Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 532.5

О ТЕЧЕНИИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ДНОМ

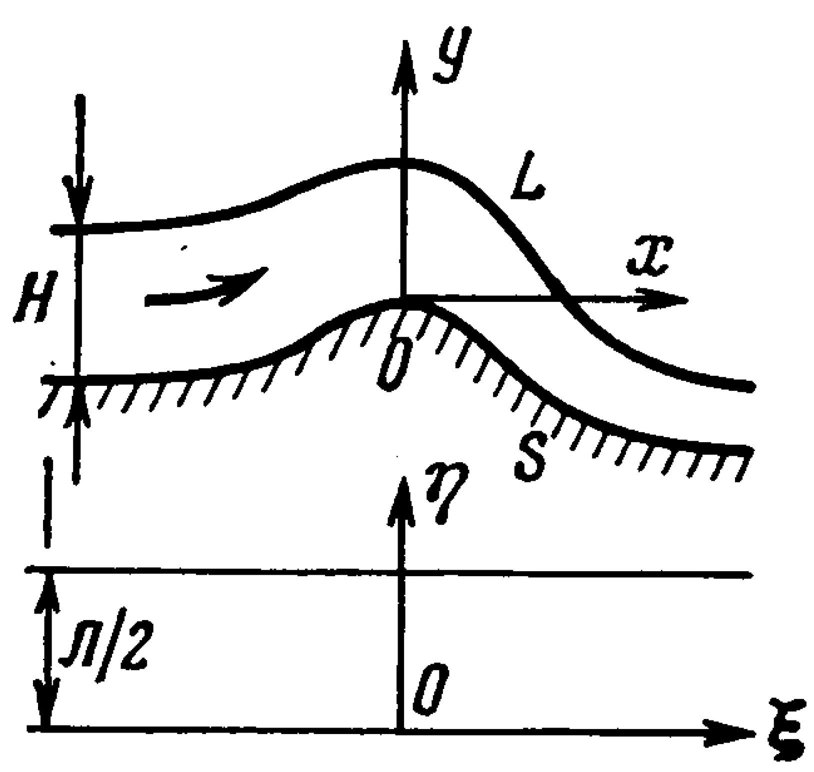
О. М. Киселев

(Казань)

Дается конструктивное доказательство однозначной разрешимости задачи о течении тяжелой жидкости со свободной поверхностью в канале с криволинейным дном при достаточно больших числах Фруда и при некоторых ограничениях на форму дна.

Неконструктивные доказательства существования решения при других ограничениях на форму дна были ранее получены в работах [1-3]. Для случая, когда число Фруда достаточно близко к единице и превосходит ее, доказательство разрешимости дано в работе [4].

1. В плоскости $z = x + iy$ рассматривается установившееся течение идеальной несжимаемой весомой жидкости, ограниченное сверху свободной поверхностью L, а снизу — криволинейным дном S, имещим горизонтальные асимптоты (фиг. 1). Начало координат расположено на S, ось y направлена вертикально вверх. На бесконечности вверх по течению (слева) движение жидкости равномерное и характеризуется скоростью V_0 и глубиной потока H.



Фиг. 1

Пусть l — криволинейная абсцисса точки на S, отсчитываемая от начала координат и возрастающая по направлению течения, β — угол, образованный касательной к S, направленной в сторону течения, с осью x. Форму кривой S зададим уравнением

$$\beta = F(t), \quad t = l/H \quad (-\infty < t < \infty) \tag{1.1}$$

Будем считать, что функция $F(t)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет при $-\infty < t < \infty$ условиям

$$|F(t)| \leqslant B_0 e^{-b_0|t|}, \quad |F'(t)| \leqslant B_1 e^{-b_1|t|} |t|^{-1}$$
$$|F'(t)| \leqslant B_2, \quad |F''(t)| \leqslant B_3 |t|^{-1} \tag{1.2}$$

где $B_0, B_1, B_2, B_3, b_0, b_1$ — некоторые положительные постоянные.

Пусть в плоскости вспомогательного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ области течения конформно соответствует полоса $K = \{0 < \eta < \pi/2\}$, причем свободной поверхности соответствует прямая $\eta = \pi/2$, твердой границе — прямая $\eta = 0$, началу координат плоскости z — точка $\zeta = 0$. Для комплексного потенциала течения w справедлива формула

(1.3) $$w = 2V_0 H \pi^{-1} \zeta$$

Введем в рассмотрение функцию Жуковского

(1.4) $$f(\zeta) = \ln\left(V_0 \frac{dz}{dw}\right) = r + i\theta, \quad r = \ln \frac{V_0}{V}$$

Здесь V — модуль скорости, θ — угол наклона скорости к оси x. Для граничных значений функции $f(\zeta)$ используем обозначения

$$r_0 = \operatorname{Re} f(\xi), \quad \theta_0 = \operatorname{Im} f(\xi), \quad \theta_0' = d\theta_0 / d\xi$$

$$r_1 = \operatorname{Re} f(\xi + i\pi/2), \quad \theta_1 = \operatorname{Im} f(\xi + i\pi/2), \quad r'_1 = dr_1 / d\xi$$

Условие постоянства давления на свободной поверхности запишем в форме (g — ускорение силы тяжести, φ — потенциал скорости)

(1.5) $$r_1' e^{-3r_1} = \frac{g}{V_0^3} \frac{d\varphi}{d\xi} \sin\theta_1$$

Согласно (1.3), (1.4)

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2V_0 H}{\pi} \text{ на } S \text{ и } L, \quad \frac{dt}{d\xi} = \frac{2}{\pi} e^{r_0} \text{ на } S$$

