Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЧАСТНОГО ИНТЕГРАЛА ЯКОБИ

И. А. Кейс

(Таллин)

Для некоторых неголономных и голономных механических систем получены условия существования частного интеграла, представляющего собой линейную связку гамильтониана и импульсов. Условия упрощаются для одного класса голономных систем, который содержит известный [1] случай существования частного интеграла Якоби. Примером выполнения этих условий служит вариант ограниченной задачи поступательно-вращательного движения гиростата в ньютоновском поле сил.

1. Рассмотрим механическую систему S с лагранжианом $L = T + U + N$. Линейная функция обобщенных скоростей N — потенциал Майера [2–4] некоторых электромагнитных и гироскопических сил. Систему S с вектором позиционных координат $\mathbf{y} = (x_i,\ z_r)^*$ разобьем на подсистемы S' и S'' с векторами $\mathbf{x} = (x_i)^*$, $\mathbf{z} = (z_r)^*$

$$i = 1, 2, \ldots, l;\ r = 1, 2, \ldots, p;\ 1 \leqslant l,\ 1 \leqslant p;\ \dim y = l + p = n$$

Лагранжиан системы S запишем в виде суммы

$$L = L_2' + L_1' + L_2'' + L_1'' + L^* + L_0 \tag{1.1}$$

$$L_2' = {}^1/_2 l_{ij}'(t, \mathbf{y})\, x_i^{\cdot} x_j^{\cdot}, \quad l_{ij}' = l_{ji}', \quad \| l_{ij}' \| > 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, l)$$

$$L_1' = l_j'(t, \mathbf{y})\, x_j^{\cdot},\ L_2'' = {}^1/_2 l_{rs}''(t, \mathbf{y})\, z_r^{\cdot} z_s^{\cdot},\ l_{rs}'' = l_{sr}''\ (r, s = 1, 2, \ldots, p$$

$$L_1'' = l_r(t, \mathbf{y})\, z_r^{\cdot}, \quad L^* = l_{ir}(t, \mathbf{y})\, x_i^{\cdot} z_r^{\cdot}, \quad L_0 = L_0(t, \mathbf{y}), \quad f^{\cdot} = df / dt$$

Здесь и ниже по одинаковому индексу идет суммирование, верхний индекс нуль означает результат подстановки

$$f^\circ = f^\circ(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$$

$$(\mathbf{z} = \mathbf{r}(t),\ \mathbf{z}^{\cdot} = d\mathbf{r} / dt = \mathbf{v}(t))$$

Обозначим $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ — известное движение подсистемы S'', для которого цилиндр $\mathbf{z} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{z}^{\cdot} = \mathbf{v}(t)$ — инвариантное множество движений S.

В частности, движение $\mathbf{r}_*$, $\mathbf{r}_*^{\cdot}$ подсистемы S'' обладает этим свойством, если система S имеет частные инварианты h_s' $(s, r = 1,2, \ldots p)$

$$h_s(t, \mathbf{z}) = 0, \quad \det \| \partial h_s \mid \partial z_r \| \neq 0 \quad (h_s(t, \mathbf{r}_*(t)) \equiv 0)$$

или в случае, когда движения S' не влияют на S''.

Ограничимся рассмотрением системы, удовлетворяющей вдоль движения $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ подсистемы S'' условиям

$$(\partial l_{is}^* / \partial x_j)^\circ = 0, \quad (l_{is}^* v_s)^\circ = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, l) \tag{1.2}$$

$$(\partial l_{ir}^* / \partial z_s + \partial l_{is}^* / \partial z_r)^\bullet = 0, \quad (\partial L / \partial t)^\circ = 0 \quad (r, s = 1, 2, \ldots, p)$$

Последнюю группу равенств (1.2) назовем условиями автономности. Они выполняются, например, при $\partial L \,/\, \partial t \equiv 0$. Остальные условия удовлетворяются, в частности, при $L^* \equiv 0$.

