

О СТРУКТУРЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

Ю. С. Федосенко

(Горький)

Методом точечных отображений изучаются закономерности структуры фазового пространства, а также условия существования и бифуркаций устойчивых периодических движений неавтономных динамических систем с ударными взаимодействиями. Исследование базируется на установленной в работе тождественности фазовых структур вблизи поверхности выхода из области скользящих режимов [1, 2] систем весьма общего вида и простейшей неавтономной. Полученные результаты позволили сформулировать двусторонний метод построения границ области скользящих режимов и тем самым дать законченное обоснование расчетной итерационной процедуры [2-4].

Развиваемый подход иллюстрируется на расширении известной модели [5], описывающей разнообразные виброударные системы.

1. Движение материальной точки в одномерном полупространстве под действием линейной внешней силы. Рассматриваемая модель представляет собой простейшую систему с ударными взаимодействиями. Как станет ясно из последующего, она отражает в малом особенности динамики весьма широкого класса систем.

1.1. Уравнения движения имеют вид

$$(1.1) \quad y'' = t, \quad y > \lambda_0$$

$$(1.2) \quad y(t_k) = \lambda_0, \quad y'(t_k + 0) = -Ry_k', \quad y_k' \equiv y'(t_k - 0) < 0$$

$$(1.3) \quad y = \lambda_0, \quad y' = 0, \quad t < 0 \quad (t = (F\tau - Q) / m, \quad y = (F / m)^2 \eta)$$

Переменные t (независимая) и y связаны с размерными величинами τ (временем) и η (расстоянием материальной точки от фиксированного начала отсчета O) указанными выше соотношениями; m — масса точки, $F > 0$ и $Q \geq 0$ — параметры линейной по времени внешней силы $F\tau - Q$; $R \in [0, 1]$ — ньютоновский коэффициент восстановления скорости при ударе; λ_0 — смещение O от границы полупространства (ограничителя). Обычно удобно выбирать величину λ_0 неотрицательной [2, 4, 6]. Однако в этом разделе достаточно положить $\lambda_0 = 0$.

Фазовое пространство Φ системы (1.1) — (1.3) образовано координатами $t, y \geq 0, y'$, т. е. $\dim \Phi = 3$. Как известно, для кусочно-непрерывных систем разбиение фазового пространства достаточно осуществить лишь на поверхности сшивания участков траекторий [6] $\Pi (y = 0)$, в данном случае даже на ее части — полуплоскости $\Pi_- (y = 0, y' < 0)$ или

Π_+ ($y = 0, y' > 0$). Построение разбиения проведем методом точечных преобразований, для чего введем в рассмотрение T^- — обратное отображение Π_- в себя, порождаемое траекториями (1.1), (1.2) между k - и $(k+1)$ -м соударениями ($t_k > t_{k+1}$). Формулы T^- получим, интегрируя (1.1) с начальными условиями (1.2)

$$(1.4) \quad t_{k+1} = t_k - \sigma_k, \quad y_{k+1} = (4y_k - \sigma_k t_k) / 2R \\ \sigma_k = -3t_k / 2 + [(3t_k / 2)^2 - 6y_k]^{1/2}$$

Из последнего равенства следует существование точечного отображения T^- всюду в Π_- . Выясним характер зависимости T^- от координат «начальной» точки $M_k (t_k, y_k = 0, y'_k)$ при стремлении последней к границе $\Gamma (y = 0, y' = 0)$ между Π_- и Π_+ . С этой целью запишем предельные значения выражений y'_{k+1} и σ_k

$$(1.5) \quad \lim_{y'_k \rightarrow 0} y'_{k+1} = -\sigma_k t_k / 2R, \quad \lim_{y'_k \rightarrow 0} \sigma_k = 3t_k (1 + \text{sign } t_k) / 2$$

В силу (1.5) ясно, что предельный переход к Γ в четвертьплоскости $\Pi_- (t < 0, y = 0, y' < 0)$ приводит к вырождению отображения T^- в тождественное, а в области $\Pi_-^+ (t > 0, y = 0, y' < 0)$ сохраняет невырожденный характер преобразования. В граничной точке M° между полуосями $\Gamma_+ (t > 0, y = 0, y' = 0)$ и $\Gamma_- (t < 0, y = 0, y' = 0)$ отображение T^- непрерывно переходит в тождественное. Описанный характер предельных переходов позволяет непрерывно и однозначно доопределить T^- на границе полуплоскости Π_- по формулам (1.5) для Γ_+ и (1.3) на $\Gamma \setminus \Gamma_+$.

Применим к Π_- преобразование T^{-k} — k -кратное произведение отображений T^- . Тогда получим область $\Pi_k \equiv T^{-k}\Pi_- \subset \Pi_-$, граничный контур которой, очевидно, определяется как образ преобразования $T^{-k}\Gamma$, т. е. состоит из полуоси Γ_- и примыкающей к M° кривой $\Gamma_k \equiv T^{-k}\Gamma_+$. Из уравнений (1.4) по индукции можно показать, что $\Gamma_k \subset \Pi_-$ и представляет собой полупараболу

$$(1.6) \quad y' = -\gamma_k t^2, \quad \gamma_k > 0, \quad t < 0$$

Коэффициенты $\gamma_k = \gamma_k(R)$ и $\gamma_{k+1} = \gamma_{k+1}(R)$ связаны между собой посредством параметра $\Theta_k \equiv -\sigma_k / t_{k+1}$ и следующих соотношений:

$$(1.7) \quad \gamma_k = \frac{3\Theta_k - 2\Theta_k^2}{6(1 - \Theta_k)^2}, \quad \gamma_{k+1} = \frac{3\Theta_k - \Theta_k^2}{6R}, \quad \gamma_1 = \frac{3}{8R}$$