Учитывая (1.1), (1.5), для функции $f(\zeta)$ получим следующую нелинейную краевую задачу:

(1.6) $$\theta_0' = \frac{2}{\pi} F'(t) e^{r_0}, \quad t = \frac{2}{\pi} \int_0^\xi e^{r_0} d\xi$$

$$r_1' = \alpha \sin\theta_1 \left(1 - 3\alpha \int_{-\infty}^{\xi} \sin\theta_1 d\xi\right)^{-1}, \quad \alpha = \frac{2gH}{\pi V_0^2}$$

$$\lim f(\zeta) = 0, \quad \xi \to -\infty$$

Функция $f(\zeta)$, регулярная в K и непрерывная в замкнутой области $\bar{K}$, выражается через θ_0 и r_1 по формуле [5]

(1.7) $$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\theta_0(\tau) \operatorname{csch}(\tau - \zeta) + r_1(\tau) \operatorname{sch}(\tau - \zeta)\} d\tau$$

$$(\operatorname{csch} z = 1 / \operatorname{sh} z, \ \operatorname{sch} z = 1 / \operatorname{ch} z)$$

Предполагая ограниченность и дифференцируемость функций θ_0, r_1, из (1.7) получим с помощью интегрирования по частям

(1.8) $$r_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\theta_0'(\tau) \ln \operatorname{cth} \frac{|\tau - \xi|}{2} + r_1(\tau) \operatorname{sch}(\tau - \xi)\right\} d\tau$$

$$\theta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\theta_0(\tau) \operatorname{sch}(\tau - \xi) + r_1'(\tau) \ln \operatorname{cth} \frac{|\tau - \xi|}{2}\right\} d\tau$$

Пусть $\varkappa(\xi)$, $\lambda(\xi)$ — вещественные функции, определенные на всей числовой оси. Введем операторы P_0, P_1, D_0, D_1, S_0, S_1, K_0

$$P_0\varkappa = \int_{-\infty}^{\xi} \alpha \sin\varkappa(\tau) \left(1 - 3\bar{\alpha} \int_{-\infty}^{\tau} \sin\varkappa(\xi)\, d\xi\right)^{-1} d\tau$$

$$P_1\varkappa = \bar{\alpha}\sin\varkappa(\xi) \left(1 - 3\bar{\alpha} \int_{-\infty}^{\xi} \sin\varkappa(\tau)\, d\tau\right)^{-1}$$

$$D_0\varkappa = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varkappa(\tau)\operatorname{sch}(\tau - \xi)\, d\tau$$

$$D_1\varkappa = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varkappa(\tau)\ln\operatorname{cth}\frac{|\tau - \xi|}{2}\, d\tau$$

$$S_0\varkappa = F(t), \quad S_1\varkappa = \frac{2}{\pi} e^{\varkappa(\xi)} F'(t), \quad t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\xi} e^{\varkappa(\tau)}\, d\tau$$

$$K_0(\varkappa, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\varkappa(\tau)\operatorname{csch}(\tau - \zeta) + \lambda(\tau)\operatorname{sch}(\tau - \zeta)\}\, d\tau \tag{1.9}$$

Согласно (1.6)

$$r_1' = P_1\theta_1, \quad r_1 = P_0\theta_1, \quad \theta_0' = S_1 r_0, \quad \theta_0 = S_0 r_0$$

Из (1.8) следует, что функции r_0, θ_1 удовлетворяют операторным уравнениям

$$r_0 = D_1 S_1 r_0 + D_0 P_0 \theta_1, \quad \theta_1 = D_0 S_0 r_0 + D_1 P_1 \theta_1 \tag{1.10}$$

Итак, если функция $f(\zeta)$ — решение краевой задачи (1.6), то выполняются равенства (1.10).

Справедливо и обратное утверждение: если непрерывные и ограниченные вещественные функции $\mu_0^*(\xi)$, $\mu_1^*(\xi)$ таковы, что существует предел

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \sin\mu_1^*\, d\xi = M, \quad |M| < \infty \tag{1.11}$$

и выполняются соотношения

$$\mu_0^* = D_1 S_1 \mu_0^* + D_0 P_0 \mu_1^*, \quad \mu_1^* = D_0 S_0 \mu_{01}^* + D_1 P_1 \mu_1^* \tag{1.12}$$

то функция

$$h(\zeta) = K_0(S_0\mu_0^*, P_0\mu_1^*) \tag{1.13}$$

дает решение краевой задачи (1.6.)

Действительно, функция $h(\zeta)$, определенная формулами (1.13), (1.9), регулярна в K и непрерывна в замкнутой области $\bar{K}$. Из сравнения формул (1.7), (1.9) при учете (1.8) можно заключить, что

$$\operatorname{Im} h(\xi) = S_0\mu_0^*, \quad \operatorname{Re} h(\xi + i\pi/2) = P_0\mu_1^* \tag{1.14}$$

$$\frac{d}{d\xi}\operatorname{Im} h(\xi) = S_1\mu_0^*, \quad \frac{d}{d\xi}\operatorname{Re} h\left(\xi + \frac{i\pi}{2}\right) = P_1\mu_1^*$$

$$\operatorname{Re} h(\xi) = D_1 S_1 \mu_0^* + D_0 P_0 \mu_1^*$$

$$\operatorname{Im} h(\xi + i\pi/2) = D_0 S_0 \mu_0^* + D_1 P_1 \mu_1^*$$

согласно (1.12)

$$\operatorname{Re} h(\xi) = \mu_0^*, \quad \operatorname{Im} h(\xi + i\pi/2) = \mu_1^*$$

Полагая $f(\zeta) = h(\zeta)$, убеждаемся, что условия (1.6) выполняются.

