		l_i/l_1				δ/δ°	m	G°/G
$q = \text{const}$	$h = \text{const}$	1	0.666	1	—	0.7	2	1.21
	$h \neq \text{const}$	1	0.89	0.89	1	0.61	3	1.4
$q = q^\circ e^{-\alpha x}$	$h = \text{const}$	1	0.81	—	—	0.79	1	1.19
	$h \neq \text{const}$	1	0.89	1.3	—	0.7	2	1.37

Вместе с условием равенства нулю определителя (14) получается достаточное число условий для определения всех неизвестных параметров. Решается полученная система также методом Ньютона — Канторовича.

Вес оптимальной оболочки G сравнивался с результатами, полученными из условия равноустойчивости оболочки к общей и местной потере устойчивости [6]. Результаты сравнения приведены в таблице, в которой δ° и G° — соответственно толщина и вес оболочек, полученные по методике [6].

Поступила 18 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Л. В., Моссаковский В. И., Ободан Н. И.* Об оптимальной толщине цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
2. *Сегаль А. И.* Некоторые итоги решения циклических задач. В сб.: Расчет пространственных конструкций. М., Госстройиздат, 1955, вып. 3.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
4. *Моссаковский В. И., Андреев Л. В., Зюзин В. А.* Некоторые вопросы устойчивости цилиндрической оболочки под действием неравномерного давления. Аннотации докладов 5-й Всес. конференции по теории пластин и оболочек, М., 1965.
5. *Андреев Л. В., Ободан Н. И.* Устойчивость цилиндрических оболочек переменной толщины. Прикл. механ., 1968, т. 4. вып. 5.
6. *Маневич Л. И.* Оптимальное проектирование подкрепленной цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении. Докл. АН УССР, 1963, № 7.

УДК 539.3 : 534.231.1

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗКАХ

В. М. Гончаренко

(Киев)

Анализируются основные статические и динамические краевые задачи теории упругости при случайных нагрузках. Введены и исследуются различные обобщенные решения этих задач. Они либо представляют собой обобщенные случайные функции (случайные распределения), либо принадлежат пространствам суммируемых случайных функций, аналогичным пространствам С. Л. Соболева. Эти пространства введены в работе [1]. С помощью доказанной в этой работе теоремы вложения для случайных функций устанавливаются условия, при которых существует классическое решение.

1. Некоторые классы случайных функций и распределений. Пусть Ω — область в R^n, H — пространство комплекснозначных случайных величин с конечным вторым моментом, гильбертовое относительно скалярного произведения $(\xi, \eta) = M\xi\bar{\eta}$. Случайные функции второго порядка, определенные в Ω, можно рассматривать как функции со значениями в H. Пространства $C^m(\Omega, H)$ и $C_0{}^m(\Omega, H)$ состоят из H-значных функций, имеющих в Ω производные в сильном смысле (относительно нормы H, т. е. в среднеквадратичном) до порядка m, непрерывные в том же смысле. Они аналогичны пространствам $C^m(\Omega)$ и $C_0^m(\Omega)$. Пространство $L_p(\Omega, H)$ $(p > 1)$ образуют случайные функции $u(x)$, сильно измеримые относительно нормы H и такие, что числовая функция $x \to \| u(x) \|_H$ принадлежит $L_p(\Omega)$.

Если область Ω ограничена, то функции из $L_p(\Omega, H)$ интегрируемы в Ω по Бохнеру. Отображение

$$\varphi \to \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in D(\Omega)$$

принадлежит $\{D(\Omega), H\}$, т. е. является линейным непрерывным отображением пространства основных функций Шварца $D(\Omega)$ в H. Такие отображения называются случайными распределениями второго порядка. Операции над ними описаны в [1-3]. Для функций из $L_p(\Omega, H)$ можно рассматривать производные любого порядка в смысле $\{D(\Omega), H\}$. В работе [1] введены пространства $W_p^l(\Omega, H)$ случайных функций из $L_p(\Omega, H)$, у которых производные в этом смысле до порядка l также принадлежат $L_p(\Omega, H)$. Пространства $W_p^l(\Omega, H)$ банаховы относительно нормы

$$\left[\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant l} \| D^\alpha u(x) \|_H^p dx\right]^{1/p}$$

