

НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СРЕДАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

А. Л. Ни, О. С. Рыжов

(Москва)

Рассматриваются нелинейные волновые движения в химически активных газовых смесях, изменение состава которых определяется протеканием произвольного количества реакций. На уравнения состояния смеси налагаются условия, обеспечивающие близость замороженной и равновесной скоростей звука. Производится асимптотический анализ исходной системы уравнений Эйлера с присоединенными к ним уравнениями химических реакций. В результате получена приближенная система уравнений для скорости частиц смеси и вектора полноты реакций, порядок которой равен увеличенному на единицу количеству релаксационных процессов.

1. Термодинамика системы. Будем считать, что в потоке химически активной газовой смеси происходит N реакций. Изменение состава смеси характеризуется вектором $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$, который называется полнотой реакций. Концентрации всех компонентов находятся в зависимости от величины этого вектора. Обозначим через t время, r — расстояние от плоскости, оси или центра симметрии, v — скорость частиц, ρ — плотность, p — давление, $\mathbf{q}^* = (q_1^*, \dots, q_N^*)$ и $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ — векторы задающие скорость и сродство химических реакций. Уравнения движения смеси возьмем в виде [1, 2]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{r} &= 0, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \boldsymbol{\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial r} \right) + T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial r} &= \mathbf{q}^* \end{aligned}$$

Параметр $\nu = 1, 2, 3$ для течений, обладающих плоскостью, осью и центром симметрии соответственно.

Чтобы замкнуть приведенную систему, к ней необходимо присоединить еще $N + 2$ уравнения, связывающие термодинамические функции \mathbf{q} , $\boldsymbol{\omega}$, ρ , p , s и T . Согласно соотношению Гиббса, приращение удельной внутренней энергии e будет

$$de = \boldsymbol{\omega} d\mathbf{q} - p dV + T ds, \quad V = 1 / \rho$$

Первые частные производные

$$\omega_i = \left(\frac{\partial e}{\partial q_i} \right)_{q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_N, V, s} = \left(\frac{\partial e}{\partial q_i} \right)_{q_j, V, s}$$

$$-p = \left(\frac{\partial e}{\partial V} \right)_{q_1, \dots, q_N, s} = \left(\frac{\partial e}{\partial V} \right)_{q_j, s}$$

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_{q_1, \dots, q_N, s} = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_{q_j, V}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

выраженные через q , V и s , представляют собой уравнения состояния среды. Они служат $N + 2$ недостающими соотношениями между термодинамическими величинами.

Как известно [1, 2], в состоянии равновесия вектор $\omega = 0$. Вместе с ним при равновесии в нуль обращается также вектор q^* скорости химических реакций. Выберем ω , V и s в качестве независимых термодинамических переменных. Если допустить аналитическую зависимость вектора q^* от ω , то вблизи равновесного состояния

$$(1.2) \quad q^* = -H(V, s)\omega + \dots$$

В силу принципа взаимности Онзагера, матрица $H = \|h_{il}\|$ симметрична. Согласно второму закону термодинамики, в необратимых процессах энтропия системы может только увеличиваться. Отсюда заключаем, что матрица H должна быть, кроме того, положительно определенной.

Будем рассматривать давление p как функцию плотности ρ , энтропии s и таких N величин из последовательности $q_1, \dots, q_N, \omega_1, \dots, \omega_N$, среди которых нет сопряженных. Очевидно, для подобного выбора независимых переменных существует 2^N различных способов. Введем в рассмотрение M -кратно замороженную и $(N - M)$ -кратно равновесную скорость звука

$$(1.3) \quad a_{fe}^{(M)} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} \right]^{1/2}$$

Здесь и в дальнейшем верхний индекс в обозначениях термодинамических производных указывает, что к независимым переменным отнесены M составляющих вектора q полноты реакций и $N - M$ составляющих вектора ω , задающего химическое сродство. В соответствии со сказанным, $j = 1, \dots, M$; $k = M + 1, \dots, N$. Для простоты будем писать

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_m} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(N)} = \left(\frac{\partial}{\partial q_m} \right)_{q_j, \rho, s}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \omega_n} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(0)} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega_n} \right)_{\omega_k, \rho, s}$$

когда наряду с плотностью и энтропией за независимые термодинамические переменные приняты все составляющие одного из векторов q либо ω . Полностью замороженная a_f и полностью равновесная a_e скорости звука задаются равенствами

$$a_f = a_{fe}^{(N)} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{q_j, s} \right]^{1/2}, \quad a_e = a_{fe}^{(0)} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\omega_k, s} \right]^{1/2}$$