2. Будем говорить, что вещественная функция $\varkappa(\xi)$, заданная на всей числовой оси, принадлежит пространству L_δ, если она непрерывна и при фиксированном $\delta > 0$ существует такое $N > 0$, что

(2.1) $$|\varkappa(\xi)| \leqslant N e^{-\delta|\xi|} \quad (<\infty < \xi < \infty)$$

Наименьшее значение N, при котором неравенство (2.1) выполняется, назовем нормой функции $\varkappa(\xi)$ в пространстве L_δ и обозначим $\|\varkappa\|_\delta$. Пространство L_δ банахово.

Пусть C — пространство вещественных непрерывных и ограниченных функций. Вводя банахово пространство

$$B = C \times L_\delta = \{\nu = (\mu_0, \mu_1): \mu_0 \in C, \ \mu_1 \in L_\delta\}$$
$$(\|\nu\|_B = \|\mu_0\|_C + \|\mu_1\|_\delta)$$

и оператор A, определённый на B с помощью равенств

(2.2) $$A\nu = A_0\nu \times A_1\nu$$
$$A_0\nu = D_1 S_1 \mu_0 + D_0 P_0 \mu_1, \quad A_1\nu = D_0 S_0 \mu_0 + D_1 P_1 \mu_1$$

запишем систему уравнений (1.12) в виде операторного уравнения

(2.3) $$\nu = A\nu$$

Исследуем свойства введенных операторов.

Лемма 1. При $0 < \delta < 1$ операторы D_0, D_1 преобразуют пространство L_δ в себя, причем

$$\|D_0\|_\delta \leqslant 4[\pi(1-\delta^2)]^{-1}, \quad \|D_1\|_\delta \leqslant \pi[2(1-\delta^2)]^{-1}$$

Пусть $\varkappa(\xi) \geqslant L_\delta$, $\delta < 1$. Тогда

(2.4) $$|D_1\varkappa| \leqslant \frac{\|\varkappa\|_\delta}{\pi} \lim \left\{ \int_{-R'}^{-\varepsilon'} e^{-\delta|\xi-\tau|} \ln\left|\operatorname{cth}\frac{\tau}{2}\right| d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_{\varepsilon}^{R} e^{-\delta|\xi-\tau|} \ln\left|\operatorname{cth}\frac{\tau}{2}\right| d\tau \right\} \quad (0 < \varepsilon, \ \varepsilon' \to 0, \ R, R' \to \infty)$$

В формуле (2.4) функцию $\ln|\operatorname{cth} {}^1/_2\tau|$ заменим рядом

$$\ln\left|\operatorname{cth}\frac{\tau}{2}\right| = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)|\tau|}$$

Меняя в полученном выражении сначала порядок суммирования и интегрирования, а затем порядок суммирования и предельного перехода, найдем

$$|D_1\varkappa| \leqslant \frac{4\|\varkappa\|_\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)e^{-\delta|\xi|} - \delta e^{-(2n+1)|\xi|}}{(2n+1)[(2n+1)^2 - \delta^2]} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4\|\varkappa\|_\delta}{\pi} e^{-\delta|\xi|} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)^2 - \delta^2]^{-1} < \frac{\pi\|\varkappa\|_\delta e^{-\delta|\xi|}}{2(1-\delta^2)}$$

что и требовалось доказать. Справедливость леммы 1 в отношении оператора D_0 доказывается с помощью неравенства $\operatorname{sch}\tau \geqslant 2e^{-|\tau|}$.

Лемма 2. Операторы D_0, D_1 переводят пространство C в себя, причем

$$\|D_0\|_C = 1, \quad \|D_1\|_C = \pi / 2$$

Доказательство этого утверждения элементарно.

Введем множества $C(R)$, $L_\delta(T)$, $B(R, T)$

$$C(R) = \{\mu_0:\ \mu_0 \in C,\ \|\mu_0\|_C \leqslant R\}$$
$$L_\delta(T) = \{\mu_1:\ \mu_1 \in L_\delta,\ \|\mu_1\|_\delta \leqslant T\}$$
$$B(R, T) = \{\nu = (\mu_0, \mu_1):\ \mu_0 \in C(R),\ \mu_1 \in L_\delta(T)\}$$

Пусть $\nu = (\mu_0, \mu_1) \in B(R, T)$, $0 < \delta < 1$. Тогда, опираясь на леммы 1 и 2, используя условия (1.2) и неравенства

$$|t| \geqslant 2\pi^{-1}e^{-R}|\xi|, \qquad \left|\int_{-\infty}^{\xi} \sin\mu_1 d\xi\right| \leqslant 2T\delta^{-1}$$

можно показать, что $A\nu \in B(R, T)$, если только выполняются соотношения

$$6\alpha T\delta^{-1} < 1, \quad 2\pi^{-1}b_0e^{-R} \geqslant \delta \tag{2.5}$$
$$\frac{4B_0}{\pi(1-\delta^2)} + \frac{\pi}{2(1-\delta^2)}\frac{\alpha T}{1-6\alpha T\delta^{-1}} \leqslant T$$
$$B_2e^R + 2\alpha T\delta^{-1}(1 - 6\alpha T\delta^{-1}) \leqslant R$$