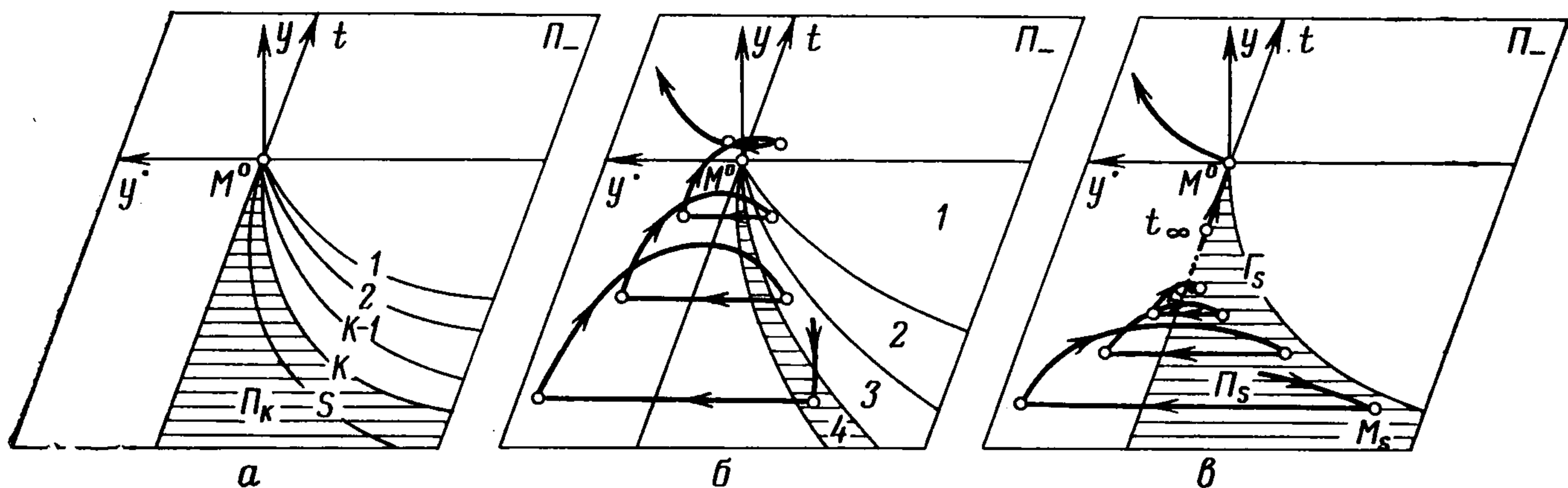
Так как $t_k \in [t_{k+1}, 0]$, то

$$(1.8) \quad \Theta_k \in [0, 1]$$

Когда k пробегает натуральный ряд чисел, упорядоченная последовательность $\{\Gamma_k\}$ заведомо развивается в положительном (см. фиг. 1, а, где кривой с номером k соответствует Γ_k) или отрицательном направлении, если якобиан J отображения T^- в Π_- сохраняет знак. Вычисляя по (1.4) частные производные $\partial y'_{k+1} / \partial y'_k$, $\partial y'_{k+1} / \partial t_k$, $\partial t_{k+1} / \partial y'_k$, $\partial t_{k+1} / \partial t_k$ и раскрывая определитель $\partial (y'_{k+1}, t_{k+1}) / \partial (y'_k, t_k)$, в соответствии с (1.8) находим

$$(1.9) \quad J = (3 - 2\Theta_k) / R (3 - \Theta_k) > 0$$

Полупарабола Γ_1 повернута относительно Γ_+ в положительном направлении, поэтому неравенство (1.9) обеспечивает такую же ориентацию Γ_{k+1} относительно Γ_k , т. е. $\gamma_{k+1} < \gamma_k$ [7]. Заметим, что $J = 0$ на Γ_+ . Однако в силу непрерывности T^- это вырождение несущественно при определении взаимной ориентации Γ_k и Γ_{k+1} .



Фиг. 1

Таким образом, ограниченная числовая последовательность $\{\gamma_k\}$ монотонно убывает. Следовательно, она имеет предел γ_s , выражение которого через R находится из (1.7) и дополнительного условия

$$(1.10) \quad \gamma_k = \gamma_{k+1} = \gamma_s$$

После упрощающих преобразований для коэффициента γ_s инвариантной относительно T^- полупараболы Γ_s получаем соотношения

$$(1.11) \quad \gamma_s = (3\Theta_s - \Theta_s^2) / 6R, \quad \Theta_s^3 - 5Q_s^2 + \\ + (7-2R)\Theta_s - 3(1-R) = 0$$

Символ Θ_s введен для значений Θ_k , выделяемых (1.10). По теореме Штурма [8] среди трех действительных корней второго уравнения (1.11) только один удовлетворяет условию $\Theta_s \in [0, 1]$. Этот корень монотонно убывает на интервале $[1, 0]$ при возрастании R от 0 до 1.

С помощью преобразования $\Theta_s = 1 - \lambda$ из второго соотношения (1.11) может быть получено характеристическое уравнение [9, 10]. Это позволяет связать формально введенный параметр λ с величиной Θ_s , имеющей ясный физический смысл коэффициента длительности скользящего режима [2], и указывает на возможность получения уравнений полупараболы Γ_s методом, развитым в работах Р. Ф. Нагаева.

Итак, последовательность полупарабол $\{\Gamma_k\}$, Γ_s разбивает Π_- на счетное множество вложенных одна в другую областей

$$\Pi_- \supset \Pi_1 \supset \dots \supset \Pi_k \supset \Pi_{k+1} \supset \dots \supset \Pi_s \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_k$$

В силу очевидной обратимости T^- ясно, что если $M_k \in P_k \equiv \Pi_{k-1} \setminus \Pi_k$, то на интервале (t_k, t_1) движение системы (1.1) — (1.3) сопровождается k ударными взаимодействиями, последовательно происходящими в подобластях P_k, P_{k-1}, \dots, P_1 . Пройдя через P_1 , изображающая точка $M(t, y, y')$ выходит в полупространство $G (y > 0)$ и остается там на интервале (t_1, ∞) (см. фиг. 1, б, где $k = 4$, области с номером k соответствует P_k).

При смещении M_k на граничный контур подобласти P_k либо происходит вырождение заключительного соударения в касание ($M_k \rightarrow \Gamma_{k-1}$), либо в некоторый момент $t_c \in (t_1, \infty)$ появляется дополнительное взаимодействие типа касания траектории (1.1) поверхности Π ($M_k \rightarrow \Gamma_k$). Если начальные условия располагаются в области Π_s , ограниченной Γ_- и Γ_s , то в системе осуществляется скользящий режим [1-4]. В самом деле, по построению в этом случае после каждого соударения изображающая точка возвращается в Π_s , сдвигаясь всякий раз в сторону возрастания t . Совершив таким образом счетное множество переходов по ударно-безударным участкам траектории, M в некоторый предельный момент $t_\infty < \infty$ попадает на полуось Γ_- и далее перемещается вдоль нее по закону (1.3), пока не придет в точку схода M^o (фиг. 1, в). Длительность h бесконечно-ударного процесса с началом в точке $M_s(t_s, 0, y_s) \in \Pi_s$, очевидно, конечна и равна разности $t_\infty - t_s$. Значение $h = -t_s$ отвечает развивающемуся вдоль Γ_s пограничному процессу, оно уменьшается до нуля вместе с R . Общее асимптотическое представление величины h получено в работе [2].

Так как $y^{**}(t)|_0 > 0$, то из M^o по траектории (1.1) изображающая точка выходит в G , где движется на интервале $(0, \infty)$, монотонно удаляясь от Π . Заметим, что если $F < 0$, то $\Pi_s = \Pi_-$ и $y^{**}(t) < 0$, т. е. M , попав в момент t_∞ на полуось Γ_- , будет двигаться по ней на интервале (t_∞, ∞) .

Итак, система конфигураций $\{P_k\}$, Π_s образует полное разбиение Π_- на области движений материальной точки в одномерном полупространстве с различным числом соударений с его границей.