Продифференцировав по ρ тождество

$$(1.4) \quad p(q_1, \dots, q_M, \omega_{M+1}, \dots, \omega_N; \rho, s) = p[q_1, \dots, q_M, q_{M+1}(q_1, \dots, q_M, \omega_{M+1}, \dots, \omega_N, \rho, s), \dots, q_N(q_1, \dots, q_M, \omega_{M+1}, \dots, \omega_N, \rho, s); \rho, s]$$

имеем

$$(a_{fe}^{(M)})^2 = a_f^2 + \sum_{n=M+1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial q_n} \right)_{q_j, \rho, s} \left(\frac{\partial q_n}{\partial \rho} \right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)}$$

С целью придать последнему соотношению симметричный вид положим

$$\psi_M = e - \sum_{n=M+1}^N \omega_n q_n$$

Для приращения функции ψ_M имеет место равенство

$$d\psi_M = \sum_{m=1}^M \omega_m dq_m - \sum_{n=M+1}^N q_n d\omega_n - p dV + T ds$$

Отсюда следует, что производная

$$\left(\frac{\partial q_n}{\partial \rho} \right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} = - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial q_n}{\partial V} \right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} = - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \omega_n} \right)_{q_j, \omega_k, V, s}^{(M)}$$

В результате дифференцирования тождества (1.4) по ω_n находим

$$(1.5) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \omega_n} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} = \sum_{l=M+1}^N \left(\frac{\partial p}{\partial q_l} \right)_{q_j, \rho, s} \left(\frac{\partial q_l}{\partial \omega_n} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)}$$

Собирая вместе полученные формулы, выводим искомое соотношение

$$(1.6) \quad a_f^2 - (a_{fe}^{(M)})^2 = \frac{1}{\rho^2} \sum_{l, n=M+1}^N \left(\frac{\partial q_l}{\partial \omega_n} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \left(\frac{\partial p}{\partial q_l} \right)_{q_j, \rho, s} \left(\frac{\partial p}{\partial q_n} \right)_{q_j, \rho, s}$$

Учитывая способ, при помощи которого была введена функция ψ_M , можно убедиться, что матрица $\| (\partial q_l / \partial \omega_n)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \|$ симметрична. Действительно

$$\left(\frac{\partial q_l}{\partial \omega_n} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} = - \left(\frac{\partial^2 \psi_M}{\partial \omega_n \partial \omega_l} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} = \left(\frac{\partial q_n}{\partial \omega_l} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)}$$

Как частный случай, при $M = 0$ из формулы (1.6) получается выражение

$$(1.7) \quad a_f^2 - a_e^2 = \frac{1}{\rho^2} \sum_{l, n=1}^N \left(\frac{\partial q_l}{\partial \omega_n} \right)_{\omega_k, \rho, s} \left(\frac{\partial p}{\partial q_l} \right)_{q_j, \rho, s} \left(\frac{\partial p}{\partial q_n} \right)_{q_j, \rho, s}$$

для разности квадратов замороженной и равновесной скоростей звука.

Элементы матрицы $\| (\partial q_l / \partial \omega_n)_{\omega_k, \rho, s} \|$ определяются через элементы матрицы $\| (\partial \omega_l / \partial q_n)_{q_j, \rho, s} \|$, где индексы $l, n = 1, \dots, N$. Вторую из этих двух матриц удобно рассматривать в качестве прямой, тогда первая будет обратной. Поскольку

$$\left(\frac{\partial \omega_l}{\partial q_n} \right)_{q_j, \rho, s} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial q_n \partial q_l} \right)_{q_j, \rho, s} = \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial q_l} \right)_{q_j, \rho, s}$$

прямая матрица $\| (\partial \omega_l / \partial q_n)_{q_j, \rho, s} \|$ симметрична. Кроме того, из условия термодинамической устойчивости системы следует ее положительная опре-

деленность [1, 2]. Симметричность обратной матрицы $\|(\partial q_l / \partial \omega_n)_{\omega_k, \rho, s}\|$ непосредственно вытекает из приведенных выше рассуждений, если положить в них $M = 0$. Отсюда заключаем, что эта матрица является также положительно определенной.