Пусть $\nu' = (\mu_0', \mu_1') \in B(R, T)$, $\nu'' = (\mu_0'', \mu_1'') \in B(R, T)$ и выполняется первое неравенство (2.5). Тогда

$$\|P_1\mu_1' - P_1\mu_1''\|_\delta \leqslant \frac{\alpha(1+12\alpha T\delta^{-1})}{(1-6\alpha T\delta^{-1})^2}\|\mu_1' - \mu_1''\|_\delta \tag{2.6}$$
$$\|P_0\mu_1' - P_0\mu_1''\|_C \leqslant \frac{2}{\delta}\frac{\alpha(1+12\alpha T\delta^{-1})}{(1-6\alpha T\delta^{-1})^2}\|\mu_1' - \mu_1''\|_\delta$$
$$|S_0\mu_0' - S_0\mu_0''| \leqslant B_1e^{2R}\exp\left(-\frac{2}{\pi}b_1e^{-R}|\xi|\right)\|\mu_0' - \mu_0''\|_C$$
$$\|S_1\mu_0' - S_1\mu_0''\| \leqslant \frac{2}{\pi}e^R(B_2 + B_3e^{2R})\|\mu_0' - \mu_0''\|_C$$

При условии

$$2\pi^{-1}b_1e^{-R} \geqslant \delta \tag{2.7}$$

получим

$$\|A\nu' - A\nu''\|_B = \|A_0\nu' - A_0\nu''\|_C + \|A_1\nu' - A_1\nu''\|_\delta \leqslant$$
$$\leqslant \gamma(\|\mu_0' - \mu_0''\|_C + \|\mu_1' - \mu_1''\|_\delta)$$
$$\gamma < \max\left\{[4B_1[\pi(1-\delta^2)]^{-1} + B_2 + B_3]e^{3R}\right.$$
$$\left.\left[\frac{\pi}{2(1-\delta^2)} + \frac{2}{\delta}\right]\frac{\alpha(1+12\alpha T\delta^{-1})}{(1-6\alpha T\delta^{-1})^2}\right\}$$

Таким образом, оператор A переводит множество $B(R, T)$ в себя и является на этом множестве оператором сжатия, если выполняются неравенства (2.5), (2.7) и

$$\left[\frac{\pi}{2(1-\delta^2)}+\frac{2}{\delta}\right]\frac{\alpha(1+12\alpha T\delta^{-1})}{(1-6\alpha T\delta^{-1})^2}\leqslant 1 \tag{2.8}$$

$$\{4B_1[\pi(1-\delta^2)]^{-1}+B_2+B_3\}e^{3R}\leqslant 1 \tag{2.9}$$

3. Запишем первое и третье неравенства (2.5) в виде

$$\omega<1,\quad \beta_1+\gamma_1\omega(1-\omega)^{-1}\leqslant\omega \tag{3.1}$$

$$\omega=6\bar{\alpha}T\delta^{-1},\quad B_1=\frac{24B_0\alpha\delta^{-1}}{\pi(1-\delta^2)},\quad \gamma_1=\frac{\pi\alpha}{2(1-\delta^2)}$$

Анализ показывает, что неравенства (3.1) выполняются при соблюдении условий

$$\beta_1+\gamma_1\leqslant{}^1/_2,\quad \omega=\omega_0={}^1/_2(\gamma_1+3\beta_1)$$

которые равносильны следующим:

$$\alpha\leqslant P={}^1/_2\{24B_0\delta^{-1}[\pi(1-\delta^2)]^{-1}+\pi[2(1-\delta^2)]^{-1}\}^{-1}$$
$$T=T_0=6B_0[\pi(1-\delta^2)]^{-1}+\pi\delta[24(1-\delta^{-2})]^{-1}$$

Положив $T=T_0$, запишем (2.8) в форме

$$\omega_0(1+2\omega_0)(1-\omega_0)^{-2}\leqslant\varkappa_1,\quad \omega_0=6\alpha T_0\delta^{-1} \tag{3.2}$$
$$\varkappa_1=6T_0\delta^{-1}\{\pi[2(1-\delta^2)]^{-1}+2\delta^{-1}\}^{-1}$$

С учетом требования $\omega_0<1$ из (3.2) получим

$$\bar{\alpha}\leqslant Q=\begin{cases}\delta(1+2\varkappa_1-\sqrt{1+12\varkappa_1})[6T_0(2\varkappa_1-4)]^{-1} & (\varkappa_1\neq 2)\\ \delta(15T_0)^{-1} & (\varkappa_1=2)\end{cases}$$

Для того, чтобы второе и четвертое неравенства (2.5) и неравенства (2.7), (2.9) могли выполняться, необходимо наложить некоторые ограничения на постоянные, характеризующие функцию $F(t)$. Будем считать, что

$$B_2\leqslant(e-1)e^{-2} \tag{3.3}$$

$$\min\left\{\frac{1}{3}(1-eB_2)\ln\left[\frac{4B_1}{\pi(1-\delta^2)}+B_2+B_3\right]^{-1}-B_2\right. \tag{3.4}$$
$$\left.-(1-eB_2)\ln(2b_k/\delta\pi)-B_2\ (k=0,1)\right\}=C_0>0$$

Положив $T=T_0$, запишем (2.5) в виде

$$B_2e^R+D\leqslant R,\quad D=2\alpha T_0\delta^{-1}(1-6\alpha T_0\delta^{-1})^{-1} \tag{3.5}$$

Учитывая (3.3), можно доказать, что неравенство (3.5) выполняется при

$$D\leqslant e^{-1},\quad R=\rho(\alpha)=(B_2+D)(1-eB_2)^{-1} \tag{3.6}$$

Согласно (3.4) второе неравенство (2.5) и неравенства (2.7), (2.9) выполняются при $R=\rho(\alpha)$, если

$$D\leqslant C_0 \tag{3.7}$$

Условия (3.6), (3.7) равносильны следующему:

$$\alpha\leqslant U=\delta C_1[2T_0(1+3C_1)]^{-1},\quad C_1=\min(C_0,e^{-1})$$

Таким образом, если постоянные B_1, B_2, B_3, b_0, b_1 удовлетворяют соотношениям (3.3), (3.4), то при $T=T_0$, $R=\rho(\alpha)$, $\alpha\leqslant\alpha_0=\min(P,Q,U)$ неравенства (2.5), (2.7) — (2.9) выполняются.