Допустим, что S подчиняется лишь линейным идеальным неголономным связям

$$a_{\alpha i}(t, \mathbf{y})\,\delta x_i + b_{\alpha s}(t, \mathbf{y})\,\delta z_s = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m \leqslant n-1)$$

Тогда вдоль $r\,(t)$, $v\,(t)$ имеем условия на виртуальные перемещения

$$a_{\alpha i}{}^\circ \delta x_i + b_{\alpha s}{}^\circ \delta z_s' = 0 \quad (a_{\alpha i}{}^\circ = a_{\alpha i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{r}),\ b_{\alpha s}{}^\circ = b_{\alpha s}(t, \mathbf{x}, \mathbf{r})) \tag{1.3}$$

Если система голономная, то $m = 0$. Предположим, что вариации

$$\delta y = \varepsilon\,(x_i{}^\bullet + u_i(t),\ v_s(t))^* \quad \Bigl(\sum_{i=1}^{l} u_i{}^2 \neq 0\Bigr) \tag{1.4}$$

удовлетворяют уравнениям (1.3) для произвольных достаточно гладких функций $u_i\,(t)$. Тогда вариации (1.4) являются виртуальными перемещениями системы S вдоль движения $r\,(t)$, $v\,(t)$ подсистемы S''. Это условие выполнено в случае

$$a_{\alpha i}{}^\circ \equiv 0,\ b_{\alpha s}{}^\circ v_s \equiv 0,\ \operatorname{rank} \| b_{\alpha s}{}^\circ \| = m \leqslant p - 1$$

Примем, что на перемещениях (1.4) непотенциальные обобщенные силы $Q_i\,(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}^\bullet)$, $Q_s'(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}^\bullet)$ не работают

$$(x_i{}^\bullet + u_i)\, Q_i{}^\circ + v_s Q_s'{}^\circ = 0 \tag{1.5}$$

Будем рассматривать лишь механические системы S, для которых перемещения (1.4) виртуальные и выполнены условия (1.2), (1.5). Назовем их механическими системами Якоби. Голономная система [1] удовлетворяет условиям (1.2), (1.5).

2. Рассмотрим линейное по гамильтониану и импульсам выражение типа инварианта Якоби [1]

$$I = (L_2' + L_2'' - L_0)^\circ + u_i(t)\,(\partial L \,/\, \partial x_i{}^\bullet)^\circ - \int_0^t h(\tau)\, d\tau \tag{2.1}$$

где $h\,(\tau)$ — произвольная достаточно гладкая функция. Определим условия, которым должна удовлетворять механическая система Якоби и функции u_i, h, чтобы I являлось инвариантом движения S вдоль траектории $\mathbf{z} = \mathbf{r}\,(t)$, $\mathbf{z}^\bullet = \mathbf{v}\,(t)$ подсистемы S''. Из общего уравнения динамики

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i{}^\bullet}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} - Q_i\right]\delta x_i + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial z_s{}^\bullet}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_s} - Q_s'\right]\delta z_s = 0$$

с учетом (1.1) — (1.5), (2.1) получаем равенство

$$dI \,/\, dt = d_{ik}(t, x)\, x_i{}^\bullet x_k{}^\bullet + d_k(t, x)\, x_k{}^\bullet + d_0(t, x) \tag{2.2}$$

$$d_{ik} = u_j\, \partial l_{ik} \,/\, \partial x_j, \quad l_{ik} = (l_{ik}')^\circ = l_{ki}, \quad \| l_{ik} \| > 0$$

$$d_k = u_j\, \partial l_k \,/\, \partial x_j + u_i{}^\bullet l_{ik}, \quad l_k = (l_k')^\circ \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, l)$$

$$d_0 = u_j\, \partial R^\circ \,/\, \partial x_j - \partial R^\circ \,/\, \partial t + u_i{}^\bullet l_i + v_s{}^\bullet (\partial K \,/\, \partial z_s)^\circ - h(t)$$

$$R = L_2'' + L_1'' + L_0, \quad R^\circ = (L_2'' + L_1'' + L_0)^\circ, \quad K = L_2'' + L_1''$$

$$(s, r = 1, 2, \ldots, p)$$

Для существования частного инварианта (2.1) движения системы S необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись уравнения

$$
\begin{aligned}
(2.3)\qquad & X_1(l_{ik}) = 0 \quad (X_1(f) = u_j\partial f / \partial x_j, \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2, \ldots, l) \\
& X_1(l_k) = -u_i^{\bullet} l_{ik} \\
& X_2(R^\circ) = h - u_i^{\bullet} l_i - v_s^{\bullet}(\partial K / \partial z_s)^\circ \quad (X_2 = X_1 - \partial / \partial t)
\end{aligned}
$$

