Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31

О ПРИМЕНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЙ ТЕОРЕМЫ ПЛОЩАДЕЙ В СИСТЕМАХ С КАЧЕНИЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А. С. Сумбатов

(Ногинск)

Среди попыток расширить условия применения общих теорем динамики видное место занимают несколько обобщений теоремы площадей, предложенных Чаплыгиным и успешно примененных им к решению ряда задач о катании шаров [1,2]. Дальнейшие обобщения теоремы площадей содержатся в работах [3,4]. Основу обобщений Чаплыгина составляет теорема об изменении момента количеств движения системы относительно неизменно направленной подвижной прямой, постоянно проходящей через некоторую движущуюся точку [1].

Ниже показано, что в классической задаче о катании твердых тел без скольжения условия теоремы полностью определяют форму поверхностей катающихся тел.

1. Приведем наиболее общую из известных формулировок теоремы об изменении момента количеств движения механической системы относительно подвижной оси. Система состоит из произвольного числа материальных точек, на нее могут быть наложены идеальные связи. Пусть некоторая прямая AL сохраняет неизменное направление в пространстве и постоянно проходит движущуюся точку A.

Теорема 1. [5,6]. Если 1) среди возможных перемещений системы имеется поворот всей системы как твердого тела вокруг оси AL, 2) выполняется условие

$$(\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_G, \mathbf{e}) = 0 \tag{1.1}$$

то производная по времени момента количеств движения системы относительно этой оси равна сумме моментов всех активных сил, действующих на точки системы, относительно той же оси

$$\frac{d}{dt} K_{AL} = M_{AL} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}_A$ — скорость точки A, $\mathbf{v}_G$ — скорость центра масс системы, $\mathbf{e}$ — орт оси AL. Точка A может и не совпадать с какой-либо определенной материальной точкой системы во все время движения. Каждый раз, желая подчеркнуть это обстоятельство, будем ее называть «геометрической точкой». Очевидно, что если условие (1.1) выполняется для одной точки оси AL, то оно выполняется и для любой другой точки этой оси.

В теореме Чаплыгина [1] вместо (1.1) требуется выполнение менее общего условия $\mathbf{v}_A = \lambda \mathbf{v}_G$ (λ — произвольная постоянная).

Проанализируем возможность удовлетворить условиям сформулированной выше теоремы в случае, когда механическая система представляет собой твердое тело, ограниченное поверхностью S_2, которое катается по неподвижной поверхности S_1, а связи выражают отсутствие скольжения в точке A контакта поверхностей S_1 и S_2. Предполагаем, что поверхности S_1 и S_2 касаются одна другую не более чем в одной точке и допускают дважды непрерывно дифференцируемую параметризацию.

Рассмотрим произвольное мгновенное положение тела. Векторы условимся задавать их координатами по отношению к системе отсчета XYZ, начало которой поместим в точку A. Ось AZ направим вдоль общей нормали поверхностей, а оси AX и AY — вдоль линий кривизны поверхности S_1 ($AXYZ$ — прямоугольная система координат). Возможные перемещения системы, очевидно, выражают поворот тела вокруг точки A, поэтому условие 1) может быть выполнено только в том, случае, если подвижная ось, о которой говорится в теореме, проходит через точку A. Пусть $\mathbf{e}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ — орт этой оси AL.

Мгновенную угловую скорость тела можно разложить в точке A на две составляющие [5,6]: угловую скорость верчения $\mathbf{\Omega}$, направленную вдоль общей нормали поверхностей, и угловую скорость чистого качения $\boldsymbol{\omega}$, расположенную в общей касательной плоскости π. Угловая скорость поворота касательной плоскости к поверхности S_i ($i = 1, 2$) в точке A имеет компоненты $-k_2^{(i)} v_2$, $k_1^{(i)} v_1$, 0, где $k_1^{(i)}$ и $k_2^{(i)}$ — кривизны нормальных сечений поверхности вдоль соответственно координатных линий AX и AY, $\mathbf{v}_A\,(v_1, v_2, 0)$ — скорость геометрической точки A. Следовательно, рассматривая чистое качение тела как сложное движение (качение плоскости π по неподвижной поверхности S_1 и качение поверхности S_2 по плоскости π), получим

$$\boldsymbol{\omega}\,[-(k_2^{(1)} + k_2^{(2)}) v_2,\ (k_1^{(1)} + k_1^{(2)}) v_1,\ 0]$$

Пусть при качении поверхности S_2 по поверхности S_1 точка их прикосновения прочерчивает на этих поверхностях некоторые кривые линии L_1 и L_2. Обозначим через k_{g1} и k_{g2} геодезические кривизны этих линий в точке A. Тогда, очевидно

$$\mathbf{\Omega}\,[0,\ 0,\ (k_{g2} - k_{g1})\,|\mathbf{v}_A|], \quad |\mathbf{v}_A| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Теперь нетрудно определить компоненты скорости центра масс тела

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_G\,[&z\,(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}) v_1 - y\,(k_{g2} - k_{g1})\,|\mathbf{v}_A|\\ &z\,(k_2^{(1)} + k_2^{(2)}) v_2 + x\,(k_{g2} - k_{g1})\,|\mathbf{v}_A|,\\ &-y\,(k_2^{(1)} + k_2^{(2)}) v_2 - x\,(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}) v_1]\end{aligned}$$

где x, y, z — координаты центра масс.