С помощью принципа сжатых отображений формулируется следующая теорема.

Теорема 1. Если выполняются условия (1.2), (3.3), (3.4) и $0 < \delta < 1$, то при $\alpha = \alpha_1 < \alpha_0$ в пространстве $B' = B(\rho(\alpha_1), T_0)$ существует решение $\nu^* = (\mu_0^*, \mu_1^*)$ уравнения (2,3), единственное в пространстве $B'' = B(\rho(\alpha_0), T_0)$ $(B' \subset B'')$. Решение может быть найдено как предел последовательности

$$\nu^{(n)} = A\nu^{(n-1)} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

при любом начальном приближении $\nu^{(0)} \in B'$. Оценка погрешности n-го приближения дается формулой

$$\|\nu^* - \nu^{(n)}\|_B \leqslant \frac{\gamma_1^n}{1-\gamma_1}\|\nu^{(0)} - A\nu^{(0)}\|_B \tag{3.9}$$

$$\gamma_1 = \max\{[4B_1(\pi(1-\delta^2))^{-1} + B_2 + B_3]e^{3\rho(\alpha_1)}$$

$$\left.\left[\frac{\pi}{2(1-\delta^2)} + \frac{2}{\delta}\right]\frac{\alpha_1(1+12\alpha_1T_0\delta^{-1})}{(1-6\alpha_1T_0\delta^{-1})^2}\right\}$$

4. Пусть $\nu^* = (\mu_0^*, \mu_1^*)$ — решение уравнения (2.3), причем $\nu^* \in B$. Тогда, как было показано выше, функция $f(\zeta)$, дающая решение краевой задачи (1.6), выражается формулой

$$f(\zeta) = K_0(S_0\mu_0^*, P_0\mu_1^*)$$

причем

$$r_0 = \mu_0^*, \quad \theta_1 = \mu_1^*, \quad \theta_0 = S_0\mu_0^*, \quad r_1 = P_0\mu_1^* \tag{4.1}$$

Пусть $\nu^{(0)} \in B'$, $\nu^{(n-1)} = (\mu_0^{(n-1)}, \mu_1^{(n-1)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Введем обозначения

$$f^{(n)}(\zeta) = K_0(S_0\mu_0^{(n-1)}, P_0\mu_1^{(n-1)}) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.2}$$

$$\lambda_0^{(n)} = \operatorname{Im} f^{(n)}(\xi), \quad \lambda_1^{(n)} = \operatorname{Re} f^{(n)}(\xi + i\pi/2)$$

Функция $f^{(n)}(\zeta)$ регулярна в K и непрерывна в $\bar{K}$. Согласно (1.13), (1.14)

$$\lambda_0^{(n)} = S_0\mu_0^{(n-1)}, \quad \lambda_1^{(n)} = P_0\mu_1^{(n-1)} \tag{4.3}$$

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(\xi) = D_1S_1\mu_0^{(n-1)} + D_0P_0\mu_1^{(n-1)}$$

$$\operatorname{Im} f^{(n)}(\xi + i\pi/2) = D_0S_0\mu_0^{(n-1)} + D_1P_1\mu_1^{(n-1)}$$

Учитывая (2.2), (3.8), получим

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(\xi) = \mu_0^{(n)}, \quad \operatorname{Im} f^{(n)}(\xi + i\pi/2) = \mu_1^{(n)}$$

Принимая во внимание (4.1), (4.3), найдем

$$\max|f(\zeta) - f^{(n)}(\zeta)| \leqslant \max\{\|r_0 - \mu_0^{(n)}\|_C + \|\theta_0 - \lambda_0^{(n)}\|_C, \ \|r_1 - \lambda_1^{(n)}\|_C + \|\theta_1 - \mu_1^{(n)}\|_C\} \leqslant \max\{\|\mu_0^* - \mu_0^{(n)}\|_C +$$
$$+ \|S_0\mu_0^* - S_0\mu_0^{(n-1)}\|_\delta$$
$$\|P_0\mu_1^* - P_0\mu_1^{(n-1)}\|_C + \|\mu_1^* - \mu_1^{(n)}\|_\delta\}$$

При выполнении условий теоремы 1 с учетом неравенств, (2.6), (3.9), получим

$$\max_{\zeta \in \bar{K}}|f(\zeta) - f^{(n)}(\zeta)| \leqslant \frac{2\gamma_1^n}{1-\gamma_1}\|\nu^{(0)} - A\nu^{(0)}\|_B \tag{4.4}$$

Обозначим через $M(R, T)$ класс функций $f(\zeta)$, регулярных в K, непрерывных в $\overline{K}$ и таких, что

$$|\operatorname{Re} f(\xi)| \leqslant R, \quad |\operatorname{Im} f(\xi + i\pi / 2)| \leqslant T$$

Пользуясь полученными результатами, можно сформулировать следующую основную теорему.

Теорема 2. Если выполняются условия (1.2), (3.3), (3.4) и $0 < \delta < 1$, то при $\alpha = \alpha_1 < \alpha_0$ в классе $M(\rho(\alpha_1), T_0)$ существует решение краевой задачи (1.6), причем в классе $M(\rho(\alpha_0), T_0)$ оно является единственным. Решение может быть получено как предел последовательности (4.2) при любом $\nu^{(0)} \in B'$. Оценка погрешности n-го приближения дается формулой (4.4).