при которых исчезает величина (2.2). С учетом (1.2) и соотношения

$$\partial f^\circ / \partial t = (\partial f / \partial t)^\circ + v_s(\partial f / \partial z_s)^\circ + v_s^{\bullet}(\partial f / \partial z_s^{\bullet})^\circ$$

запишем условия автономности (1.2) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
(2.4)\qquad & \partial l_{ik} / \partial t = v_s(\partial l_{ik}' / \partial z_s)^\circ \quad (i, k = 1, 2, \ldots, l) \\
& \partial l_k / \partial t = v_s(\partial l_k' / \partial z_s)^\circ + v_s^{\bullet}(l_{ks}{}^*)^\circ \\
& \partial R^\circ / \partial t = v_s(\partial R / \partial z_s)^\circ + v_s^{\bullet}(\partial R / \partial z_s^{\bullet})^\circ
\end{aligned}
$$

Из первых групп уравнений (2.3), (2.4) имеем систему

$$
\begin{aligned}
(2.5)\qquad & X_1(f_{ik}) = 0, \quad X_{ik}(f_{ik}) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, l) \\
& X_{ik} = \partial / \partial t + w_{ik}(t,\ \mathbf{x})\, \partial / \partial f, \quad w_{ik} = v_s(\partial l_{ik}' / \partial z_s)^\circ, \\
& f = l_{ik}
\end{aligned}
$$

где $l_{ik}(t,\ x)$ удовлетворяют равенствам $f_{ik}(t,\ \mathbf{x},\ l_{ik}) = 0$. Примем для простоты, что уравнения (2.5) составляют полную [5, 6] систему. Для этого необходимо и достаточно, чтобы каждый коммутатор $Z_{ik} = X_{ik}(X_1) - -X_1(X_{ik})$ удовлетворял равенству $Z_{ik} = \lambda X_1 + \mu X_{ik}$ ($\lambda = \lambda_{ik}(t,\ \mathbf{x},\ f)$, $\mu = \mu_{ik}(t,\ \mathbf{x},\ f)$) с произвольными функциями λ, μ. Отсюда получаем уравнения

$$
\begin{aligned}
(2.6)\qquad & u_i^{\bullet} = \lambda(t) u_i, \quad v_s\left(\frac{\partial}{\partial z_s} X_1(l_{ik}')\right)^\circ = 0 \\
& \lambda_{ik}(t, \mathbf{x}, f) \equiv \lambda(t), \quad \mu_{ik}(t, \mathbf{x}, f) \equiv 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, l;\ s = 1, 2, \ldots p)
\end{aligned}
$$

Подставляя общее решение первой группы уравнений (2.6)

$$(2.7)\qquad u_i = c_i w(t), \quad c_i = \text{const}, \quad w = \exp\left[\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right] \quad (c = (c_i)^* \neq 0)$$

во вторую, получаем условия совместности первых групп уравнений (2.3), (2.4)

$$(2.8)\qquad v_s'\left(\frac{\partial}{\partial z_s} X(l_{ik}')\right)^\circ = 0 \quad \left(X = c_j \frac{\partial}{\partial x_j};\ i, j, k = 1, 2, \ldots, l\right)$$

Для того, чтобы удовлетворялись условия совместности (2.8) и первая группа уравнений (2.3), достаточно считать $\xi_1 \doteq c_k x_k$ циклической координатой функции L_2'

$$(2.9)\qquad X(l_{ik}') = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, l)$$

Примем условия (2.9). Тогда для l_{ik}' имеем выражения

$$(2.10)\qquad l_{ik}' = m_{ik}(t,\ \xi',\ \mathbf{z}) \quad (m_{ik} = m_{ki},\ \| m_{ik} \| > 0)$$

в которых координаты вектора $\xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_l)^*$ заданы преобразованием $\xi' = Px$ вида

$$
\begin{aligned}
(2.11)\qquad & \xi_m = p_{mi}x_i, \quad p_{mi} = \mathrm{const}, \quad P = \|p_{mi}\| \quad (m = 2, 3, \ldots, l) \\
& p_{mi}c_i = 0, \quad \mathrm{ran}\, kP = l - 1
\end{aligned}
$$

В силу (2.11) функции m_{ik} $(t, P\mathrm{x}, \mathrm{z})$ удовлетворяют первой группе равенств (2.4).