Если обратиться к правой части соотношения (1.7), то отмеченные свойства матриц позволяют утверждать, что

$$(1.8) \quad a_f^2 - a_e^2 \geq 0$$

Равенство в формуле (1.8) достигается при условии, что все производные $(\partial p / \partial \omega_n)_{q_j, \rho, s} = 0$, $n = 1, \dots, N$. Так как

$$\left(\frac{\partial \omega_n}{\partial \rho}\right)_{q_j, s} = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial V}\right)_{q_j, s} = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial q_n}\right)_{q_j, \rho, s}$$

это означает, что либо давление зависит только от плотности и удельной энтропии, либо (эквивалентно) вектор ω , задающий химическое средство, является функцией лишь вектора полноты реакций и удельной энтропии, но сохраняет постоянную величину при изменении плотности.

2. Уравнение энергии. Преобразуем третье из уравнений системы (1.1), следующее из закона сохранения энергии. Запишем приращение удельной энтропии через приращения давления, плотности, M составляющих вектора полноты реакций и $N - M$ составляющих вектора, задающего химическое средство

$$(2.1) \quad ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{q_j, \omega_k, \rho}^{(M)} \left[dp - (a_{fe}^{(M)})^2 d\rho - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial p}{\partial q_m}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} dq_m - \sum_{n=M+1}^N \left(\frac{\partial p}{\partial \omega_n}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} d\omega_n \right]$$

На основании равенства (2.1) находим сразу

$$(2.2) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} - (a_{fe}^{(M)})^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r}\right) = L_{fe}^{(M)} = \\ = -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{q_j, \omega_k, \rho}^{(M)} \sum_{i=1}^N \omega_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + v \frac{\partial q_i}{\partial r}\right) + \\ + \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial p}{\partial q_m}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \left(\frac{\partial q_m}{\partial t} + v \frac{\partial q_m}{\partial r}\right) + \\ + \sum_{n=M+1}^N \left(\frac{\partial p}{\partial \omega_n}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial t} + v \frac{\partial \omega_n}{\partial r}\right)$$

а комбинирование полученного соотношения с уравнениями неразрывности и сохранения импульса дает

$$(2.3) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + (v + a_{fe}^{(M)}) \frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_{fe}^{(M)} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v + a_{fe}^{(M)}) \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v-1}{r} v a_{fe}^{(M)} \right] = L_{fe}^{(M)}$$

Если к независимым термодинамическим переменным отнести все компоненты вектора полноты реакций, то

$$(2.4) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + (v + a_f) \frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_f \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v + a_f) \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v-1}{r} v a_f \right] = L_f = \\ = \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial p}{\partial q_i} \right)_{q_j, \rho, s} - \frac{\omega_i}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{q_j, \rho} \right] \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + v \frac{\partial q_i}{\partial r} \right)$$

Уравнения (2.3) и (2.4) являются двумя различными видами записи, выражающими следствия из закона сохранения энергии. По своей форме они аналогичны соотношению, часто используемому в теории течений инертных газов [3], и переходят в него при

$$\omega_i = (\partial p / \partial q_m)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} = (\partial p / \partial \omega_n)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} = 0$$

В этом случае операторы $L_{fe}^{(M)}$ и L_f в правых частях тождественно обращаются в нуль; кроме того, M -кратно замороженные и $(N - M)$ -кратно равновесные скорости звука совпадают одна с другой при любом $M = 0, 1, \dots, N$ и равны единственной скорости $a = (\partial p / \partial \rho)_s^{1/2}$ распространения малых возмущений.

3. Скорости звука. Предположим, что хотя величины всех M -кратно замороженных и $(N - M)$ -кратно равновесных скоростей звука в реагирующей смеси различаются между собой, это различие мало. Пусть состояние покоя, по которому распространяется волна малой амплитуды, представляет собой состояние полного термодинамического равновесия. Параметры газа в невозмущенном состоянии пометим нулевым индексом. Положим

$$(3.1) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial q_{i0}} \right)_{q_j, \rho, s} = - \left(\frac{\partial^2 e}{\partial q_{i0} \partial V_0} \right)_{q_j, s} = - \varepsilon_a \frac{p_0}{q_{i0}} e'_{iV_0}, \quad i = 1, \dots, N$$

Здесь ε_a — малый положительный параметр, e'_{iV_0} — безразмерные величины порядка единицы. Основанная на указанном предположении нелинейная теория возмущений для сред, в которых протекает единственная химическая реакция, была развита в работах [4-7]. Как видно из формулы (1.6), разность

$$a_{f0}^2 - (a_{fe0}^{(M)})^2 \sim (N - M)^2 \varepsilon_a^2$$

При конечном количестве независимых релаксационных процессов она имеет порядок ε_a^2 . Таким образом, если на уравнения состояния смеси наложить ограничения (3.1), то будет обеспечена близость всех невозмущенных скоростей звука между собой.