Зная функцию Жуковского $f(\zeta)$, функцию $z(\zeta)$, отображающую полосу K на область, занятую течением, найдем по формуле

$$z(\zeta) = \frac{2H}{\pi} \int_0^{\zeta} e^{f(\zeta)} d\zeta \tag{4.5}$$

Рассматривая последовательные приближения и применяя метод математической индукции, можно доказать следующие две теоремы.

Теорема 3. Если выполняются условия (1.2), (3.3), (3.4), $0 < \delta < 1$, $\alpha = \alpha_1 < \alpha_0$ и $F(t) = -F(-t)$, то функция $f(\zeta)$, дающая решение краевой задачи (1.6) и принадлежащая классу $M(\rho(\alpha_1), T_0)$, такова, что

$$f(-\overline{\zeta}) = \overline{f(\zeta)}, \qquad \zeta \in \overline{K}$$

Иными словами, если дно канала симметрично относительно оси y, то течение жидкости, соответствующее полученному решению, также симметрично относительно этой оси.

Теорема 4. Если выполняются условия (1.2), (3.3), (3.4), $0 < \delta < 1$, $\alpha = \alpha_1 < \alpha_0$, $T_0 < \pi$, $F(t) \leqslant 0$ $(F(t) \geqslant 0)$, то функция $f(\zeta)$, дающая решение краевой задачи (1.6) и принадлежащая классу $M(\rho(\alpha_1), T_0)$, такова, что r_1', $\theta_1 \leqslant 0$ $(r_1', \theta_1 \geqslant 0)$.

Иными словами, если дно канала монотонно понижается (повышается) в направлении течения, то свободная поверхность ведет себя аналогичным образом. Глубина потока на бесконечности справа меньше (больше) глубины потока H на бесконечности слева.

Условия (1.2), (3.3), (3.4), входящие в формулировку теорем 1—4, отличаются от ограничений на форму дна, использованных авторами работ [1–3]. В работе [1] исследовано течение в канале с монотонно понижающимся дном ($F(t) \leqslant 0$), в работах [2, 3] — обтекание препятствия, установленного на горизонтальном дне ($F(t) = 0$ при $|t| \geqslant t_0 > 0$). Кроме того, все три автора требовали выполнения неравенства $|F(t)| < \pi / 2$. Условия (1.2), (3.3), (3.4) не содержат ни одного из этих ограничений.

Покажем, что $|F(t)|$ может превосходить $\pi / 2$. Пусть, например

$$F(t) = c \int_{-\infty}^{t} \frac{\tau d\tau}{(1 + \tau^2) \operatorname{ch} a\tau}, \qquad c, a > 0$$

Легко убедиться, что условия (1.2) выполняются при $b_0 = b_1 = a$, $B_0 = 2c / a$, $B_1 = 2c$, $B_2 = c / 2$, $B_3 = c(1 + a)$. Найдем нижнюю оценку величины $\max|F(t)|$

$$\max|F(t)| = c\int_\infty^0 \frac{\tau d\tau}{(1+\tau^2)\operatorname{ch} a\tau} > \frac{c}{2}\int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau \operatorname{ch} a\tau} >$$

$$> \frac{c}{2}\left\{\frac{1}{2}\int_1^2 e^{-a\tau}d\tau + \frac{1}{3}\int_2^3 e^{-a\tau}d\tau + \frac{1}{4}\int_3^4 e^{-a\tau}d\tau + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}ca^{-1}(e^a - 1)[-\ln(1-e^{-a}) - e^{-a}]$$

Очевидно, положительные постоянные c, a, δ можно выбрать так, что при выполнении условий (3.3), (3.4) $\max|F(t)|$ будет превышать любое наперед заданное число. Заметим, что $\alpha_0 \to 0$ при a, $\delta \to 0$, т. е. в случае, когда $\max|F(t)| \to \infty$.

5. Для выполнения расчетов удобно в уравнениях (1.10) перейти от переменных ξ, τ к переменным σ, u.

$$\xi = \ln \operatorname{ctg} {}^1/_2\, \sigma, \quad \tau = \ln \operatorname{ctg} {}^1/_2\, u, \quad 0 \leqslant \sigma,\ u \leqslant \pi$$

Функции и операторы, получающиеся в результате такой замены, будем отмечать точкой справа. Имеем

$$\varkappa(\xi(\sigma)) = \varkappa^\cdot(\sigma), \quad \varkappa(\tau(u)) = \varkappa^\cdot(u)$$

$$P_0\varkappa = P_0{}^\cdot\varkappa^\cdot = -\int_\pi^\sigma \frac{\alpha \sin\varkappa^\cdot(u)}{\sin u}\left(1 + 3\alpha\int_\pi^u \frac{\sin\varkappa^\cdot(\sigma)}{\sin\sigma}d\sigma\right)^{-1} du$$

$$P_1\varkappa = P_1{}^\cdot\varkappa^\cdot = \alpha\sin\varkappa^\cdot(\sigma)\left(1 + 3\alpha\int_\pi^\sigma \frac{\sin\varkappa^\cdot(u)}{\sin u}du\right)^{-1}$$

$$S_0\varkappa = S_0{}^\cdot\varkappa^\cdot = F(t), \quad t = -\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^\sigma e^{\varkappa^\cdot(u)}\frac{du}{\sin u}$$

$$S_1\varkappa = S_1{}^\cdot\varkappa^\cdot = \frac{2}{\pi}e^{\varkappa^\cdot(\sigma)}F'(t)$$

$$D_0\varkappa = D_0{}^\cdot\varkappa^\cdot = \frac{\sin\sigma}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varkappa^\cdot(u)\,du}{1-\cos u\cos\sigma}$$

$$D_1\varkappa = D^\cdot\varkappa^\cdot = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varkappa^\cdot(u)}{\sin u}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2 u + \operatorname{tg}{}^1/_2\sigma}{\operatorname{tg}{}^1/_2 u - \operatorname{tg}{}^1/_2\sigma}\right| du$$