Изучим характер смещений и деформаций P_k и Π_s при изменении параметра системы. Из зависимостей (1.7), (1.11) следует, что с ростом R на интервале $[0, 1]$ коэффициенты γ_k , γ_s монотонно убывают от бесконечности до $\gamma_k(1) > 0$ и $\gamma_s(1) = 0$ соответственно (см. фиг. 2, где кривым 1, 2, 3 соответствуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_s$). Следовательно, полупараболы Γ_k и Γ_s поворачиваются в положительном направлении от полуоси $Y_-(t=0, y=0, y' < 0)$ до предельного положения, определяемого коэффициентами $\gamma_k(1)$, $\gamma_s(1)$. Подобласти P_k и Π_s при этом ведут себя следующим образом:

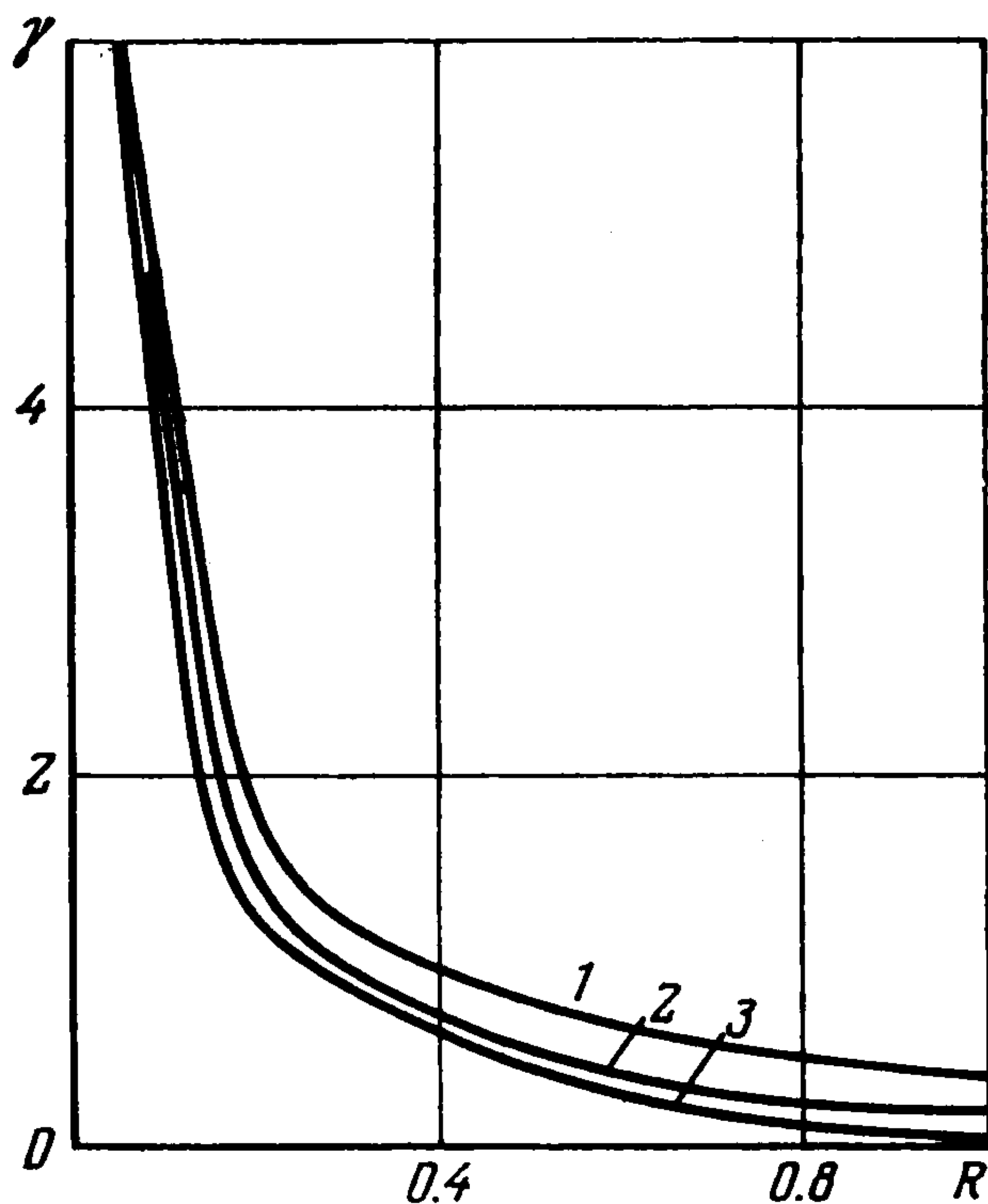
P_1 расширяется от границ Π_-^+ за счет смещения Γ_1 до положения, соответствующего $\gamma_1 = 3/8$.

P_k ($k = 2, 3, \dots$) как плоские области рождаются из одномерного множества Y_- при $R = +0$. Затем поворачиваются вокруг M^o в положительном направлении. Одновременно с этим, как следует из анализа $d\gamma_{k+1}/d\gamma_k$, сначала происходит расширение $-P_k$, а затем сужение.

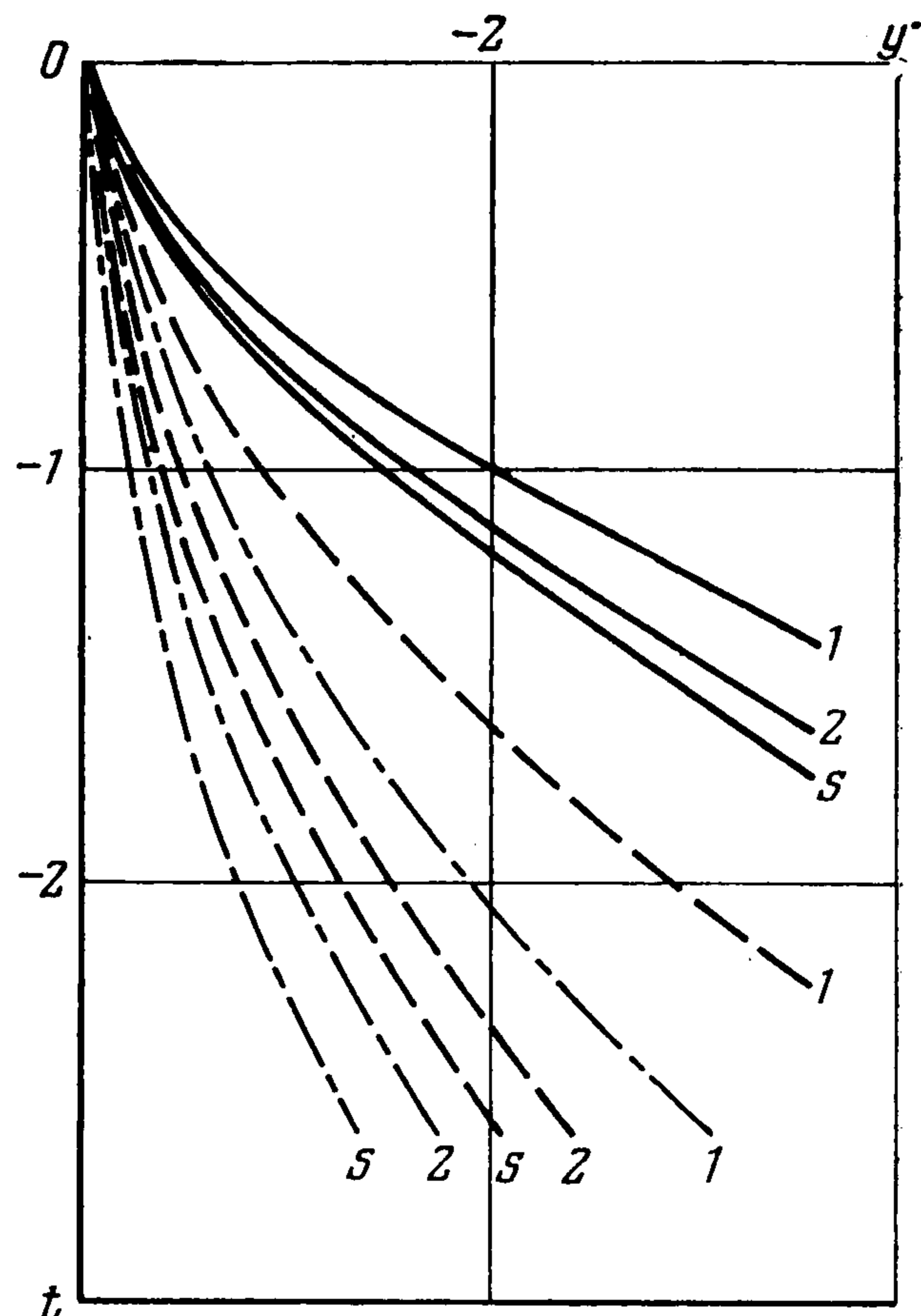
$\Pi_s = \Pi_-^-$ при $R = 0$. С увеличением R область Π_s резко сужается за счет смещения Γ_s и при $R = 1$ вырождается в полуось Γ_- . На фиг. 3 приведены примеры разбиения Π_- . Изображения полупарабол $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_s$ (кривые 1, 2, s соответственно) сплошными линиями отвечают $R = 0.2$, штриховыми — $R = 0.5$, штрихпунктирными — $R = 0.75$.