Они являются аналогами пространств С. Л. Соболева $W_p^l(\Omega)$ и обладают аналогичными свойствами. В частности [1], пространство $W_2^l(\Omega, H)$ при $l > n/2 + \sigma$ непрерывно вложено в $C^{[\sigma]}(\Omega, H)$. Множество $C_0^\infty(\Omega, H)$ плотно в $L_2(\Omega, H)$, но замыкание $W_2^{0l}(\Omega, H)$ множества $C_0^\infty(\Omega, H)$ в норме $W_2^l(\Omega, H)$ является собственным подпространством $W_2^l(\Omega, H)$.

Критерии принадлежности случайной функции $u(x)$ к пространствам $L_2(\Omega, H)$ и $W_2^l(\Omega, H)$ формулируются в терминах ее ковариационной функции $K(x, y) = \mathrm{M}u(x)\,\overline{u(y)}$. Для того, чтобы существовала случайная функция $u_1(x)$, эквивалентная $u(x)$ и принадлежащая $L_2(\Omega, H)$, необходимо и достаточно, чтобы $K(x, x)$ была интегрируемой в Ω. Если при этом интегрируемы обобщенные производные

$$D_x^\alpha D_y^\alpha K(x, y)\,|_{y=x} \qquad (|\alpha| \leqslant l)$$

то $u_1(x)$ принадлежит $W_2^l(\Omega, H)$.

Ниже понадобятся пространства векторных случайных функций и распределений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots u_n)$. Они могут быть получены заменой H на H^n. Нормы пространств $L_2(\Omega, H^n)$ и $W^l{}_2(\Omega, H^n)$ будем обозначать $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_l$, а скалярные произведения — $(\cdot, \cdot)_0$ и $(\cdot, \cdot)_l$.

2. Статические задачи с однородными граничными условиями. Краевые задачи теории упругости связаны с дифференциальным выражением

$$A\mathbf{u} = \left\{-\sum_{k,\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(c_{kl\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta})\right\}_{l=1}^{n}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$$

Рассмотрим, например, первую краевую задачу в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$

(2.1) $\qquad A\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (x \in \Omega), \ \mathbf{u} = 0 \ (x \in \partial\Omega)$

Если $c_{kl\alpha\beta}$ детерминированы, а $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x)$ — заданная случайная функция второго порядка, то обобщенное решение задачи (2.1) может быть введено по аналогии с детерминированным случаем при помощи энергетического метода [4]. Рассмотрим оператор A_0: $L_2(\Omega, H^n) \to L_2(\Omega, H^n)$, действующий по формуле $\mathrm{A}_0\mathbf{u} = A\mathbf{u}$ и имеющий $C_0^\infty(\Omega, H^n)$ в качестве области определения. Поскольку $C_0^\infty(\Omega, H^n)$ плотно в $L_2(\Omega, H^n)$ и, как легко убедиться, $(Au, v)_0 = (u, Av)_0$ для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega, H^n)$, то оператор A_0 симметрический. Можно показать, что он положительно определен. Существует, следовательно, самосопряженное расширение A оператора A_0 по Фридрихсу. Уравнение $\mathrm{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ однозначно и корректно разрешимо для всех $\mathbf{f} \in L_2(\Omega, H^n)$. Его решение является обобщенным решением стохастической задачи (2.1).

Энергетическое пространство оператора A_0 совпадает с $W_2^{01}(\Omega, H^n)$, а энергетическая норма эквивалентна норме пространства $W_2^1(\Omega, H^n)$. Энергетическая норма порождается скалярным произведением

$$(2.2)\qquad [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 = 2\mathrm{M}\int_\Omega W dx, \quad W = \frac{1}{2}\sum c_{kl\alpha\beta}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{\alpha\beta}$$

Обобщенное решение $\mathbf{u}$ сообщает минимум функционалу математического ожидания энергии

$$(2.3)\qquad F(\mathbf{v}) = {}^1/_2\,(A\mathbf{v}, \mathbf{v})_0 - (\mathbf{v}, \mathbf{f})_0$$

Как и в детерминированном случае, обобщенное решение стохастической краевой задачи (2.1) может быть найдено различными проекционными, вариационными и вариационно-разностными методами. Для детерминированной задачи (2.1) известен ряд результатов о сходимости соответствующих последовательностей приближенных решений. Свойства оператора A позволяют получить для стохастической задачи аналогичные результаты о сходимости в вероятностных нормах $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ и $[(A\mathbf{u}, \mathbf{u})]^{1/2}$.