Условие (1.1) запишется в виде

$$\begin{aligned}(1.3)\qquad &-\alpha v_2\,[y\,(k_2^{(1)} + k_2^{(2)}) v_2 + x\,(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}) v_1] + \beta v_1\,[y\,(k_2^{(1)} + k_2^{(2)}) v_2 +\\ &+ x\,(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}) v_1] + \gamma\,[z v_1 v_2\,(k_2^{(1)} - k_1^{(1)} + k_2^{(2)} - k_2^{(2)}) +\\ &+ |\mathbf{v}_A|\,(k_{g2} - k_{g1})\,(x v_1 + y v_2)] = 0\end{aligned}$$

Заметим, что существование подвижной оси AL может зависеть от положения и скорости тела в начальный момент времени. Но тогда интеграл площадей

$$K_{AL} = \text{const} \tag{1.4}$$

вытекающий из (1.2) при $M_{AL} = 0$, очевидно, будет частным интегралом уравнений движения тела. Этот особенный случай здесь не рассматривается.

Таким образом, соотношение (1.3) должно выполняться тождественно относительно независимых величин v_1, v_2, $k_{g2} - k_{g1}$, которые при всевозможных кинематических допустимых движениях тела могут принимать произвольные значения. Следовательно, необходимо

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \gamma\,(k_2^{(1)} - k_1^{(1)} + k_2^{(2)} - k_1^{(2)}) = 0 \tag{1.5}$$

Так как тело может касаться фиксированной точки A неподвижной поверхности S_1 любой точкой своей поверхности (понятно, как следует изменить дальнейшие формулировки, когда касание возможно точками только части поверхности тела), то соотношение $x = y = 0$ показывает, что нормали поверхности S_2 все пересекаются в одной точке — в центре масс G тела. Принимая центр G за начало координат, запишем условие коллинеарности нормали и радиус-вектора $\mathbf{r}$ $[x\,(u,\,v),\ y\,(u,\,v),\ z\,(u,\,v)]$ поверхности S_2 (u, v — гауссовы координаты поверхности)

$$\frac{y_u'z_v' - z_u'y_v'}{x} = \frac{z_u'x_v' - x_u'z_v'}{y} = \frac{x_u'y_v' - y_u'x_v'}{z} \tag{1.6}$$

Отсюда получим

$$(\mathbf{r}^2)_u' = (\mathbf{r}^2)_v' = 0$$

т. е. $|\,\mathbf{r}\,| = \text{const}$. Таким образом, S_2 — сфера с центром в точке G.

Выясним, какую форму может иметь неподвижная поверхность S_1. Возможны два случая.

Первый случай. В точке A поверхности S_1

$$\gamma \neq 0$$

Тогда из (1.5) следует, что главные кривизны $k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$, т. е. точка A поверхности S_1 — омбилическая. В силу непрерывности вектора нормали и постоянства направления оси AL, на поверхности S_1 найдется некоторая окрестность точки A, в каждой точке которой $\gamma \neq 0$, т. е. по доказанному выше все точки этой окрестности омбилические. Следовательно, они принадлежат сферической поверхности [7].

Второй случай. В точке A поверхности S_1

$$\gamma = 0$$

а) Если $\gamma = 0$ во всех точках некоторой окрестности точки A на поверхности S_1, то, очевидно, эта окрестность представляет часть цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси AL.

б) Если в любой достаточно малой окрестности точки A на поверхности S_1 есть точки, в которых $\gamma \neq 0$, то по доказанному они омбилические. По непрерывности второй квадратичной формы поверхности S_1 значения главных кривизн совпадают и в точке A. На поверхности найдется некоторая окрестность точки A, все точки которой омбилические. В противном случае, согласно а), любая сколь угодно малая окрестность точки A на поверхности S_1 должна содержать прямолинейный отрезок образующей. Это, однако, противоречило бы знакоопределенности второй квадратичной формы в омбилической точке A. Следовательно, некоторая окрестность точки A на поверхности S_1 является сферической.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1а. При качении твердого тела по неподвижной поверхности без скольжения условия теоремы 1 выполняются только тогда, когда тело представляет собой шар с центрально-симметричным распределением массы, а неподвижная поверхность либо сферическая (в частности плоская), либо произвольная цилиндрическая (в последнем случае направления подвижной оси AL и образующей цилиндра должны совпадать).