Если R флуктуирует, то установленная выше чрезвычайно тонкая фазовая структура в значительной мере нарушается. Например, при максимальном уровне флуктуаций $\Delta R = 0.05$ на интервале $R \in [0, 0.4]$ выполняется неравенство $\gamma_2(R + \Delta R) \leq \gamma_s(R - \Delta R)$ (фиг. 2), и, следовательно, множество $\{P_k\}$ ($k = 3, 4, \dots$) полностью перекрывается частями конфигураций P_2 и Π_s . Если же $R \in [0, 0.25]$, то $\gamma_1(R + \Delta R) \leq \gamma_s(R - \Delta R)$, т. е. в систему перекрываемых подобластей входит также P_2 . В этом случае полупараболами с коэффициентами $\gamma_1(R - \Delta R)$ и $\gamma_s(R + \Delta R)$

полуплоскость Π_- разбивается на три основные области: P_1^* , P^* , Π_s^* . В отношении P_1^* , Π_s^* можно достоверно утверждать, что они отвечают одноударным и скользящим режимам соответственно. В подобласти P^* , расположенной между P_1^* и Π_s^* , могут осуществляться движения с любым числом соударений k . Вероятность больших значений k тем выше, чем дальше начальная точка располагается в P^* от полупараболы с коэффициентом $\gamma_1 (R - \Delta R)$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом, в связи с неизбежными погрешностями идеализации и флуктуациями R в реальных конструкциях отдельный учет k -ударных движений целесообразен только для $k \leq k^*$, где k^* зависит от ΔR и прочих (неучитываемых) погрешностей. Счетное множество подобластей P_k для $k > k^*$ в рамках динамической модели естественно относить либо к P_{k^*} , либо к Π_s . Такая аппроксимация, по существу, приводит к усовершенствованной модели, обладающей такой же степенью адекватности, что и (1.1) — (1.3), но с несравненно более простой структурой разбиения Π_- . Обычно $k^* \leq 3$ [2-4]. В простейшем случае $\Pi_s \supset P_k (k > 1)$ [11].

1.2. Зависимости (1.7) после преобразования первой из них к виду

$$\Theta_k = [3(1 + 4\gamma_k) - (9 + 24\gamma_k)^{1/2}] / 4(1 + 3\gamma_k)$$

формально можно трактовать как итеративный процесс решения задачи выделения границы области Π_s . В связи с этой задачей обсудим особенности решения, которые вытекают из проведенного рассмотрения и позволяют сформулировать обобщенный способ построения последовательных приближений, сходящихся к Γ_s .

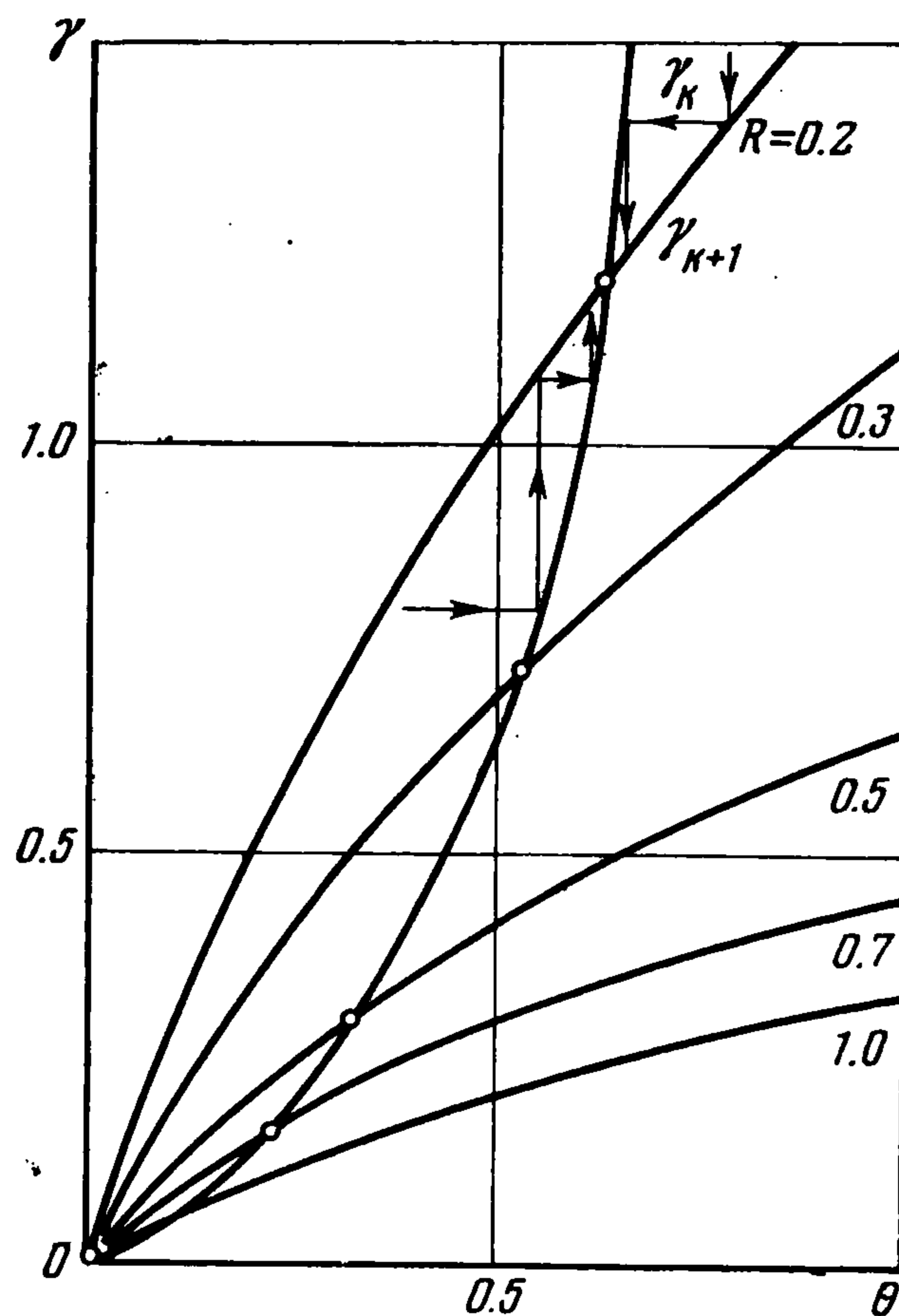
Прежде всего отметим, что, как следует из (1.7), отображение T^- переводит произвольную, исходящую из M^0 полупараболу $\Gamma' \subset \Pi_-$ также в полупараболу $\Gamma_1' \equiv T^-\Gamma' \subset \Pi_-$. Поэтому с учетом единственности инвариантной кривой Γ_s и условия (1.9) можно утверждать, что последовательность итераций

$$(1.12) \quad \{\Gamma_k' \equiv T^{-k}\Gamma'\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