Введенное обобщенное решение можно рассматривать и в случае, когда $c_{kl\alpha\beta}$ представляют собой случайные функции. Полученные результаты сохраняются, если $c_{kl\alpha\beta}$ принадлежат пространству случайных функций, измеримых и ограниченных по мере, равной произведению вероятностной меры и меры Лебега в Ω. Можно также рассматривать другие виды граничных условий.

3. Задача Коши со случайными данными. Пусть $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \in \{D(R^n), H^n\}$, $\mathbf{f}(x, t) \in \{D(R^{n+1}), H^n\}$, причем $\mathbf{f} = 0$ при $t < 0$. Под задачей Коши со случайными данными подразумевается задача об отыскании случайного распределения $\mathbf{u} \in \{D(R^{n+1}), H^n\}$, удовлетворяющего уравнению

$$(3.1)\qquad \mathbf{u}^{\cdot\cdot} + A\mathbf{u} = \mathbf{f}_1 \equiv \mathbf{f} + \mathbf{u}_0 \times \delta^{\cdot}(t) + \mathbf{u}_1 \times \delta(t)$$

и условию: $\mathbf{u} = 0$ при $t < 0$.

Пусть $E(x, t)$ — фундаментальная матрица динамических уравнений теории упругости. Решение сформулированной задачи Коши единственно и представляется в виде свертки

$$(3.2)\qquad \mathbf{u} = E * \mathbf{f}_1 = E * \mathbf{f} + [E * (\mathbf{u}_0 \times \delta)]^{\cdot} + E * (\mathbf{u}_1 \times \delta)$$

Доказательство существования свертки $E * \mathbf{f}_1$ обобщенной функции $E \in D'(R^{n+1})$ и случайного распределения $\mathbf{f}_1$ может быть проведено аналогично доказательству [5] для волнового уравнения и неслучайных функций.

Формула (3.2) дает возможность определить вероятностные характеристики решения. Пусть, например, $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{f}$ независимы и имеют характеристические функционалы Φ_0, Φ_1, $\Phi_\mathbf{f}$. Тогда характеристический функционал решения ($\check{}$ — символ инверсии)

$$(3.3)\qquad \Phi_\mathbf{u}(\varphi) = \Phi_\mathbf{f}(\varphi_E)\,\Phi_1[\varphi_E(x, 0)]\,\Phi_0[\varphi_E^{\cdot}(x, 0)], \quad \varphi_E = E^{\vee} * \varphi, \ \varphi \in [D(R^{n+1})]^n$$

Решение (3.2) представляет собой случайное распределение. Интересно выяснить условия, при которых оно порождается случайной функцией того или иного класса. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\mathbf{f} \in C\{[0, T], W_2^l(\Omega, H^n)\}$, $\mathbf{u}_0 \in W_2^{l+1}(\Omega, H^n)$ и $\mathbf{u}_1 \in W_2^l(\Omega, H^n)$ для каждых $T > 0$ и области $\Omega \subset R^n$, то решение задачи Коши — случайная функция $\mathbf{u}(x, t)$, которая при всяком $0 < t < T$ принадлежит $W_2^l(\Omega, H^n)$. При этом $\mathbf{u}^{\cdot} \in W_2^{l-1}(\Omega, H^n)$, решение $t \to \{\mathbf{u}, \mathbf{u}^{\cdot}\}$ может быть интерпретировано как непрерывная кривая в пространстве $W_2^l(\Omega, H^n) \times W_2^{l-1}(\Omega, H^n)$.

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 $l > (n + 1)/2 + 2$, то решение задачи Коши является классическим, т. е. представляет собой случайную функцию класса $C^2(t > 0, H^n) \cap C^1(t \geqslant 0, H^n)$.