2. Три интеграла вида (1.4) позволили свести к квадратурам сложную задачу о катании симметричного неоднородного шара по шероховатой горизонтальной плоскости [2]. С. А. Чаплыгин указал еще на некоторые условия существования интегралов движения.

Теорема 2 [1]. Допустим, что механическую систему, состоящую из произвольного числа материальных точек, можно разбить на две отдельные части (подсистемы): I и II с движущимися поступательно параллельными осями BL и CL'.

1). Пусть связи и ось BL подсистемы I удовлетворяют условиям теоремы 1 и, кроме того, момент внешних сил, действующих на точки этой подсистемы (не считая взаимных реакций подсистем I и II), взятый относительно оси BL, равен нулю.

2). Пусть то же имеет место по отношению к подсистеме II и оси CL'.

3). Обращаясь к силам реакций подсистем I и II, предположим, что суммы M и M' моментов сил действия подсистемы I на подсистему II, взятые относительно осей BL и CL', находятся в неизменном отношении (μ — произвольная постоянная)

$$M : M' = \mu \tag{2.1}$$

Тогда уравнения движения системы допускают первый интеграл

$$K + \mu K' = \text{const} \tag{2.2}$$

где K и K' — суммы моментов количеств движения относительно осей BL и CL' соответственно для первой и второй подсистем.

Выясним возможность применения этой теоремы к следующей задаче: по неподвижной поверхности S_1 катается без скольжения тело (подсистема I, по поверхности S_2 которого также без скольжения катается другое тело, ограниченное поверхностью S_3 (подсистема II). Для краткости будем называть эту систему составной системой с качением.

Рассмотрим произвольное мгновенное положение тел. Согласно п. 1, условие 1) теоремы может выполняться только в случае, если ось BL проходит через точку соприкосновения поверхностей S_2 и S_1. Обозначим эту точку буквой B, а точку касания поверхностей S_3 и S_2 — буквой A. Выберем неподвижную прямоугольную систему координат XYZ с началом в точке A, ось AZ направим по нормали к поверхностям S_2 и S_3. Очевидно, не нарушая общности, можно считать, что оси BL и CL' пересекают координатную плоскость AXY соответственно в точках с координатами $(x_1, y_1, 0)$ и $(x_2, y_2, 0)$.

Условие (2.1) запишем в виде

$$\alpha R_z(\mu y_2 - y_1) - \beta R_z(\mu x_2 - x_1) + \gamma [R_y(\mu x_2 - x_1) - R_x(\mu y_2 - y_1)] = 0 \tag{2.3}$$

где α, β, γ — направляющие косинусы параллельных осей BL и CL'; R_x, R_y, R_z — компоненты реакции, оказываемой телом I на тело II в точке A, причем $R_z(R_x^2 + R_y^2) \neq 0$.

Вектор с компонентами $(R_x, R_y, 0)$, как известно, представляет силу трения и всегда направлен вдоль вектора относительной (по отношению к поверхности S_2) мгновенной скорости геометрической точки A. Но относительная скорость геометрической точки A может иметь произвольное направление в плоскости AXY. Поэтому для выполнения условия (2.3) необходимо, чтобы $\mu x_2 - x_1 = 0$, $\mu y_2 - y_1 = 0$, т. е. точка A и подвижные оси BL, CL' должны постоянно находиться в одной плоскости.

Обозначив точку пересечения прямой AB с осью CL' буквой C, находим

$$AB = \mu AC, \quad BC = BA\frac{\mu - 1}{\mu}$$

(При $\mu = 1$ и $\mu = 0$ условия теоремы 2, очевидно, не выполняются.) Так как второе условие теоремы 2 должно выполняться при любых кинематически допустимых значениях скоростей тел, рассмотрим случай, когда мгновенная скорость тела I равна нулю, а скорость тела II имеет произвольное допустимое значение. В этом случае мгновенные скорости геометрических точек A и C связаны соотношением

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A\frac{\mu - 1}{\mu}$$

Поэтому условие (1.1) для подсистемы II принимает такой же вид, как и в п.1. Следовательно, по теореме 1а поверхность S_3 может быть только сферической, причем центр масс тела II совпадает с геометрическим центром сферы. Поверхность S_2 может быть сферической или цилиндрической, но, согласно условию 1) и теореме 1а, в некоторой окрестности точки B поверхность S_2 сферическая. Если предположить существование непрерывной второй квадратичной формы во всех точках поверхности S_2, то, очевидно, эта поверхность может быть только сферической. Центр масс тела I должен находиться в центре сферы S_2.