сходится к Γ_s , монотонно развиваясь в фиксированном направлении: отрицательном внутри Π_s , если $\Gamma' \subset \Pi_s$, или положительном вне Π_s — в противном случае. Описанный характер (1.12) иллюстрируется на диаграмме Кенигса — Ламерея, построенной по (1.7), (фиг. 4).

Далее сделаем следующий шаг. Поскольку плоская подобласть, заключенная между Γ'_{k-1} и Γ'_k , при $k \rightarrow \infty$ вырождается в одномерное множество Γ_s , то итерации (1.12), где Γ' — произвольная непрерывная кривая, исходящая из M^0 , всегда сходятся к границе области Π_s . Иными словами, отображение T^- в пространстве кривых (1.12), каким-либо образом метризованном, является глобально сжимающим к инвариантной полупараболе Γ_s . Прямое отображение T ($t_k < t_{k+1}$) является сжимающим (к Γ^-) в пространстве кривых $\Gamma'_k \subset \Pi_s$, т. е. только в части своей области определения Π_1 .

При практическом построении Γ_s с помощью (1.12), очевидно, достаточно в качестве Γ' взять примыкающий к точке схода ε -участок — элемент произвольной непрерывной в сколь угодно малой фиксированной ε -окрестности M^0 кривой.



Фиг. 4

Замечание 1.1. Вычислительный процесс (1.12) непосредственно применим к решению общей задачи выделения граничного контура Γ_{s_i} области Π_{s_i} , характеризуемой моментом окончания бесконечноударного процесса, не большим заданного $t_i < 0$. В этом случае за стартовое приближение принимается ε -участок, примыкающий к $M_i(t_i, 0, 0)$.

2. Одноступенная динамическая система (общий случай). Систему весьма общего вида, рассматриваемую в п. 2 для наглядности можно интерпретировать как закон движения материальной точки массы m в одномерном полупространстве, но уже под действием произвольной внешней силы.

2.1. Движение точки в промежутках времени (t_k, t_{k+1}) описывается соотношениями

$$(2.1) \quad y'' = f(t, y, y'), \quad y > \lambda_0$$

Ударные взаимодействия с ограничителем происходят по закону (1.2)

В уравнении (2.1) функция $f(t, y, y')$ представляет собой суммарное нормированное по m силовое воздействие связей, внешней среды и возбуждения. Считаем, что $f \in C^2$ и зависит от параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (r — натуральное), которые вместе с λ_0 и R образуют пространство D ($\dim D = r + 2$).

Аналогично (1.1) — (1.3) фазовое пространство Φ системы (1.2), (2.1), (2.2) образовано координатами t , $y \geq \lambda_0$, y' и $\dim \Phi = 3$. Если в процессе движения точка M попадает на участок Γ_- ($y = \lambda_0$, $y' = 0$, $y'' < 0$), то ее последующее поведение уравнениями (1.2), (2.1) не описывается и должно быть формализовано дополнительно. В качестве доопределяющих соотношений примем уравнения кинематической связи

$$(2.2) \quad y = \lambda_0, \quad y' = 0, \quad f < 0$$

Закону (2.2) отвечает перемещение фазовой точки по Γ_- до момента прихода ее в состояние M°

$$(2.3) \quad y^\circ = \lambda_0, \quad y'^\circ = 0, \quad f|_{M^\circ} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{M^\circ} > 0$$

из которого M выходит по траектории (2.1) в G .

В дальнейшем будем считать $t^\circ = 0$. Если действительное решение (2.3) существует, то такое равенство всегда может быть достигнуто с помощью линейной замены переменного t .

Введенное таким образом доопределение физически естественно. Формально же оно предполагает существование в малой окрестности Γ_- отображения T (T^-) области Π_- ($y = \lambda_0$, $y' < 0$) в себя, порождаемого соотношениями (1.2), (2.1), а также непрерывность перехода T (T^-) в тождественное преобразование при стремлении начальной точки M_k к Γ_- . Указанные особенности T (T^-) определяются характером f и в конкретных системах иногда могут быть установлены обычной проверкой. В малой окрестности M° диктуемые (2.2) свойства отображения T (T^-) следуют из доказываемой топологической тождественности фазовых структур систем (1.1) — (1.3) и (1.2), (2.1), (2.2) вблизи точки схода.

Для доказательства, воспользовавшись кратной формулой Тейлора и полагая без ограничения общности $\lambda_0 = 0$, запишем с учетом (2.3) разложение (χ — остаточный член)

$$(2.4) \quad f = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{M^\circ} t + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M^\circ} y + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{M^\circ} y' + \chi(t', y', y'')$$

$$t' \in (0, t), \quad y' \in (0, y), \quad y'' \in (0, y')$$

Считаем пока, что $(\partial f / \partial t \cdot \partial f / \partial y \cdot \partial f / \partial y')|_{M^\circ} \neq 0$. Тогда поведение траекторий (2.1) вблизи M° определяется линеаризованным уравнением безударных движений

$$(2.5) \quad y'' = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{M^\circ} t + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M^\circ} y + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{M^\circ} y'$$

Оценим нулевое решение (2.5) в окрестности M° , для чего представим $y(t)$ в виде ряда Маклорена. Отсюда и из (2.3) получаем соотношения $y(t) = O(t^3)$, $y'(t) = O(t^2)$.

Таким образом, вблизи точки схода поведение траекторий (2.1) определяется в основном неавтономным членом $(\partial f / \partial t)|_{M^\circ} t$ разложения (2.4). Остальные слагаемые, а, следовательно, и условие $(\partial f / \partial y \cdot \partial f / \partial t / \partial y')|_{M^\circ} \neq 0$ могут быть опущены. С точностью до масштаба независимого переменного полагаем $(\partial f / \partial t)|_{M^\circ} = 1$. Тогда приходим к системе п. 1, что, очевидно, и доказывает топологическую тождественность фазовых структур (1.1) — (1.3) и (1.2), (2.1), (2.2) вблизи M° .

Разбиение Π_- в целом определяется конкретной реализацией последовательности $\{\Gamma_k \equiv T^{-k}\Gamma_+\}$, где Γ_+ задается соотношениями

$$(2.6) \quad y = \lambda_0, \quad y' = 0, \quad y'' > 0$$

Ясно, однако, что в окрестности точки схода с точностью до бесконечно малых более высокого порядка последовательность $\{\Gamma_k\}$ совпадает с пучком полупарабол (1.6).