С учетом (2.7), (2.10) остальные уравнения (2.3) принимают вид (2.12)

$$
\begin{aligned}
(2.12)\qquad & X(l_k) + \lambda(t)c_j m_{kj}^\circ = 0 \quad (m_{kj}^\circ = m_{kj}(t, \xi', \mathbf{r}(t)) = m_{jk}^\circ) \\
& X(R^\circ) + \lambda(t)\, c_j l_j - v_s(\partial R / \partial z_s)^\circ - H = 0 \quad (H(t) = hw^{-1}) \\
& k, j = 1, 2, \ldots, l; \; s = 1, 2, \ldots, p
\end{aligned}
$$

Аналогично предыдущему получаем условия совместности уравнений (2.12), (2.4), которые выражаются равенствами

$$
\begin{aligned}
(2.13)\qquad & v_s X(\partial l'_k / \partial z_s^{\cdot})^\circ + c_j \partial(\lambda m_{kj}^\circ) / \partial t = 0 \\
& v_s X^1 (\partial R / \partial z_s^{\cdot})^\circ + c_j \partial(\lambda l_j) / \partial t + v_s^{\cdot} R_s^1 - H^{\cdot} = 0. \\
& X^1 = c_j \partial / \partial x_j - \partial / \partial t, \quad R_s^1 = X(\partial R / \partial z_s^{\cdot})^\circ - (\partial R / \partial z_s)^\circ \\
& k, j = 1, 2, \ldots, l; \quad s = 1, 2, \ldots, p
\end{aligned}
$$

Смысл принятых обозначений выражают формулы (2.2), (2.3), (2.7), (2.10), (2.11).

Объединяя используемые предположения, получаем следующее утверждение.

Если существуют функции $\lambda^\circ(t)$, $h^\circ(t)$ и постоянные c_k° $(c^\circ \neq 0)$, при которых для механической системы Якоби выполняются равенства (2.9), (2.12), (2.13), то вдоль движения $\mathbf{r}(t) = \mathbf{z}$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{z}^{\cdot}$ система S имеет инвариант

$$
(2.14)\qquad I = (L_2' + L_2'' - L_0)^\circ + c_k^\circ w^\circ(t)(\partial L / \partial x_k^{\cdot})^\circ - \int_0^t h^\circ(\tau)\, d\tau
$$

Выражение (2.1) принимает вид (2.14) в силу равенств (2.6). Отметим, что эквивалентные условиям автономности в (1.2) равенства (2.4) выполняются по определению механической системы Якоби. Утверждение сохраняется, если заменить предположения (1.4), (1.5) на следующие. Достаточно, чтобы вариации $\delta^\circ y = \varepsilon(x_k^{\cdot} + c_k^\circ w^\circ(t), v_s(t))^*$ удовлетворяли уравнениям (1.3), а для непотенциальных обобщенных сил выполнялось равенство

$$
(x_k^{\cdot} + c_k^\circ w^\circ(t))\, Q_k^\circ + v_s(t)\, Q_s'^\circ = 0 \quad \left(w^\circ(t) = \exp \int_0^t \lambda^\circ(\tau)\, d\tau\right)
$$

3. Условия существования частного инварианта (2.14) упрощаются в случае голономной потенциальной системы S^*, удовлетворяющей следующим условиям.

Пусть функции (1.1) системы S^* удовлетворяют тождествам

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & L^* \equiv 0, \quad \partial L / \partial t \equiv 0, \quad \partial L_\alpha' / \partial z_s \equiv 0, \quad \partial L_\alpha'' / \partial x_k \equiv 0 \\
& \alpha = 1, 2; \; s = 1, 2, \ldots, p; \; k = 1, 2, \ldots, l
\end{aligned}
$$

Предположим, что движению $z = r(t)$, $z^{\cdot} = v(t)$ подсистемы $S_2{}^*$ соответствует инвариантное множество движений S^* — цилиндр $z = r(t)$, $z^{\cdot} = v(t)$. Ввиду выполнения условий (1.2) система (1.4), (1.5) S^* является механической системой Якоби.

