешних решений при нулевой и первой степенях промежуточной переменной η^* приравнять к коэффициентам при соответствующих степенях внутреннего решения.

В результате имеем

$$\chi_x^{(1)}(1)=h_{x0}^{(1)},\quad d\chi_x^{(1)}(1)/d\xi=-h_{x1}^{(2)}$$

$$\chi_y^{(1)}(1)=h_{y0}^{(1)},\quad d\chi_y^{(1)}(1)/d\xi=-h_{y1}^{(2)}$$

Первое и третье соотношение определяют $h_{x0}^{(1)} = \chi_x^{(1)}(1)$ и $h_{y0}^{(1)} = \chi_y^{(1)}(1)$. Если эти значения подставить во второе и четвертое соотношения, то, используя (4.2) и (3.4), непосредственно убедимся, что они удовлетворяются тождественно.

Выделяя общую часть с учетом сращивания в первом приближении, запишем решения, равномерно пригодное на всем отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} x(\xi) &= \chi_x^{(0)}(\xi) + \varepsilon\chi_x^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2\chi_x^{(2)}(\xi) + \\ &+ \varepsilon h_x^{(1)}(\eta + e^{-\eta}) + \varepsilon^2 [h_x^{(2)}(\eta + e^{-\eta}) + h_{x3}^{(2)} e^{-\eta}(\eta + 1)] \\ y(\xi) &= \chi_y^{(0)}(\xi) + \varepsilon\chi_y^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2\chi_y^{(2)}(\xi) + \varepsilon^2 h_y^{(2)} e^{-\eta} \end{aligned}$$

Здесь $h_x^{(1)}$ и $h_x^{(2)}$, $h_{x3}^{(2)}$, $h_y^{(2)}$ определяются посредством (3.3) и (3.4) Сравнивая решение (4.4) с (4.5), заметим, что влияние пограничного слоя на концентрацию реагента в пузыре сказывается лишь с первого приближения.

В заключение подчеркнем, что метод решения двухточечной краевой задачи, развитый в данной работе, на основе сращиваемых асимптотических разложений позволяет произвести расчет реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем в одномерном приближении, не прибегая к численному счету.

По сравнению с формальным обобщением метода [5] на случай системы уравнений [10] метод данной работы дает возможность найти решение, равномерно пригодное на всем отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, получив предварительно аналитическое выражение для соответствующих постоянных из процедуры сращивания внешнего решения с внутренним.

Автор благодарит В. В. Струминского за интерес к работе.
Поступила 20 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аэров М. Э., Тодес О. М.* Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.
2. *Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д.* Псевдоожижение твердых частиц. М., «Химия», 1963.
3. *Lewis W. K., Gilliland E. R., Glass W.* Solid-catalyzed reaction in a fluidized bed. A. I. Ch. E. Journal, 1959, vol. 5, No. 4, p. 419.
4. *Слинько М. Г., Шеплев В. С.* Моделирование каталитических процессов в псевдоожиженном слое. Кинетика и катализ, 1970, т. 11, вып. 2.
5. *Freeman L. B., Houchton G.* Singular perturbations of non-linear boundary value problems arising in chemical flow reactors. Chem. Engrg. Sci., 1966, vol. 21, No. 11, p. 1011—1024.
6. *Burghardt A., Zaleski T.* Longitudinal dispersion at small and large Peclet numbers in chemical flow reactors. Chem. Engrg Sci., 1968, vol. 23, p. 575—591.
7. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
8. *Cohen D. S.* Multiply selection of non-linear partial differential equations. In: Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, vol. 322.
9. *Chen J., O'Malley R. O. Jr.* On the asymptotic solution of a two-parameter boundary value problem of chemical reactor theory. SIAM J. Appl. Math., 1974, vol. 26, No. 4, p. 717—729.
10. *Rahman M.* Some aspects of perturbation solution arising in non-isothermal tubular chemical flow reactors. Chem. Engrg Sci., 1974, vol. 29, No. 11, p. 2169—2174.