В ряде практически важных случаев $f = \varphi(t) - \omega^2 y - \nu y'$ [2-6]. Якобиан отображения T для таких моделей представляет собой выражение $J = \exp(\nu\sigma_k) [y_k' / R^2 y_{k+1}' > 0$, и, следовательно, фазовые структуры систем (1.1) — (1.3) и (1.2), (2.1), (2.2) топологически тождественны не только локально, но и всюду в Π_- .

2.2. Из проведенного исследования вытекает, что итеративный процесс (1.12), где Γ' — примыкающий к точке схода ε -участок, всегда сходится к Γ_s области Π_s системы (1.2), (2.1), (2.2). При расчетах конкретных моделей удобно пользоваться двусторонней процедурой (1.12), поскольку она позволяет на каждом шаге k определять степень близости k -й итерации к Γ_s , например, с помощью интегральной оценки δ вида

$$\delta(t) = \left| \int_t^0 [\Psi_{k+}(t) - \Psi_{k-}(t)] dt \right|$$

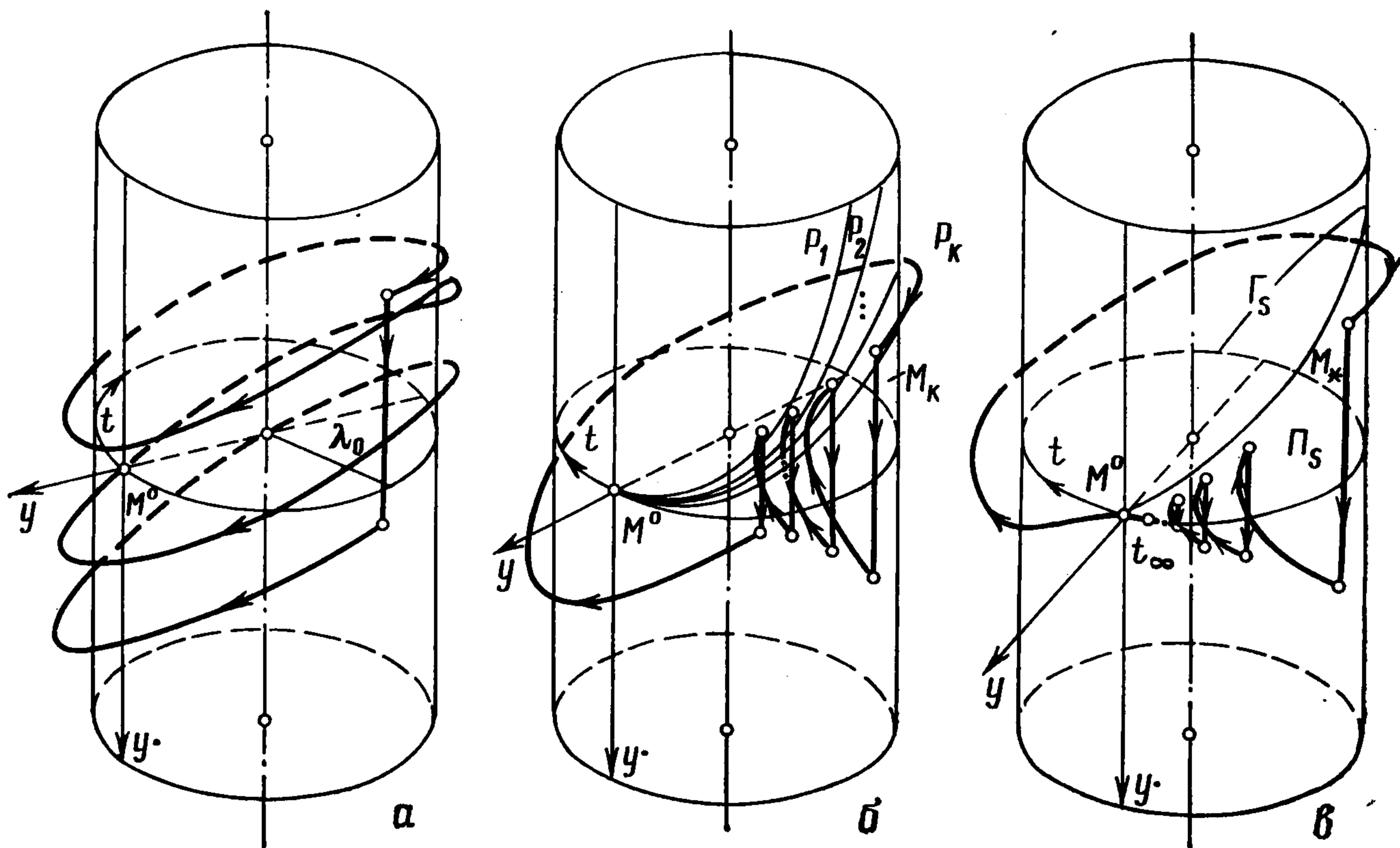
Здесь Ψ_{k+} , Ψ_{k-} — законы изменения y' на кривых внутренней $\{\Gamma_{k+}' \equiv T^{-k}\Gamma_+' \subset \Pi_s\}$ и внешней $\{\Gamma_{k-}' \equiv T^{-k}\Gamma_-' \subset \Pi_s\}$ последовательностей итераций; $\Gamma_+' \subset \Pi_s$ и $\Gamma_-' \subset \Pi_s$ — соответствующие стартовые ε -участки.

Абсолютная сходимость вычислительного процесса (1.12) принципиально отличает его от последовательных приближений к Γ_s в виде рядов по степеням некоторого малого параметра [9,10]. Такие приближения имеют смысл лишь внутри круга сходимости решающих рядов. Задача же определения радиуса этого круга чрезвычайно сложна даже в простейших системах, и, насколько известно автору, не рассматривалась ни в одной работе по динамике систем с соударениями.

2.3. Пусть функция f — 2π -периодическая по t . Этот случай представляет особый интерес, поскольку допускает существование устойчивых периодических движений. Считаем $\lambda_0 > 0$. Тогда в результате отождествления плоскостей $t = 2n\pi$ (n — целое) пространство Φ можно трактовать как область, состоящую из точек, расположенных вне и на цилиндрической поверхности Π радиуса λ_0 . Поскольку координата t при таком представлении Φ отсчитывается вдоль направляющей окружности Γ ($y = \lambda_0, y' = 0$) от некоторого фиксированного радиального направления, то непосредственно ясно, что j -кратным (j — натуральное) периодическим движениям отвечают траектории (1.2), (2.1), (2.2), охватывающие j раз Π (см. фиг. 5, а, где $j = 3$). Если в системе осуществляется k -ударное [периодическое] движение, то ему отвечает k -членный цикл неподвижных точек $M_{k-i} \equiv T^i M_k \subset P_{k-i}$ ($i = 0$ по mod k) отображения T (фиг. 5, б, $j = 1$). При переходе неподвижных точек изнутри P_{k-i} либо на Γ_{k-i} , либо на Γ_{k-i-1} происходят C -бифуркации k -ударного дви-

жения. В системе (1.2), (2.1), (2.2) реализуется периодическое движение с участком скользящего режима, если $M_* \equiv TM^\circ \in \Pi_s$ (фиг. 5, в, $j = 1$). Его период L определяется как промежуток времени между двумя последовательными прохождениями изображающей точки через M° , а кратность — как максимальное число j , обеспечивающее равенство $L = 0 \pmod{2j\pi}$. Поскольку $\dim M^\circ = 0$, то периодические движения (1.2), (2.1), (2.2), включающие участок скользящего режима, всегда устойчивы, и при внешних воздействиях, не нарушающих условий существования, время полного восстановления таких колебаний меньше L .