Итак, доказана

Теорема 2а. В составной системе с качением без скольжения условия теоремы 2 выполняются только в случае, когда каждое тело представляет собой симметричный шар, а неподвижная поверхность сферическая или цилиндрическая.

Замечание. Теорема 2 допускает некоторые обобщения [1]. Одно из них относится к случаю, когда движущаяся система состоит из n частей, реагирующих одна на другую и расположенных подобно звеньям цепи со свободными концами. Например, по неподвижной поверхности катается полое тело, внутри него катается еще одно полое тело, внутри этого последнего еще одно и т. д. Другое обобщение теоремы 2 относится к случаю, когда n частей механической системы взаимодействуют несколько иначе: некоторые $n - 1$ частей (спутников системы) реагируют на одну ее часть (ядро системы). Примером такой системы может служить полое тело (ядро) с набором непересекающихся поверхностей внутри него, вдоль каждой из которых катается по одному телу (спутники системы).

Рассматривая указанные примеры в качестве составных систем с качением можно убедиться, что при отсутствии скольжения между соприкасающимися поверхностями утверждение теоремы 2а остается в силе и для этих обобщений Чаплыгина.

3. Интеграл (2.2) характеризует передачу момента из одной части системы в другую. При определенных условиях может происходить обмен между моментом количеств движения одной части системы и количеством движения другой ее части.

Рассмотрим движущуюся поступательно систему координат XYZ с началом в точке B и прямую CZ', параллельную BZ, причем след C этой прямой на плоскости BXY имеет неизменное расположение.

Теорема 3 [1].

1) Допустим, что одна часть (подсистема) механической системы I и ось BZ удовлетворяют требованиям теоремы 1, и, кроме того, момент внешних сил, действующих на точки подсистемы (не считая взаимных реакций подсистем I и II), взятый относительно оси BZ, равен нулю.

2) Пусть связи, наложенные на подсистему II, таковы, что допускают поступательные перемещения без изменения конфигурации в любом перпендикулярном к оси BZ направлении, а внешние силы удовлетворяют тому же ограничению, что и для подсистемы I.

В этом условии, как и в предыдущем, возможные перемещения одной подсистемы рассматриваются в предположении освобождения от другой подсистемы с заменой последней силами ее воздействия на первую.

3) Требуется еще, чтобы момент сил реакции на подсистему I со стороны подсистемы II, взятый относительно оси CZ', был равен нулю.

Тогда уравнения движения системы допускают первый интеграл

$$K_{BZ} + (\mathbf{r} \times \mathbf{Q})_{BZ} = \text{const}$$

где K_{BZ} — момент количеств движения подсистемы I, взятый относительно оси BZ, $\mathbf{Q}$ — количество движения подсистемы II, $\mathbf{r}$ — вектор BC.

Замечание. Относительно связей, наложенных на подсистему II, достаточно потребовать, чтобы существовали возможные перемещения подсистемы как твердого тела в направлении, перпендикулярном плоскости CBZ [3]. Для составных систем с качением это послабление, однако, не играет никакой роли, так как тело II после замены связей с телом I силой реакции становится свободным.

Справедлива

Теорема 3а. В любой составной системе с качением без скольжения условия теоремы 3 не выполняются.

Доказательство. Примем обозначения, введенные в п. 2. Согласно условию 1) и теореме 1а, поверхность S_2 должна быть сферической. При наличии трения в точке A соприкосновения поверхностей S_2 и S_3 условие 3) теоремы, очевидно, может выполняться только в том случае, если ось CZ' постоянно проходит через точку A. Следовательно, проекции скоростей геометрических точек B и A на плоскость BXY, по условию, должны быть равны, что, вообще говоря, не имеет места. Теорема 3а доказана.

В заключение подчеркнем, что утверждения теорем 1а, 2а и 3а справедливы, когда относительные скорости тел в точках их соприкосновения равны нулю, и теряют силу в противном случае. Например, при соответствующем выборе подвижных осей условия теоремы 3 выполняются в задаче о качении тела произвольной формы по абсолютно гладкой поверхности подвижного шара [1].

Поступила 16 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров. Матем. сб., 1897, т. 20, вып. 1.
2. *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости. Матем. сб., 1903, т. 24, вып. 1.
3. *Богоявленский А. А.* Об одном виде обобщенного интеграла площадей. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
4. *Богоявленский А. А.* Теоремы взаимодействия частей механической системы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
5. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.— Л., Гостехиздат, 1944.
6. *Неймарк Ю. И.*, *Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
7. *Гурса Э.* Курс математического анализа, т. 1, ч. 2. М.— Л., Гостехиздат, 1933.