Выясним, как изменяются величины этих скоростей при изменении плотности и векторов полноты реакций и химического сродства. Из определения (1.3) следует

$$(3.2) \quad \left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial q_m} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} = \frac{1}{2a_{fe}^{(M)}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial p}{\partial q_m} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)}, \quad m = 1, \dots, M$$

Дифференцирование тождества (1.4) по q_m дает

$$(3.3) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial q_m}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} = \left(\frac{\partial p}{\partial q_m}\right)_{q_j, \rho, s} + \sum_{l=M+1}^N \left(\frac{\partial q_l}{\partial q_m}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \left(\frac{\partial p}{\partial q_l}\right)_{q_j, \rho, s}$$

Если применить формулы (3.2) и (3.3) к равновесному состоянию смеси и подставить в них величины $(\partial p / \partial q_l)_{q_j, \rho, s}$ в соответствии с равенствами (3.1), то можно прийти к оценке

$$(3.4) \quad \left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial q_{m0}}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \sim \varepsilon_a, \quad m = 1, \dots, M$$

Возвращаясь к определению (1.3), имеем далее

$$(3.5) \quad \left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial \omega_n}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s} = \frac{1}{2a_{fe}^{(M)}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \omega_n}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)}, \quad n = M+1, \dots, N$$

Фигурирующие здесь производные $(\partial p / \partial \omega_n)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)}$ задаются при помощи равенств (1.5). Записав их вместе с соотношениями (3.5) для покоящейся смеси, видим, что

$$(3.6) \quad \left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial \omega_{n0}}\right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \sim \varepsilon_a, \quad n = M+1, \dots, N$$

Иными словами, при изменении векторов полноты реакций и химического сродства все M -кратно замороженные и $(N - M)$ -кратно равновесные скорости звука меняются слабо.

Наконец, согласно определению (1.3), находим

$$\left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial \rho}\right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} = \frac{a_{fe}^{(M)}}{\rho} (m_{fe}^{(M)} - 1), \quad m_{fe}^{(M)} = \frac{1}{2\rho^3 (a_{fe}^{(M)})^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)}$$

Как известно [3], вторая частная производная от давления по удельному объему определяет устойчивость течений инертных газов. В рассматриваемом случае

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} &= \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{q_j, s} + Q_1 + Q_2 \\ Q_1 &= \sum_{l=M+1}^N \left(\frac{\partial q_l}{\partial V}\right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} \left[2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V \partial q_l}\right)_{q_j, s} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=M+1}^N \left(\frac{\partial q_n}{\partial V}\right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial q_l \partial q_n}\right)_{q_j, v, s} \right] \\ Q_2 &= \sum_{l=M+1}^N \left(\frac{\partial p}{\partial q_l}\right)_{q_j, v, s} \left[\left(\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial q_l}{\partial V}\right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)}\right)_{q_j, s} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=M+1}^N \left(\frac{\partial q_n}{\partial V}\right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} \left(\frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial q_l}{\partial V}\right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)}\right)_{q_j, v, s} \right] \end{aligned}$$

Поскольку $(\partial q_l / \partial V)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} = (\partial p / \partial \omega_l)_{q_j, \omega_k, v, s}^{(M)}$, ясно, что величина $Q_{10} \sim \varepsilon_a^2$. Для оценки последнего слагаемого в правой части пер-

вой из формул (3.7) вычислим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial q_l}{\partial V} \right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} \right)_{q_j, V, s} &= \sum_{v=M+1}^N \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \omega_l \partial \omega_v} \right)_{q_j, \omega_k, V, s}^{(M)} \left(\frac{\partial \omega_v}{\partial q_n} \right)_{q_j, V, s} \\ \left(\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial q_l}{\partial V} \right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} \right)_{q_j, s} &= \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V \partial \omega_l} \right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} - \\ &- \sum_{v=M+1}^N \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \omega_l \partial \omega_v} \right)_{q_j, \omega_k, V, s}^{(M)} \left(\frac{\partial p}{\partial q_v} \right)_{q_j, V, s} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $Q_{20} \sim \varepsilon_a^2$. Собирая вместе полученные результаты, приходим к оценке

$$(3.8) \quad m_{f0} - m_{fe0}^{(M)} \sim \varepsilon_a^2, \quad m_f = \frac{1}{2\rho^3 a_f^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{q_j, s}$$