Пусть координата $\xi_1 = c_k x_k$ циклическая для L_2', L_1'

(3.2) $$c_k \partial L_2' \,/\, \partial x_k \equiv 0, \quad c_k \partial L_1' \,/\, \partial x_k \equiv 0 \quad (c_k = \mathrm{const}, \quad \mathbf{c} \neq 0)$$

Положим $\lambda(t) \equiv 0$. В силу тождеств (3.1), (3.2) условия (2.12), (2.13) сводятся к двум равенствам

(3.3) $$X(L_0)^\circ - v_s\left(\frac{\partial R}{\partial z_s}\right)^\circ - h = 0$$

$$\left(X = c_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \; R = L_2'' + L_1'' + L_0\right)$$

$$X'\left(v_s \frac{\partial L_0}{\partial z_s}\right)^\circ - \frac{d}{dt}\left(v_s \frac{\partial K}{\partial z_s'}\right)^\circ - h^{\cdot} = 0 \;\left(X^1 = X - \frac{\partial}{\partial t}, K = L_2'' + L_1''\right)$$

Используя полученное утверждение, приходим для системы S^* к следующему выводу. Если равенства (3.2), (3.3) выполняются при $c_k = c_k{}^*$, $h(t) = h^*(t)$, то вдоль рассматриваемого движения $z = r(t)$, $z^{\cdot} = v(t)$ подсистемы $S_2{}^*$ существует инвариант

(3.4) $$I = L_2' + (L_2'' - L_0)^\circ - c_k{}^* \partial (L_2' + L_1') \,/\, \partial x_k^{\cdot} - \int_0^t h^*(\tau)\, d\tau$$

Системы вида S^* включают рассмотренную в [1]. Они обобщают последнюю в следующих отношениях. Для них силовая функция рассматривается в общем виде, и условия $L_1' \equiv 0$, $L_1'' \equiv 0$ не являются необходимыми. При этом частное движение $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ взято для $S_2{}^*$ в общей форме, а линейная по импульсам часть выражения (3.4) — не обязательно проекция [1] кинетического момента подсистемы $S_1{}^*$.

4. *Примеры.* Используя полученные результаты, определим вид и условия существования инварианта (3.4) для двух гиростатических систем, содержащихся в случае S^*.

В качестве первого примера рассмотрим гиростат S_1, который движется в поле притяжения сфероида с неподвижным центром масс o_2. Предполагается [3], что сфероид — твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси симметрии $o_2\gamma$. Орт $\boldsymbol{\gamma}$ лежит в плоскости $o_2\xi\zeta$ неподвижного триэдра $o_2\xi\eta\zeta$ и образует с ортом $\boldsymbol{\zeta}$ постоянный угол i ($\cos i = \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\gamma}$ — скалярное произведение $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$).

Гиростат S_1 образует [7,8] недеформируемая оболочка $S_1{}^0$, содержащая 2ν-мерную голономную стационарную систему $S_2{}^0$ с постоянным распределением масс в $S_1{}^0$. Положение главного центрального триэдра $o_1e_1e_2e_3$ гиростата S_1 относительно $o_2\xi\eta\zeta$ определим радиус-вектором $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^*$ центра масс S_1 с проекциями z_j на $o_2\xi\eta\zeta$ и углами Эйлера $\psi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, $\theta = \varphi_3$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^*$ $(j = 1, 2, 3)$. Проекции векторов $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{z}\,|\,\mathbf{z}\,|^{-1}$, $\boldsymbol{\zeta}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ оболочки $S_1{}^0$ на $o_1\, e_1\, e_2\, e_3$ обозначим σ_k, ζ_k, ω_k $(k = 1, 2, 3)$. Положение системы $S_2{}^0$ в $S_1{}^0$ зададим вектором $\mathbf{q} = (q_\alpha)^*$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$.

Допустим, что внутренние силы S_1 определяются потенциалом N_1 вида

(4.1) $$N_1 = m_k(\varphi_2, \varphi_3, \mathbf{q})\,\omega_k + m_\alpha'(\varphi_2, \varphi_3, \mathbf{q})\, q_\alpha^{\cdot} + N_0(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{q}, \mathbf{z})$$

а внешние для S_1 силы имеют потенциал ньютоновского притяжения $-U_1(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{z})$.