При этом уравнения (1.10) примут вид

$$r^\cdot{}_0 = D_1{}^\cdot S_1{}^\cdot r_0{}^\cdot + D_0{}^\cdot P_0{}^\cdot\theta_1{}^\cdot, \quad \theta_1{}^\cdot = D_0{}^\cdot S_0{}^\cdot r_0{}^\cdot + D_1{}^\cdot P_1{}^\cdot\theta_1{}^\cdot \tag{5.1}$$

Пусть функция $\varkappa^\cdot(\sigma)$, заданная на интервале $[0, \pi]$, представима в виде ряда Фурье по косинусам

$$\varkappa^\cdot(\sigma) = \sum_{k=0}^\infty B_k\cos k\sigma \tag{5.2}$$

Учитывая, что

$$\ln\left|\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\sigma+\operatorname{tg}{}^1/_2u}{\operatorname{tg}{}^1/_2\sigma-\operatorname{tg}{}^1/_2u}\right| = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sigma\sin nu}{n}$$

и используя формулы 3.612, 3.613 из [6], получим

$$(5.3)\qquad D_0^{\cdot}\varkappa^{\cdot} = \sum_{k=0}^{\infty}B_k\left(\frac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}\right)^k$$

$$D^{\cdot}_1\varkappa^{\cdot} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(2m-1)\sigma}{2m-1}\sum_{k=0}^{m-1}B_{2k}+\frac{\sin 2m\sigma}{2m}\sum_{k=1}^{m}B_{2k-1}\right\}$$

Решение уравнения (2.3) по схеме (3.8) эквивалентно нахождению функций $r_0^{\cdot}(\sigma)$, $\theta_1^{\cdot}(\sigma)$ из уравнений (5.1) по схеме

$$(5.4)\qquad r_0^{\cdot(n+1)} = D_1^{\cdot}S_1^{\cdot}r_0^{\cdot(n)} + D_0^{\cdot}P_0^{\cdot}\theta_1^{\cdot(n)},\quad \theta_1^{\cdot(n+1)} = D_0^{\cdot}S_0^{\cdot}r_0^{\cdot(n)} + D_1^{\cdot}P_1^{\cdot}\theta_1^{\cdot(n)}$$

Если выполняются условия теоремы 1 и $r_0^{\cdot(0)}\equiv\theta_1^{\cdot(0)}\equiv 0$, то при любом n функции $r_0^{\cdot(n)}$, $\theta_1^{\cdot(n)}$ непрерывны, причем

$$r_0^{\cdot(n)}(\pi)=0,\quad |\theta_1^{\cdot(n)}(\sigma)|\leqslant M(\sin\sigma)^{\delta}$$

где M — некоторая константа. Пусть найдены функции $r^{\cdot}{}_0^{(n)}$, $\theta_1^{\cdot(n)}$. Разложим выражения $S_0^{\cdot}r^{\cdot(n)}_{(0)}$, $S_1^{\cdot}r^{\cdot(n)}_{0}$, $P_0^{\cdot}\theta_1^{\cdot(n)}$, $P_1^{\cdot}\theta_1^{\cdot(n)}$, в ряды Фурье по косинусам

$$S_0^{\cdot}r_0^{\cdot(n)} = \sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(n)}\cos k\sigma,\qquad S_1^{\cdot}r_0^{\cdot(n)} = \sum_{k=0}^{\infty}b_k^{(n)}\cos k\sigma$$

$$P_0^{\cdot}\theta_1^{\cdot(n)} = \sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(n)}\cos k\sigma,\qquad P_1^{\cdot}\theta_1^{\cdot(n)} = \sum_{k=0}^{\infty}d_k^{(n)}\cos k\sigma$$

Согласно (5.2) — (5.4) функции $r_0^{\cdot(n+1)}$, $\theta_1^{\cdot(n+1)}$ выражаются формулами

$$\begin{Bmatrix}r_0^{\cdot(n+1)}\\ \theta_1^{\cdot(n+1)}\end{Bmatrix} = \sum_{k-0}^{\infty}\begin{Bmatrix}c_k^{(n)}\\ a_k^{(n)}\end{Bmatrix}\left(\frac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}\right)^k +$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(2m-1)\sigma}{2m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\begin{Bmatrix}b_{2k}^{(n)}\\ d_{2k}^{(n)}\end{Bmatrix}+\frac{\sin 2m\sigma}{2m}\sum_{k=1}^{m}\begin{Bmatrix}b_{2k-1}^{(n)}\\ d_{2k-1}^{(n)}\end{Bmatrix}\right]$$

Согласно (4.5), учитывая асимптотический характер отображающей функции $z(\zeta)$ при $\xi\to-\infty$, форму дна канала $(x_0(\sigma), y_0(\sigma))$ и свободной поверхности $(x_1(\sigma), y_1(\sigma))$ можно определить по формулам

$$(5.5)\qquad \frac{x_0}{H} = -\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\sigma}e^{r_0^{\cdot}(u)}\frac{\cos\theta_0^{\cdot}(u)}{\sin u}\,du$$

$$\frac{y_0}{H} = -\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\sigma}e^{r_0^{\cdot}(u)}\frac{\sin\theta_0^{\cdot}(u)}{\sin u}\,du$$