Бифуркации периодических движений с участком скользящего режима происходят в следующих случаях:



Фиг. 5

а) Скользящий режим развивается по Γ_s . Наборы значений параметров, отвечающие такому вырождению, образуют в D границу C_s области существования и устойчивости и определяются соотношением $M_* \in \Gamma_s$.

б) Исчезает действительное решение (2.4). В D этому случаю соответствует не зависящая от R цилиндрическая N -поверхность, уравнения которой получаются из (2.3) в результате замены неравенства условием $(\partial f / \partial t)|_{M^\circ} = 0$.

в) В некоторый момент $t_c \in (0, t_*)$ появляется касание траектории (2.1) конфигурации Π . Не зависящая от R цилиндрическая C -граница в D , на которой происходит указанное вырождение, находится из аналитических условий касания

$$y(t)|_{t_c} = 0, \quad y'(t)|_{t_c} = 0$$

г) Гиперплоскости $C_0 (R = 0)$ и $C_1 (R = 1)$ отвечают границам интервала физических значений коэффициента восстановления скорости. Причем в точках C_0 отрезок (t_*, t_∞) стягивается в точку, а на C_1 происходит вырождение плоской области Π_s в одномерное множество Γ_- .

Замечание 2.1. Система (2.3) может, вообще говоря, иметь $l \in [1, 2, \dots, \infty)$ различных решений. Каждому из них отвечает своя область скользящих режимов Π_{sq} ($q \in [1, 2, \dots, l]$). В этом случае периодические движения могут включать q участков скользящих режимов.

Замечание 2.2. Функция $f(t, \lambda_0, 0)$ в точках последовательности $\{M_m^\circ\}$ ($m \in [1, 2, \dots, \infty)$) претерпевает разрывы типа конечного скачка. Причем в точках некоторой подпоследовательности $\{M_p^\circ\} \in \{M_m^\circ\}$ имеет место неравенство $f(t_p^\circ - 0, \lambda_0, 0) < 0 < f(t_p^\circ + 0, \lambda_0, 0)$. Тогда вблизи каждой точки M_p° существует область скользящих режимов Π_{sp} . При построении границы Γ_{sp} с помощью (1.12) в качестве исходного приближения следует принимать ε -участок, примыкающий к точке схода M_p° на интервале $t \in (t_p^\circ - \varepsilon, t_p^\circ)$.

Пример. Для одномассовой ударно-колебательной системы без собственной частоты ($\omega = 0$) при наличии сил вязкого трения ($\nu > 0$) функция $\varphi(t) = \text{const} - Q$ ($Q > 0$). Интегрируя с учетом этого, а также зависимости (1.2) уравнение (2.1), для отображения T^- полуплоскости Π_- в себя находим следующую систему соотношений:

$$t_{k+1} = t_k - \sigma_k, y_{k+1} = R^{-1} \{ Q\nu^{-1} - \alpha [\nu \cos(t_k - \sigma_k) + \sin(t_k - \sigma_k)] - \\ - \exp(\nu\sigma_k) [y_k + Q\nu^{-1} - \alpha(\nu \cos t_k + \sin t_k)] \}$$

где σ_k — наименьший положительный корень уравнения

$$[\exp(\nu\sigma_k) - 1] [\alpha(\nu \cos t_k + \sin t_k) - Q\nu^{-1} - y_k] + \alpha\nu \{ \cos t_k - \\ - \cos(t_k - \sigma_k) + \nu [\sin(t_k - \sigma_k) - \sin t_k] \} + Q\sigma_k = 0, \alpha = (\nu^2 + 1)^{-1}$$

Применяя отображение T^{-k} к участку Γ_+ ($t \in (-\arccos Q, \arccos Q), 0, 0$), получаем разбиение полуплоскости Π_- . На фиг. 6 воспроизведено разбиение Π_- при $Q = 0.1$, $\nu = 0.5$ и $R = 0.2$ (сплошные линии), $R = 0.3$ (пунктир); кривым 1, 2, 3 соответствуют $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Как видно из взаимного расположения кривых, элементы последовательности $\{\Gamma_k\}$ близки к Γ_3 уже при $k > 2$. Для уточнения границы Γ_3 последняя строилась также с помощью (1.12). При этом стартовое приближение $\Gamma' \in \Pi_3$ определялось из общих достаточных условий [1, 3].

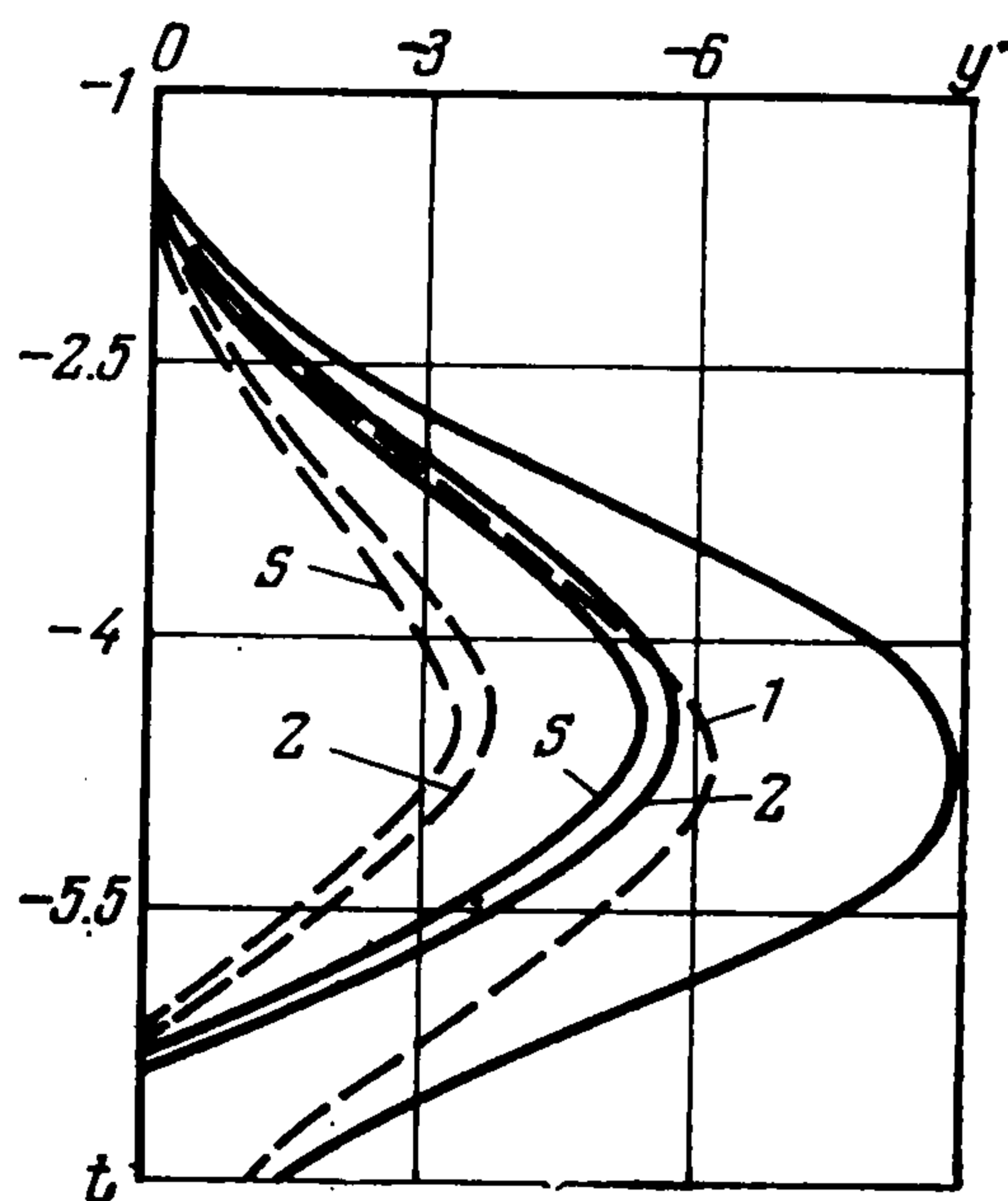
3. Система с n степенями свободы. Как естественное обобщение модели (1.2), (2.1), (2.2) рассмотрим систему с произвольным конечным числом n степеней свободы, включающую фиксированную пару соударяющихся элементов.