4. Асимптотические разложения. Предположим, что величины всех характеристик газовой смеси в любой момент времени и в каждой точке пространства мало отклоняются от соответствующих значений в состоянии покоя. Как известно [1-3], в релаксирующих смесях передача сигналов сопровождается дисперсией, причем скорость этой передачи в предельных случаях совпадает либо с замороженной, либо с равновесной скоростью звука. Для сред рассматриваемого типа обе названные скорости звука близки между собой. Ясно, что скорость a_0 распространения акустических волн будет не сильно отличаться от них, поскольку она ограничена неравенствами $a_{e0} \leq a_0 \leq a_{f0}$. В нелинейной теории малых возмущений может оказаться, что $a_{f0} < a_0$; так, например, ударная волна перемещается со скоростью, которая больше как равновесной, так и замороженной скоростей звука. Будем, тем не менее, считать, что разница между всеми тремя величинами a_0 , a_{e0} и a_{f0} невелика и положим

$$(4.1) \quad a_0 - a_{fe0}^{(M)} = \varepsilon_a^2 \beta^{(M)} a_0$$

В предельных случаях при $M = 0$ и $M = N$ имеем соответственно

$$(4.2) \quad a_0 - a_{e0} = \varepsilon_a^2 \beta_e a_0, \quad a_0 - a_{f0} = \varepsilon_a^2 \beta_f a_0$$

Постоянные $\beta^{(M)}$, β_f и β_e будут, очевидно, порядка единицы.

Введем подвижную систему координат, связанную с элементом распространяющейся волны, и обозначим буквой L характерную длину в этой системе. Будем считать, что течение релаксирующей смеси представляет собой короткую волну, т. е. ширина области, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с расстояниями, на которые распространяется волна. Пусть Δ — малый числовой параметр, тогда независимые переменные

$$(4.3) \quad t = \frac{L}{\Delta a_0} t', \quad r = a_0 t + L r'$$

Относительно возмущений плотности, давления, температуры, энтропии и всех рассматривавшихся выше скоростей звука предположим, что они имеют тот же порядок, что и скорость частиц смеси, которая

пропорциональна еще одному независимому малому параметру ε . Переходя к безразмерным искомым функциям, имеем

$$(4.4) \quad v = \varepsilon a_0 v', \quad \rho = \rho_0 (1 + \varepsilon \rho'), \quad p = p_0 (1 + \varepsilon p') \\ T = T_0 (1 + \varepsilon T'), \quad s = s_0 (1 + \varepsilon s'), \quad a_{je}^{(M)} = a_{je0}^{(M)} [1 + \varepsilon (a_{je}^{(M)})']$$

Подставим в правую часть последнего уравнения из системы (1.1) вместо вектора \dot{q} , задающего скорость протекания релаксационных процессов, его выражение при помощи формулы (1.2). Рассматривая полученное соотношение с учетом порядковых равенств

$$\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial V} \right)_{q_j, s} = \varepsilon_a \frac{p_0}{q_{i0}} e'_{iV_0}, \quad i = 1, \dots, N$$

можно прийти к заключению, что вектор возмущенной полноты реакций пропорционален произведению малых параметров ε и ε_a ; ему же должен быть пропорционален вектор химического сродства. Таким образом

$$(4.5) \quad q_i = q_{i0} (1 + \varepsilon \varepsilon_a q_i'), \quad \omega_l = \varepsilon \varepsilon_a \frac{p_0}{q_{l0} \rho_0} \omega_l', \quad i, l = 1, \dots, N$$

5. Анализ уравнений Эйлера. При выводе асимптотических уравнений во всех соотношениях будем удерживать лишь главные члены, пренебрегая членами, имеющими более высокий порядок малости. Штрихи над всеми безразмерными переменными в дальнейшем опускаем.

После линеаризации интегрирование первых двух уравнений системы (1.1) приводит к формулам

$$(5.1) \quad \rho = \frac{p_0}{\rho_0 a_0^2} p = v$$

Первая из них выражает тот факт, что в изучаемом приближении сжатие газа происходит обратимо, и при постоянном составе реагирующей смеси, согласно второй формуле, соотношение Римана, характеризующее плоский бегущий звуковой импульс в инертном газе [3], имеет место для всего течения многокомпонентной реагирующей смеси.