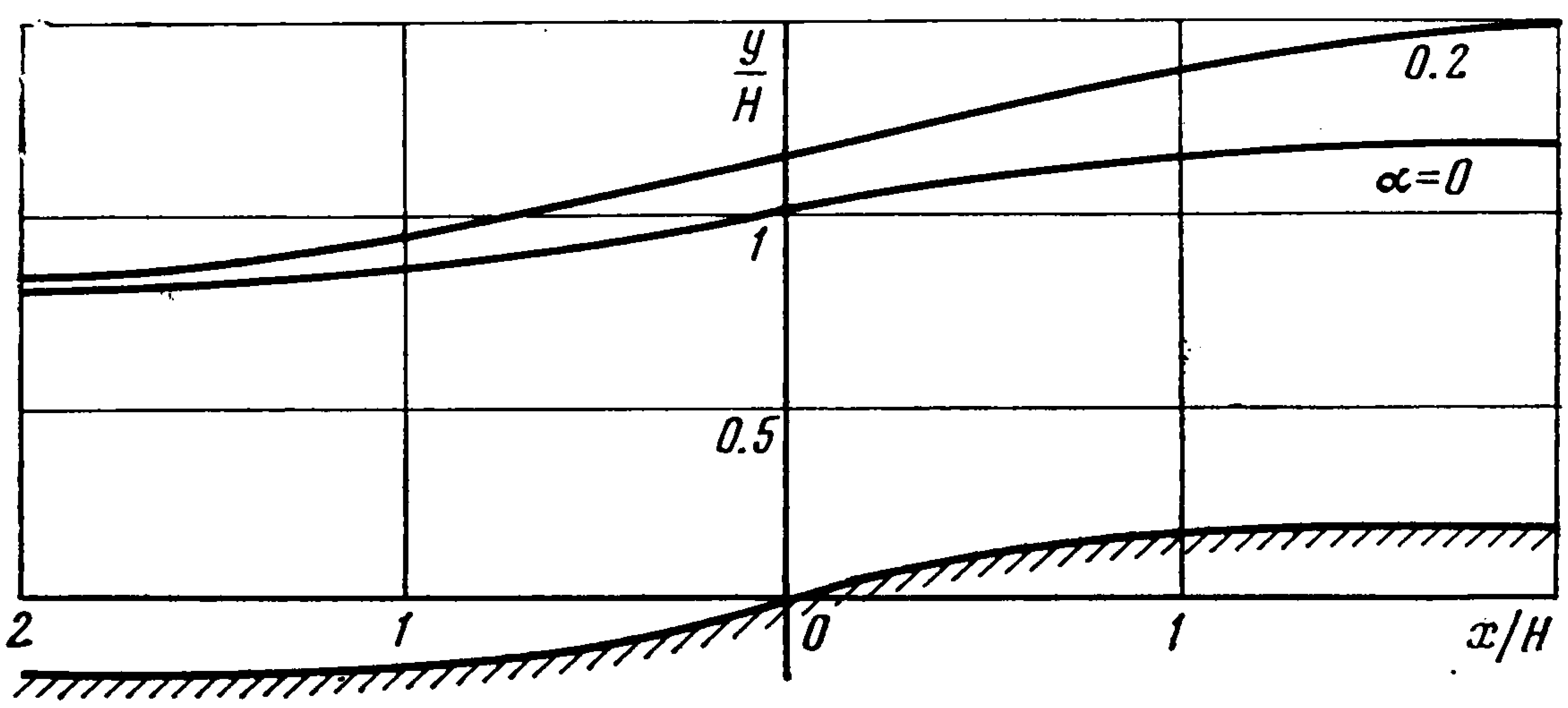
$$\frac{x_1}{H} = -\frac{2}{\pi}\int_{\pi-\varepsilon}^{\sigma}e^{r_1^{\cdot}(u)}\frac{\cos\theta_1^{\cdot}(u)}{\sin u}\,du$$

$$\frac{y_1}{H} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\sigma} e^{r_1^{\cdot}(u)}\frac{\sin\theta_1^{\cdot}(u)}{\sin u}\,du + 1 + \frac{y_\varepsilon}{H}$$

$$\frac{x_\varepsilon}{H} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi-\varepsilon} e^{r_0^{\cdot}(u)}\frac{\cos\theta_0^{\cdot}(u)}{\sin u}\,du, \quad \theta_0^{\cdot} = S_0 r_0^{\cdot}$$

$$\frac{y_\varepsilon}{H} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi-\varepsilon} e^{r_0^{\cdot}(u)}\frac{\sin\theta_0^{\cdot}(u)}{\sin u}\,du, \quad r_1^{\cdot} = P_0\theta_1^{\cdot}$$

где ε — достаточно малая положительная величина.



Фиг. 2

Описанный метод был использован для расчета течения в канале при

$$F(t) = 0.3\,(\mathrm{ch}\,{}^1/_2\,\pi t)^{-2}$$

На фиг. 2 показаны границы течения при $\alpha = 0$ (невесомая жидкость) и $\alpha = 0.2$. В обоих случаях форма дна канала, вычисленная по формулам (5.5), практически совпала с формой найденной по формулам

$$\frac{x_0}{H} = \int\limits_0^t \cos F(t)\,dt, \qquad \frac{y_0}{H} = \int\limits_0^t \sin F(t)\,dt$$

что свидетельствует о достаточно высокой точности полученных результатов.

Поступила 3 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gerber R.* Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant. J. math. pures et appl., 1955, t. 34, № 3.
2. *Красовский Ю. П.* О существовании апериодических течений со свободной границей. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 4.
3. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
4. *Hyers D. H.*, *Kyner W. T.* The existence of symmetric steady flows near critical speed. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1963, vol. 14, No. 4.
5. *Villat H.* Sur l'écoulement des fluides pesants. Ann. scient, Ecole norm. supér., 1915, vol. 32.
6. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.