Примем обычные неравенства $l\,|\,\mathbf{z}\,|^{-1} \ll 1$, $lR_0^{-1} \ll 1$, $m_0 \ll M_0$, где m_0 — масса, l — максимальный размер S_1, M_0 — масса, R_0 — полярный радиус сфероида. Тогда с большой точностью можно считать, что вращательное движение S_1 не влияет на его поступательное, а движение S_1 не влияет на вращение сфероида. Используя это, разобьем S_1 на подсистему S_1' с вектором $\mathbf{x} = (\varphi_j, q_\alpha)^*$ и подсистему S_1'', для которой $\mathbf{z} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{z}^{\cdot} = \mathbf{v}(t)$ — известное движение центра масс S_1. Лагранжиан S_1 имеет вид ($0 < G_k$ — главные моменты инерции S_1)

$$L = {}^1/_2 G_k\omega_k^2 + k_j\omega_j + T_2 + {}^1/_2 m_0\,|\,\mathbf{z}^{\cdot}\,|^2 + N_1 + U_1 \tag{4.2}$$

$$L_2' = {}^1/_2 G_k\omega_k^2 + k_j\omega_j + T_2, \quad L_1' = m_k\omega_k + m_\alpha' q_\alpha^{\cdot}$$

$$L_2'' = {}^1/_2 m_0\,|\,\mathbf{z}^{\cdot}\,|^2, \quad L_1'' = 0, \quad L^* = 0, \quad L_0 = N_0 + U_1$$

$$k_j = g_{j\alpha}(\mathbf{q})\, q_\alpha^{\cdot}$$

$$T_2 = {}^1/_2 a_{\alpha\beta}(q)\, q_\alpha^{\cdot} q_\beta^{\cdot}, \quad \|a_{\alpha\beta}\| > 0 \quad (k, j = 1, 2, 3, \ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots \nu)$$

С учетом (4.1), (4.2) для рассматриваемого разбиения получаем тождества (3.1). Так как $\partial L_2' / \partial\psi = \partial L_1' / \partial\psi = 0$, то $\xi_1 = c_1\psi$ — циклическая координата функций L_2', L_1'. Следовательно, S_1 — подслучай системы S^*. Используя равенства (3.4), (4.2) и условия (3.3), приходим к следующему заключению.

Если существует функция $h = h_*(t)$ и постоянная $c_1 = c_1^* \neq 0$, для которых вдоль движения $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ выполняются равенства

$$\partial W / \partial t - c_1^* \partial W / \partial\psi + h_*^{\cdot}(t) = 0 \quad (W = v_j\,(\partial\,(N_0 + U_1) / \partial z_j)^\circ) \tag{4.3}$$

$$W - c_1^* \partial V / \partial\psi + h_*(t) = 0 \ (V = L_0^\circ = (N_0 + U_1)^\circ)$$

то вращательное движение гиростата S_1 имеет инвариант

$$ {}^1/_2 G_k\omega_k^2 + k_j\omega_j + T_2 + {}^1/_2 m_0\,|\,v\,|^2 + c_1^*\zeta_j\,(M_j + m_j) - L_0^\circ - \int_0^t h_*(\tau)\,d\tau \tag{4.4}$$

$$\mathbf{M} = (G_1\omega_1 + k_1,\ G_2\omega_2 + k_2,\ G_3\omega_3 + k_3)^* \qquad (k, j = 1, 2, 3)$$

Здесь применяются обозначения (4.1) — (4.3) и равенства

$$\partial L_2' / \partial\psi^{\cdot} = \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\zeta}, \quad c_m^* = 0 \quad (m = 2, 3, \ldots, \nu + 3)$$

Рассмотрим для S_1 случай S_2 — гиростат Жуковского — Вольтерра [7,8,10]. S_2 является оболочкой, несущей три ротора, оси которых закреплены вдоль o_1e_1, o_1e_2, o_1e_3. Пусть оболочка действует на роторы лишь силами давления на оси их вращения. В случае S_2 функции (4.2), (4.1) имеют вид

$$L = {}^1/_2\,(A_k\omega_k^2 + g_k^{-1}p_k^2 + m_0\,|\,\mathbf{v}\,|^2) + U_1, \ N_1 \equiv 0 \tag{4.5}$$

$$0 < g_k = \text{const}, \quad A_k = G_k - g_k > 0, \quad A = \text{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$$

$$\mathbf{p} = g\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \ \mathbf{k} = gq^{\cdot}$$

$$T_2 = {}^1/_2 g_j^{-1}k_j^2, \quad g = \text{diag}\,(g_1, g_2, g_3), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^*, \quad \mathbf{p}_k(t) = \mathbf{p}_k(t_0)$$