Принимая во внимание формулы (4.4) и (4.5), из третьего уравнения системы (1.1) получим оценку $s \sim \varepsilon \varepsilon_a^2$, т. е. с принятой точностью

$$(5.2) \quad s = 0$$

Напишем общее выражение для отклонения давления от равновесного значения в покоящейся среде, принимая в качестве независимых термодинамических переменных плотность, энтропию, M составляющих вектора полноты реакций и $N - M$ составляющих вектора, определяющего химическое сродство. Имеем

$$p_0 p = (a_{je0}^{(M)})^2 \rho_0 \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{q_j, \omega_k, \rho}^{(M)} s_0 s + \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial p}{\partial q_{m0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} q_{m0} \varepsilon_a q_m + \\ + \sum_{n=M+1}^N \left(\frac{\partial p}{\partial \omega_{n0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \frac{p_0}{q_{n0} \rho_0} \varepsilon_a \omega_n$$

Второй член в правой части здесь исчезает в силу равенства (5.2). Далее, переходя от M -кратно замороженной и $(N - M)$ -кратно равновесной скорости звука $a_{fe0}^{(M)}$ к скорости распространения волны a_0 при помощи равенства (4.1), учитывая использовавшиеся ранее оценки термодинамических производных и пренебрегая пропорциональными ε_a^2 членами, возвращаемся к первой из формул (5.1).

Обратимся к уравнению для вектора скорости химических реакций. Положим

$$h_{il0} = \frac{q_{i0}q_{l0}p_0}{\tau_{il}p_0} h'_{il0}$$

Здесь τ_{il} имеет смысл времени релаксации i -го элемента, которое обусловлено величиной химического сродства l -го элемента, h'_{il0} — безразмерная величина порядка единицы. Поскольку матрица $\|h_{il}\|$ симметрична, удобно выбрать $\tau_{il} = \tau_{li}$. Подставляя теперь формулы (4.3) и (4.5) в последнее уравнение системы (1.1), где вектор \dot{q} заменен его выражением (1.2), в первом приближении находим

$$(5.3) \quad \frac{\partial q_i}{\partial r} = \sum_{l=1}^N N_{il} h_{il0} \omega_l, \quad N_{il} = \frac{L}{a_0 \tau_{il}}, \quad i = 1, \dots, N$$

Как видим, в уравнениях (5.3) появились дополнительные числовые параметры N_{il} , отношения макроскопического времени $\tau = L / a_0$ к временам релаксации τ_{il} . Когда все они стремятся к нулю или бесконечности, можно получить значительные упрощения в анализе. В первом случае термодинамическое состояние течения будет близко к замороженному, во втором — к равновесному.

Для компонентов вектора химического сродства верно разложение

$$(5.4) \quad \omega_i = -e_i V_0 \rho + \frac{p_0}{p_0} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial q_{j0}} \right)_{q_j, v, s} q_{j0} q_{l0} q_l$$

Составляющие безразмерного вектора скорости релаксационных процессов можно определить как

$$q_i \dot{=} \varepsilon \varepsilon_a \frac{q_{i0}}{\tau_i} q_i \dot{''}$$

Из последнего уравнения системы (1.1) следует сразу

$$\frac{\partial q_i}{\partial r} = -N_i q_i \dot{''}, \quad N_i = \frac{L}{a_0 \tau_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

а сравнение с формулой (5.3) дает

$$q_i \dot{''} = - \sum_{l=1}^N \left(\frac{N_{il}}{N_i} \right) h_{il0} \omega_l$$

Ясно, что реальным смыслом обладают только параметры N_{il} , в то время как числа N_i можно вообще исключить из асимптотического анализа уравнений.

Для вывода недостающего соотношения, связывающего скорость частиц смеси с компонентами вектора полноты химических реакций, воспользуемся уравнениями (2.3) и (2.4). Запишем приращение M -кратно замороженной и $(N - M)$ -кратно равновесной скорости звука через приращения плотности, энтропии, M составляющих вектора полноты реакций и $N - M$ составляющих вектора, задающего химическое сродство

$$a_{fe}^{(M)} a_{fe}^{(M)} = \left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial \rho_0} \right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} \rho_0 \rho + \left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial s_0} \right)_{q_j, \omega_k, \rho}^{(M)} s_0 s + \\ + \varepsilon_a \left[\sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial q_{m0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} q_{m0} q_m + \sum_{n=M+1}^N \left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial \omega_{n0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \frac{p_2}{q_{n0} \rho_0} \omega_n \right]$$

