Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ РЕЛЕЯ НА ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В. Ф. Журавлев

(Москва)

Известная теорема Релея о свойствах спектра линейной консервативной механической системы обобщается на гироскопические системы, т. е. на случай, когда помимо матриц кинетической и потенциальной энергии в уравнениях движения присутствует и произвольная кососимметрическая матрица гироскопических сил.

1. Линейная гироскопическая система. Будем рассматривать линейную гироскопическую систему общего вида

$$Aq^{\cdot\cdot} + \Gamma q^{\cdot} + Cq = 0, \quad q \in R^n \tag{1.1}$$

A — матрица кинетической энергии, C — матрица потенциальной энергии, A и C — симметрические матрицы $n \times n$; Γ — кососимметрическая матрица гироскопических сил той же размерности.

Свойства собственных частот этой системы в случае $\Gamma = 0$ были рассмотрены Релеем [1].

Пусть $\Gamma \neq 0$. Как и в случае Релея, кинетическую и потенциальную энергии системы полагаем положительно определенными формами соответственно скоростей и координат: $(q^{\cdot}, Aq^{\cdot}) > 0$ для $q^{\cdot} \neq 0$ и $(q, Cq) > 0$ для $q \neq 0$. Можно показать, что при любой матрице Γ характеристическое уравнение системы (1.1) имеет чисто мнимые корни, следовательно, частное решение ее может быть записано в виде

$$q = Ie^{i\lambda t} \tag{1.2}$$

Здесь λ — вещественное число, модуль которого называется собственной частотой системы и которое является одним из корней уравнения

$$\det(-A\lambda^2 + i\Gamma\lambda + C) = 0 \tag{1.3}$$

Это уравнение имеет $2n$ действительных корней, причем очевидно, что если λ_0 — корень, то $-\lambda_0$ — также корень этого уравнения. Таким образом, система имеет ровно n собственных частот.

Вектор I, соответствующий выбранному корню λ, есть нетривиальное решение линейной алгебраической системы

$$(-A\lambda^2 + i\Gamma\lambda + C)\, I = 0 \tag{1.4}$$

Комплексное решение этой системы может быть записано в виде $I = p + ir$. Разделяя в (1.4) вещественную и мнимую части, получим

(1.5)
$$(T\lambda^2 + G\lambda - V)\,x = 0, \quad x = \mathrm{col}\,\{p_1, \ldots, p_n, r_1, \ldots, r_n\} \in R^{2n}$$
$$T = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} 0 & \Gamma \\ -\Gamma & 0 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

Здесь уже все три матрицы T, G и V симметрические.

Наряду с механической системой (1.1) можно рассматривать механическую систему вдвое большей размерности, которая уже не является гироскопической и матрица потенциальной энергии которой отрицательно определена

(1.6)
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(S^\bullet, TS^\bullet)}{\partial S^\bullet} + \frac{\partial(S^\bullet, GS^\bullet)}{\partial S^\bullet} - \frac{\partial(S, VS)}{\partial S} = 0$$

Разыскивая ее решение в виде $xe^{\lambda t}$, вновь приходим к уравнениям (1.5).

Некоторые свойства решений системы (1.5) устанавливает следующая лемма.

Лемма 1. Пусть λ_0 — некоторый корень уравнения (1.3), а x_+ — решение системы (1.5), соответствующее этому корню. Тогда существует такое решение x_- системы (1.5) для $\lambda = -\lambda_0$, что имеют место следующие равенства:

1) $(x_+, Tx_+) = (x_-, Tx_-), \quad (x_+, Vx_+) = (x_-, Vx_-)$

2) $(x_+, Gx_+) + (x_-, Gx_-) = 0$

Доказательство. Покажем, что всем указанным условиям удовлетворяет вектор (E — единичная матрица)

$$x_- = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{vmatrix} x_+$$

Подставим это выражение в уравнение (1.5), в котором положим $\lambda = \lambda_0$, после чего умножим уравнение слева на матрицу E^*. В результате получим

$$(E^*TE^*\lambda_0^2 - E^*GE^*\lambda_0 - V)\,x_+ = 0, \quad E^* = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{vmatrix}$$

Нетрудно видеть, что

(1.7)
$$E^*TE^* = T, \quad E^*VE^* = V, \quad E^*GE^* = -G$$

и получаем уравнение для вектора x_+, которое им обращается в тождество. Итак, указанное выражение для x_- действительно есть решение уравнения (1.5) при $\lambda = -\lambda_0$. Проверим свойство 1).