Доказательство теоремы 1 может быть проведено по классической схеме [6] с использованием регуляризации случайных распределений и априорных оценок в нормах $\|\cdot\|_l$. Доказательство теоремы 2 следует из теоремы вложения для случайных функций.

Условия теоремы 2 можно ослабить, вводя, например, пространство $W_2^l(\Omega, H^n)$ с дробным l.

4. Смешанная краевая задача. Рассмотрим краевую задачу

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}^{\cdot\cdot} + A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (x, t) \in \Omega \times R_+ \\
&\mathbf{u} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times R_+ \\
&\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad \mathbf{u}^{\cdot}(x, 0) = \mathbf{u}_1(x)
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Здесь $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{f}$ — заданные случайные функции. В зависимости от условий, наложенных на их ковариационные матрицы, существует классическое или различные обобщенные решения стохастической задачи (4.1).

Теорема 3. Пусть производные $D_x^\alpha D_y^\alpha$ от ковариационных функций компонент $\mathbf{u}_0(x)$, $\mathbf{u}_1(x)$ при $y = x$ интегрируемы в Ω соответственно при $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l + 1$ и $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$ и аналогичные производные $(0 \leqslant |\alpha| \leqslant l)$ от ковариационных функций. $K_{fs}(x, t; y, \tau)$ компонент f_s интегрируемы в Ω по x при $y = x$, $\tau = t$ и всех $t > 0$. Пусть также выполняется условие непрерывности в целом

$$
\lim_{\tau\to t} \int_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} D_x^\alpha D_y^\alpha \left[K_{fs}(x, t; y, t) + K_{fs}(x, \tau; y, \tau) - 2K_{fs}(x, t; y, \tau)\right]_{y=x} dx = 0
$$

Тогда существует единственное обобщенное решение класса $C\{[0, \infty), W_2^l(\Omega, H^n)\}$. Если при этом $l \geqslant 5$ $(n = 3)$ или $l \geqslant 4$ $(n = 2)$, то существует классическое решение.

Определение решения стохастической задачи (4.1) класса $C\{[0, \infty), W_2^l(\Omega, H^n)\}$ и доказательство теоремы 3 аналогичны данным в [6] для детерминированной смешанной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Применяя методы [7], можно получить менее жесткие условия существования обобщенного решения класса $C\{[0, \infty), W_2^l(\Omega, H^n)\}$.

Теорема 4. Если $\mathbf{u}_0 \in W_2^{01}(\Omega, H^n)$, $\mathbf{u}_1 \in L_2(\Omega, H^n)$, $\mathbf{f} \in L_2[\Omega \times (0, T), H^n]$, то существует единственное обобщенное решение стохастической задачи (4.1) класса $C\{[0, T], W_2^{01}(\Omega, H^n)\}$. При этом $\mathbf{u}^{\cdot} \in C\{[0, T], L_2(\Omega, H^n)\}$. Зависимость $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}^{\cdot}\}$ от $\{\mathbf{f}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1\}$ непрерывна как отображение пространства $L_2[\Omega \times (0, T), H^n] \times W^{01}_2(\Omega, H^n) \times L_2(\Omega, H^n)$ в пространство $C\{[0, T], W_2^{01}(\Omega, H^n) \times L_2(\Omega, H^n)\}$.

Полученные результаты сохраняются, если $c_{kl\alpha\beta}$ — случайные функции из пространства L_∞. Они справедливы также для ряда краевых задач теории пластин и оболочек.

Поступила 24 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаренко В. М.* Некоторые классы векторозначных обобщенных функций и их приложения к краевым задачам относительно случайных функций. Укр. матем. ж., 1975, т. 27, вып. 2.
2. *Ito K.* Stationary random distribution. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1953, vol. 28. (Рус. перев.: Математика, М., Изд-во иностр. лит., 1957, т. I, № 3).
3. *Гельфанд И. М. Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., Физматгиз, 1961.
4. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 25/III-1976 г. Т-07670 Подписано к печати 20/V-1976 г. Тираж 2875 экз.
Зак. 428 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8+1 вкл. Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 15,9

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10