Вспоминая оценки (3.4) и (3.6) и равенство (5.2), с точностью до величин порядка ε_a^2 выводим отсюда

$$a_{fe}^{(M)} = (m_{fe}^{(M)} - 1) \rho$$

Принимая во внимание определение (2.2) для оператора $L_{fe}^{(M)}$ и соотношение (4.1), устанавливающее порядок разности между скоростью распространения волны и M -кратно замороженной и $(N - M)$ -кратно равновесной скоростью звука в покоящейся среде, после несложных преобразований имеем

$$(5.5) \quad 2(\varepsilon m_{fe0}^{(M)} v - \varepsilon_a^2 \beta^{(M)}) \frac{\partial v}{\partial r} + \Delta \left[2 \frac{\partial v}{\partial t} + (v - 1) \frac{v}{t} \right] = \\ = - \frac{1}{\rho_0 a_0^2} \varepsilon_a \left[\sum_{m=1}^M q_{m0} \left(\frac{\partial p}{\partial q_{m0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \frac{\partial q_m}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{p_0}{\rho_0} \sum_{n=M+1}^N \frac{1}{q_{n0}} \left(\frac{\partial p}{\partial \omega_{n0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} \frac{\partial \omega_n}{\partial r} \right]$$

Здесь, согласно формулам (3.3), (1.5) и (3.1), термодинамические производные

$$\left(\frac{\partial p}{\partial q_{m0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} = - \varepsilon_a p_0 \left[\frac{1}{q_{m0}} e_{mV0} + \sum_{l=N+1}^N \frac{1}{q_{l0}} \left(\frac{\partial q_l}{\partial q_{m0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} e_{lV0} \right] \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \omega_{n0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} = - \varepsilon_a p_0 \sum_{l=M+1}^N \frac{1}{q_{l0}} \left(\frac{\partial q_l}{\partial \omega_{n0}} \right)_{q_j, \omega_k, \rho, s}^{(M)} e_{lV0}$$

При разложении в ряд замороженной скорости звука в качестве независимых термодинамических переменных возьмем плотность, энтропию и все компоненты вектора полноты химических реакций. В результате

$$a_{f0} a_f = \left(\frac{\partial a_f}{\partial \rho_0} \right)_{q_j, s} \rho_0 \rho + \left(\frac{\partial a_f}{\partial s_0} \right)_{q_j, \rho} s_0 s + \varepsilon_a \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial a_f}{\partial q_{i0}} \right)_{q_j, \rho, s} q_{i0} q_i$$

откуда с точностью до величин порядка ε_a^2 следует

$$a_f = (m_{f0} - 1) \rho$$

Воспользовавшись вторым из соотношений (4.2) для разности скоростей распространения волны в замороженной скорости звука в состоянии покоя, преобразуем уравнение (2.4) к виду

$$(5.6) \quad 2(\varepsilon m_{f0} v - \varepsilon_a^2 \beta_f) \frac{\partial v}{\partial r} + \Delta \left[2 \frac{\partial v}{\partial t} + (v - 1) \frac{v}{t} \right] = \\ = - \varepsilon_a \frac{1}{\rho_0 a_0^2} \sum_{i=1}^N q_{i0} \left(\frac{\partial v}{\partial q_{i0}} \right)_{q_j, \rho, s} \frac{\partial q_i}{\partial r}$$

Сравним значения термодинамических коэффициентов $m_{fe0}^{(M)}$ и m_{f0} . Согласно равенству (3.8), их разность является величиной порядка ε_a^2 . Если обратиться к соотношениям (4.1) и (4.2), то видно, что в рассматриваемом приближении можно считать

$$m_{fe0}^{(M)} = m_{f0} = m_0 = \frac{1}{2\rho_0^3 a_0^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2} \right)_{q_j, \omega_k, s}^{(M)} = \frac{1}{2\rho_0^3 a_0^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2} \right)_{q_j, s}$$

Положим теперь в уравнении (5.5) $M = N$. При этом $\beta^{(M)} = \beta_f$, вторая сумма в его правой части обращается в нуль, и в результате оно переходит в уравнение (5.6). Простой проверкой можно убедиться, что при любом выборе независимых термодинамических функций уравнения (5.5) и (5.6) совпадают. Последнее проще, поэтому его более удобно рассматривать в качестве недостающего соотношения, связывающего скорость частиц с компонентами вектора полноты химических реакций.

6. Канонический вид уравнений химических реакций. Введем в рассмотрение вектор

$$(6.1) \quad \mathbf{e} = (e_1, \dots, e_N), \quad e_i = e_i v_0$$

и две симметричные положительно определенные матрицы

$$(6.2) \quad \mathbf{F} = \|f_{il}\| = \|N_{il} h_{il0}\| \\ \mathbf{G} = \|g_{il}\| = \left\| \frac{\rho_0}{P_0} q_{i0} q_{l0} \left(\frac{\partial \omega_l}{\partial q_{i0}} \right)_{q_j, v, s} \right\|$$

В этих обозначениях уравнения (5.3) и (5.4) запишутся соответственно как

$$(6.3) \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial r} = \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{G} \mathbf{q} - \mathbf{e} \nu = \mathbf{G} \mathbf{q} - \mathbf{e} \nu$$