Имеем $(x_-, Tx_-) = (E^*x_+, TE^*x_+) = (x_+, E^*TE^*x_+) = (x_+, Tx_+)$ в силу (1.7). Свойство 2) проверяется аналогично.

2. Характеристическая функция. Умножим (1.5) скалярно на x

(2.1)
$$(x, Tx)\,\lambda^2 + (x, Gx)\,\lambda - (x, Vx) = 0$$

Перенося член с $(x, Gx)\,\lambda$ в правую часть и возводя обе части уравнения в квадрат, получим

(2.2)
$$(x, Tx)^2R^2 - [2\,(x, Tx)\,(x, Vx) - (x, Gx)^2]\,R + (x, Vx)^2 = 0, \quad R = \lambda^2$$

Если $x = x_+$ — решение системы (1.5) для $\lambda = \lambda_0$, то, решая квадратное уравнение (2.2), получим выражение для квадрата этого корня: $R = \lambda_0^2$. Если же в соотношении (2.2) x — произвольный вектор, то оно определяет неявную функцию $R(x)$. Будем называть эту функцию характеристической функцией системы (1.1) или системы (1.6).

Лемма 2. Решения алгебраической системы и только они являются критическими точками функции $R(x)$.

Доказательство. Продифференцируем соотношение (2.1) по x, считая $\lambda = \lambda(x)$

$$\lambda^2 Tx + \lambda Gx - Vx + \left[(x, Tx)\lambda + \frac{1}{2}(x, Gx)\right]\frac{d\lambda}{dx} = 0 \tag{2.3}$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках в (2.3) отлично от нуля для $x \neq 0$. Пусть это не так, тогда найдется значение $x = x_0 \neq 0$, такое, что

$$\lambda(x_0) = -{}^1/_2 (x_0, Gx_0) / (x_0, Tx_0)$$

Подставляя это значение $\lambda(x_0)$ в соотношение (2.1), получим

$$(x_0, Gx_0)^2 + 4(x_0, Tx_0)(x_0, Vx_0) = 0$$

что невозможно в силу положительной определенности T и V. Следовательно, $d\lambda / dx$ обращается в нуль только для тех x, которые являются решениями системы (1.5).

С другой стороны, из (2.1) видно, что в силу положительной определенности, T, V, $\lambda(x) \neq 0$, если $x \neq 0$. Поэтому и $dR / dx = 2\lambda d\lambda / dx$ обращается в нуль там же, где и $d\lambda / dx$.

Лемма 3. Функция $R(x)$ (каждая из ее ветвей) — монотонно возрастающая функция потенциальной энергии, т. е. если имеются две механические системы с одинаковыми T и G и с V^* и V, такими, что $(x, Vx) < (x, V^*x)$ для любого x, то и $R(x) < R^*(x)$.

Доказательство. Введем обозначения $(x, Tx) = t$, $(x, Vx) = v$, $(x, Gx) = g$. Из (2.2) найдем

$$R = \frac{2tv + g^2 \pm g\sqrt{g^2 + 4tv}}{2t^2} \tag{2.4}$$

дифференцируя, получим $dR / dv > 0$ для $x \neq 0$, так как $4tv > 0$.