Безударные движения модели достаточно общего вида описываются следующими уравнениями:

$$(3.1) \quad y'' = f_0(t, y, y', x_1, \dots, x_{2(n-1)}), \quad y > \lambda_0$$

$$(3.2) \quad x_i' = f_i(t, y, y', x_1, \dots, x_{2(n-1)}) \quad (i = 1, 2, \dots, 2(n-1))$$

Соударения между взаимодействующими элементами происходят по закону (1.2). При этом скачки производных x_i' в моменты t_k однозначно определяются из (3.2) как разности между значениями f_i ($i = 1, 2, \dots, 2(n-1)$) в моменты $t_k - 0$ и $t_k + 0$.



Фиг. 6

Безразмерное относительное смещение элементов ударной пары y и обобщенные координаты $x_1, \dots, x_{2(n-1)}$ совместно с переменными t, y' образуют фазовое пространство Φ ($\dim \Phi = 2n + 1$).

Считаем, что функции $f_i \in C^2$ ($i = 0, 1, \dots, 2(n-1)$) и зависят от параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, образующих вместе с λ_0 и R пространство D ($\dim D = r + 2$).

Переходя к изучению поведения фазовых траекторий (3.1) вблизи определяемой соотношениями (2.3) $2(n-1)$ -мерной поверхности M° , заметим, что аналогично п. 2 можно показать справедливость оценок

$$y(t) = \lambda_0 + O((t - t^\circ)^3), \quad y'(t) = O((t - t^\circ)^2)$$

Следовательно, если

$$\prod_{i=0}^{2(n-1)} (\partial f_i / \partial t)|_{M^\circ} \neq 0 \quad \text{или} \quad \prod_{i=0}^{2(n-1)} (\partial f_i / \partial x_j \cdot x_i)|_{M^\circ} \neq 0$$

то в малой окрестности M° зависимостью f_i ($i = 0, 1, \dots, 2(n-1)$) от y, y' можно пренебречь и для исследования (3.1), (3.2) воспользоваться следующей разделившейся системой уравнений:

$$(3.3) \quad y'' = f_0(t, \lambda_0, 0, x_1, \dots, x_{2(n-1)}), \quad y > \lambda_0$$

$$(3.4) \quad x_i' = f_i(t, \lambda_0, 0, x_1, \dots, x_{2(n-1)}) \quad (i = 1, 2, \dots, 2(n-1))$$

Интегрируя (хотя бы численно) (3.4) с расположенными на M° начальными условиями и подставляя решение в (3.3), получим соотношение

$$y'' = f(t, \lambda_0, t^\circ, x_1^\circ, \dots, x_{2(n-1)}^\circ), \quad y > \lambda_0$$

которое можно трактовать как зависящий от «параметров» $t^\circ, x_1^\circ, \dots, x_{2(n-1)}^\circ$ закон безударных движений материальной точки в одномерном полупространстве под действием силы f . Параметры $t^\circ, x_1^\circ, \dots, x_{2(n-1)}^\circ$ очевидно, подчинены ограничению (2.3). На основании результатов п. 2 доопределяем поведение n -степенной системы в случае попадания фазовой точки на $(2n-1)$ -мерную полуповерхность Γ_- ($y = \lambda_0, y' = 0, y'' < 0$) уравнениями кинематической связи, завершающейся на (2.3) выходом фазовой траектории (3.1), (3.2) в G . Кроме того, можно утверждать, что вблизи M° поведение фазовых траекторий системы (1.2), (3.1), (3.2), а также с точностью до размерности и структура разбиения подпространства Π_- ($y = \lambda_0, y' < 0$) определяются простейшей моделью (1.1) — (1.3). Количественный характер разбиения Π_- в целом варьируется в зависимости от конкретной реализации последовательности $(2n-1)$ -мерных поверхностей $\Gamma_k \equiv T^{-k}\Gamma_+$, где Γ_+ — также $(2n-1)$ -мерная поверхность, выделяемая условием (2.6).

Все выводы п. 2 относительно итерационной процедуры построения предельной поверхности Γ_s , расположения неподвижных точек отображения T^k , а также их условий существования и бифуркаций распространяются на рассматриваемый обобщенный случай. Принципиальное отличие многомерных систем от одномерных состоит (вследствие соотношения $\dim M^\circ = 2(n-1) \neq 0$) в несовпадении, вообще говоря, областей

существования периодических движений с участком скользящего режима с областями их устойчивости.

В заключение отметим, что при практическом выделении Γ_s в целях уменьшения числа итераций, обеспечивающих заданную точность для систем размерности $n > 1$, можно брать в качестве исходного приближения ϵ -участок, выделяемый отрезками рядов [9, 10] по степеням малого параметра.

Поступила 28 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгин М. И. Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями. ПММ, 1967, т. 31 вып. 3.
2. Федосенко Ю. С., Фейгин М. И. К теории скользящего режима в динамических системах с соударениями. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
3. Фейгин М. И. Особенности динамики систем с ударными взаимодействиями, связанные с существованием скользящих движений. В сб.: Механика машин, вып. 33—34. М., «Наука», 1972.
4. Федосенко Ю. С., Фейгин М. И. Периодические движения виброударника, включающие участок скользящего режима. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
5. Кобринский А. Е., Кобринский А. А. Виброударные системы. М., «Наука», 1973.
6. Беспалова Л. В., Неймарк Ю. И., Фейгин М. И. Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний. Инж. ж. МТТ, 1966, № 1.
7. Бермант А. Ф. Огображения, криволинейные координаты. М., Физматгиз, 1958.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
9. Нагаев Р. Ф. Об аналитическом описании квазипластического удара. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
10. Нагаев Р. Ф. Общая задача о квазипластическом ударе. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
11. Баутин Н. Н., Чернягин Б. М. Теоретическое и экспериментальное исследование зависимости динамических характеристик морского хронометра от положения колодки спирали баланса. Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение, 1963. № 2.