Совершая преобразования составляющих векторов \mathbf{q} и $\boldsymbol{\omega}$, приведем уравнения (6.3) к каноническому виду [8, 9]. Заметим, прежде всего, что всегда можно подобрать такую матрицу \mathbf{C} , для которой произведение $\mathbf{F}_1 = \mathbf{C}^* \mathbf{F} \mathbf{C}$ — единичная матрица \mathbf{E} , причем символ \mathbf{C}^* означает матрицу, транспонированную к матрице \mathbf{C} [10]. Произведем замену переменных

$$(6.4) \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{C}^* \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\omega}$$

Здесь \mathbf{C}^{-1} — обратная к \mathbf{C} матрица. В результате имеем

$$(6.5) \quad \frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial r} = \mathbf{E} \boldsymbol{\omega}_1, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{q}_1 - \mathbf{e}_1 \nu, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}, \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{C}^{-1})^*$$

В силу симметричности матрицы \mathbf{G} матрица \mathbf{G}_1 будет также симметричной. Отсюда следует существование такой унитарной матрицы \mathbf{U} ,

что произведение $G_2 = U^*G_1U = U^{-1}G_1U$ представляет собой диагональную матрицу D . Сделаем еще одну замену переменных

$$(6.6) \quad q_2 = U^{-1}q_1, \quad \omega_2 = U^{-1}\omega_1$$

Первое из уравнений (6.5) инвариантно по отношению к такому преобразованию, поэтому

$$(6.7) \quad \frac{\partial q_2}{\partial r} = E\omega_2, \quad \omega_2 = Dq_2 - e_2v, \quad e_2 = U^{-1}e_1, \quad D = U^{-1}G_1U$$

Вычислим диагональные элементы матрицы $D = \|d_{il}\|$. Они равны характеристическим числам матрицы G_1 , поскольку преобразование $U^{-1}G_1U$ их не изменяет [10]. Далее, равенство $C^*FC = E$ означает, что $C^*F = C^{-1}$, а $G_1 = C^*FG(C^*)^{-1}$. Как видно, диагональные элементы матрицы D совпадают с характеристическими числами произведения FG матриц F и G , которые вводятся формулами (6.2).

Рассуждая иначе, получим $FC = (C^*)^{-1} = (C^{-1})^*$, а $G_1 = C^{-1}GFC$. Можно утверждать также, что диагональные элементы матрицы D равны характеристическим числам матрицы GF . В силу симметричности обеих матриц F и G имеет место соотношение $GF = (FG)^*$, т. е. характеристические числа матриц FG и GF одни и те же. Обозначим их через $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, тогда $d_{il} = 0$ ($i \neq l$) и $d_{ii} = \lambda_i > 0$. Что касается вектора e_2 , то комбинирование третьих уравнений из систем (6.5) и (6.7) дает $e_2 = U^{-1}G^{-1}e_1$, причем вектор e определяется через известные термодинамические производные e_{iv} посредством формул (6.1).

Как легко убедиться, скалярное произведение $e\partial q / \partial r$ инвариантно по отношению к введенным выше линейным преобразованиям. Отсюда следует, что уравнение (5.6) приобретает окончательно вид

$$2(\varepsilon m_0 v - \varepsilon_a^2 \beta_f) \frac{\partial v}{\partial r} + \Delta \left[2 \frac{\partial v}{\partial t} + (v - 1) \frac{v}{t} \right] = \varepsilon_a^2 \frac{p_0}{\rho_0 a_0^2} e_2 \frac{\partial q_2}{\partial r}$$

Вместе с уравнениями (6.7) последнее уравнение образует замкнутую систему, порядок которой равен, очевидно, увеличенному на единицу количеству релаксационных процессов.

Поступила 19 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
2. Barrère M., Prud'homme R. Equations fondamentales de l'aérothermochimie. Paris, Masson, 1973.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. Napolitano L. G. Small Perturbation theories for singly reacting mixtures. I. A. Rept, 1966, № 135.
5. Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С. Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околосвуковых скоростях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
6. Рыжов О. С. О собственно трансзвуковом режиме в течениях реагирующей смеси. В сб.: Проблемы прикладной математики и механики. М., «Наука», 1971.
7. Рыжов О. С. О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
8. Napolitano L. G. Generalized velocity potential equation for pluri-reacting mixtures. Arch. mech. stosowanej, 1964, vol. 16, No 2.
9. Napolitano L. G. Non-linear non equilibrium flows. I. A. Rept, 1969, No 142.
10. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., «Наука», 1971.