3. Характеристическая поверхность. Будем считать, что в R^{2n} определена метрика при помощи квадратичной формы (x, Tx)

$$\|x\| = \sqrt{(x, Tx)}$$

Рассмотрим в этом пространстве гиперповерхность П, определяемую уравнением

$$\|x\|^4 R(x) = 1 \tag{3.1}$$

Подставляя отсюда $R(x)$ в (2,2), получим для этой поверхности следующее уравнение:

$$(x, Gx)^2 - (x, Vx)^2 (x, Tx)^2 + 2(x, Tx)(x, Vx) = 1 \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) определяет замкнутую поверхность восьмого порядка. Луч, выпущенный из начала координат в любом направлении, пересекает ее в двух точках, соответствующих разным знакам в (2.4).

Лемма 4. Вектор x_0, удовлетворяющий системе (1.5) и имеющий длину $|\lambda_0|^{-1/2}$, где λ_0 — соответствующее этому вектору характеристическое число, принадлежит П.

Доказательство. Подставляя $\| x_0 \|$ в (3.1) и имея в виду, что для одной из ветвей $R(x_0) = \lambda_0^2$, получаем тождество.

Длину такого вектора будем называть главной полуосью поверхности.

Будем различать в дальнейшем две ветви поверхности П: ветвь, соответствующую верхнему знаку в (2.4), обозначим Π_+, ветвь, соответствующую нижнему знаку — Π_-. Аналогичные обозначения введем и для ветвей $R(x)$: $R_+(x)$ и $R_-(x)$.

Лемма 5. Поверхности Π_+ и Π_- имеют одну и ту же систему главных полуосей.

Доказательство. Рассматривая (2.4) и опираясь на лемму 1, получим $R_+(x_+) = R_-(x_-)$, $R_+(x_-) = R_-(x_+)$, отсюда следует, что линейно-независимая система решений (1.5), состоящая из $2n$ векторов, может быть разбита на две подсистемы

$$x_1', \ldots, x_n', \quad x_1'', \ldots, x_n'' \tag{3.3}$$

такие, что $R_+(x_i') = \lambda_i^2$ и $R_-(x_i'') = \lambda_i^2$, откуда и вытекает утверждаемый факт.

Будем считать, что для введенной в лемме 5 системы векторов (3.3) соответствующие характеристические числа расположены в порядке возрастания их модулей: $|\lambda_1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n|$. Введем обозначения для главных полуосей

$$a_i = \| x_i' \| = \| x_i'' \| = |\lambda_i|^{-1/2}$$

Очевидно

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \tag{3.4}$$

Поскольку каждая из ветвей Π_+ и Π_- обладает одной и той же системой полуосей (3.4), в дальнейшем достаточно рассмотреть только одну из них. Рассмотрим для определенности Π_+.

Покажем, что главные полуоси Π_+ обладают экстремальными свойствами. Пусть $R^{2(n-m+1)}$ — подпространство, натянутое на векторы x_m', x_m'', . . ., x_n', x_n'', норма которых меньше или равна a_m.

Лемма 6. $a_m = \max x$ для $x \in \Pi_+ \cap R^{2(n-m+1)}$.

Доказательство. Рассмотрим механическую систему (1.6), на которую наложена дополнительно связь $S \in R^{2(n-m+1)}$. Она эквивалентна механической системе с $2(n-m+1)$ числом степеней свободы, для которой формы $(S^\cdot, TS^\cdot)$, $(S^\cdot, GS^\cdot)$, (S, VS) равны ограничению соответствующих форм системы без связи на $R^{2(n-m+1)}$. Следовательно, и ограничение характеристической функции $R(x)$ на $R^{2(n-m+1)}$ будет равно характеристической функции системы со связью. У такой характеристической функции ровно $2(n-m+1)$ критических точек. С другой стороны, векторы, составившие линейную оболочку $R^{2(n-m+1)}$, очевидно, остаются критическими для ограничения характеристической функции на $R^{2(n-m+1)}$, а так как их $2(n-m+1)$, то они и только они удовлетворяют необходимым условиям экстремума функции $R(x)$ для $x \in R^{2(n-m+1)}$. При этом λ_m^2 — абсолютный минимум функции $R(x)$ на $R^{2(n-m+1)}$, откуда в силу (3.1) a_m — абсолютный максимум нормы радиус-вектора поверхности Π_+ на $R^{2(n-m+1)}$.