Используя приближенное выражение гравитационного потенциала сфероида [3] получаем при $M_0^{-1}R_0^{-2}(C_0 - A_0) \ll 1$ асимптотику U_* силовой функции U_1

$$U_* = \mu\,|z\,|^{-1}\{m_0\,[1 + {}^1/_2\,(C_0 - A_0)M_0^{-1} \times |\,\mathbf{z}\,|^{-2}(1 - 3s^2)] + \tag{4.6}$$

$$+ \,|\,\mathbf{z}\,|^{-2}(G_0 - {}^3/_2 P)\}$$

$$\mu = fM_0, \quad C_0 > A_0, \quad s = \gamma_k\sigma_k = |\,z\,|^{-1}\gamma_k z_k, \quad 2G_0 = G_1 + G_2 + G_3,$$

$$P = G_k\sigma_k^2$$

Здесь f — постоянная Гаусса, C_0, A_0 — моменты инерции сфероида относительно оси вращения $o_2\gamma$ и экваториальной оси.

Рассмотрим следующий вариант ограниченной [9,10] задачи о поступательно-вращательном движении гиростата S_2. Предположим, что центр масс S_2 движется с угловой скоростью Кеплера $\omega_0 = \mu^{1/2} r_0^{-3/2}$ по окружности постоянного радиуса $|\,\mathbf{z}\,| = r_0$ в плоскости $o_2\xi\eta$, причем вектор γ лежит в плоскости $o_2\xi\zeta$ и образует с ортом $\boldsymbol{\zeta}$ постоянный угол i. Это движение является приближенным решением

$$z_1 = r_1(t) = r_0\cos\tau, \quad z_2 = r_2(t) = r_0\sin\tau, \quad z_3 = r_3(t) = 0 \tag{4.7}$$

$$\tau = \omega_0\,(t - t_0) + u_0, \quad t_0 = \text{const}, \ u_0 = \text{const}$$

уравнений движения центра масс гиростата S_2

$$m_0 z_j^{\cdot\cdot} = \partial U_1 / \partial z_j \ (j = 1, 2, 3)$$

которое в ограниченной постановке рассматривается как точное. Последние вместе с заменой U_1 на функцию (4.6) служат исходными допущениями рассматриваемого варианта ограниченной задачи.

Положим

$$c_1^* = -\omega_0, \ h_* = {}^3/_2\omega_0^3 \, (C_0 - A_0) m_0 M_0^{-1} \sin^2 i \sin 2\tau$$

в условиях (4.3). Подставляя в них выражения (4.5) — (4.7), убеждаемся, что равенства (4.3) выполняются. Поэтому в рассматриваемом случае движения S_2 существует частный инвариант Якоби [1]

$$I = {}^1/_2 A_k \omega_k^2 - \omega_0 \zeta \cdot (A\omega + p) + {}^3/_2 \omega_0^2 G_k \sigma_k^2 \tag{4.8}$$

Выражение (4.8) получаем из (4.4) с учетом равенств (4.5) — (4.7).

Таким образом, в данном варианте движения S_2 условия существования (4.3) инварианта (4.8) выполнены. Отметим, что выражение (4.8), полученное при асимптотике (4.6) нецентрального поля тяготения, совпадает с обобщенным интегралом энергии [9,10] в случае центрального поля.

Поступила 4 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jacobi C. G.* Vorlesungen über Dynamik. Berlin, Reimer, 1884. (Рус. перев.: Лекции по динамике. Л.— М., ОНТИ, Гостехиздат, 1936).
2. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.
3. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.
4. *Leech J. W.* Classical mechanics. London, Methuen and Co LTD, 1958. (Рус. перев.: Классическая механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961).
5. *Goursat E.* Cours d' analyse mathématique, t. 11. Paris. Gauthier-Villars, 1927. (Рус. перев: Курс математического анализа, т. 11, М.— Л., ОНТИ, Гостехиздат, 1936.)
6. *Eisenhart L. P.* Continuous groups of transformations. London, Oxford Univ. Press, 1933. (Рус. перев.: Непрерывные группы преобразований. М., Изд-во иностр. лит., 1947.)
7. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des Latitudes. Acta math, 1899, vol. 22, p. 201—358.
8. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
9. *Белецкий В. В.* Некоторые вопросы поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском поле сил. В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 16. М., Изд-во АН СССР, 1963.
10. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М., ВЦ АН СССР, 1967.