Рассмотрим сечение поверхности Π_+ некоторым подпространством R^{2m}. Введем обозначение $b_m = \min \| x \|$ для $x \in R^{2m} \cap \Pi_+$.

Лемма 7. Для любого R^{2m}: $b_m \leqslant a_m'$ и $\max_{R^{2m}} b_m = a_m$.

Доказательство. Пусть $R^{2(n-m+1)}$ — подпространство, фигурирующее в лемме 6. Поскольку суммарная размерность R^{2m} и $R^{2(n-m+1)}$ больше $2n$, то эти подпространства пересекаются.

Пусть $x \in R^{2m} \cap R^{2(n-m+1)} \cap \Pi_+$, тогда $\| x \| \leqslant a_m$ в силу леммы 6; с другой стороны, $\| x \| \geqslant b_m$, так как $x \in R^{2m}$, откуда $b_m \leqslant a_m$. При этом очевидно, что $\max_{R^{2m}} b_m = a_m$, так как верхняя грань достигается на подпространстве, являющемся линейной оболочкой векторов $x_1', x_1'', \ldots, x_m', x_m''$.

4. Теорема о поведении собственных частот при изменении жесткости. Пусть даны две механические системы вида (1.1), имеющие одинаковые матрицы кинетической энергии и гироскопических сил. Матрицы потенциальной энергии C и C^*. Систему будем называть более жесткой, если ее потенциальная энергия больше: $(q, C^*q) > (q, Cq)$ при любом $q \neq 0$.

Теорема. При увеличении жесткости системы (1.1), где A и C положительно определены, а Γ — произвольная кососимметрическая матрица, все собственные частоты системы могут только возрасти.

Доказательство. Из неравенства $(q, C^*q) > (q, Cq)$ следует неравенство $(x, V^*x) > (x, Vx)$, откуда в силу леммы 3 $R_+(x) < R_+^*(x)$ для всех $x \neq 0$. Это означает в силу (3.1), что Π_+^* лежит целиком внутри Π_+. Рассмотрим сечение поверхностей Π_+ и Π_+^* подпространством R^{2m}. Очевидно, $b_m \geqslant b_m^*$, следовательно, $\max b_m \geqslant \max b_m^*$, но $\max b_m = a_m$, а $\max b_m^* = a_m^*$, откуда $a_m \geqslant a_m^*$. Используя равенство $a_m = | \lambda_m |^{-1/2}$, получим $| \lambda_m | \leqslant | \lambda_m^* |$ (m произвольно).

5. Следствия. *Следствие 1*. При $\Gamma = 0$ доказанная теорема переходит в теорему Релея.

Следствие 2. Будем называть систему, обладающей большей массой, если для любого $q^\cdot \neq 0$ ее кинетическая энергия больше: $(q^\cdot, A^*q^\cdot) > (q^\cdot, Aq^\cdot)$. Имеет место следующая теорема: при увеличении массы системы все собственные частоты ее могут только уменьшиться.

Для доказательства достаточно показать аналогично лемме 3 монотонное убывание $R(x)$ при любом x с увеличением кинетической энергии.

Следствие 3. Требование положительной определенности C может быть заменено требованием неотрицательности: $(q, Cq) \geqslant 0$ при любом q.

В самом деле, утверждение теоремы верно для случая, когда некоторые из собственных чисел матрицы C сколь угодно малы. В силу непрерывной зависимости корней характеристического уравнения от его коэффициентов утверждение теоремы верно и в пределе, т. е. для случая, когда некоторое количество собственных чисел матрицы C нулевые.

Поступила 19 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стрэтт Д. В. (Лорд Релей)*. Теория звука. М., Изд-во иностр. лит., 1955, т. 1.