и порядок системы (9) при фиксированном m понижается до $2m$. При решении (9) величина m менялась от 3 до 15. На фигуре построены искомые кривые при $n = 2$ (*а*), $n = 3$ (*б*), $n = 4$ (*в*), $n = 6$ (*г*); кривым *1 — 4* соответствуют значения единственного независимого параметра $\lambda = Hr^{-1} \sin \tau / 2$, $\lambda > 1$, равные 1.01, 1.1, 1.3, 1.5. При $\lambda \gg 1$ уравнение (7) для данных граничных условий имеет очевидное решение

$$F(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - \zeta)^{-1}, \quad \overline{\omega(\zeta)} = \sum_{k=1}^{n}{}' (\zeta - \alpha_k)^{-1}, \quad \zeta \in \Gamma_l \tag{11}$$

Штрих означает, что в сумме опущен член с $k = l$. Раскладывая (11) в ряд по степеням λ, приходим к решению задачи, полученному в [5] более сложным путем.

Замечание. В работе [2] при $n = 2$ на нагрузку накладываются ограничения — $1 < b / a < -0.187$. Это — следствие досадной арифметической ошибки: формула (3.17) в [2] должна иметь вид $x_B = C_1 (1.23 + 0.23\, b / a)$, и значит, $|\, b / a \,| < 1$, что включает и рассмотренный выше случай $b = 0$. Вообще, в цитируемом примере для симметричного случая при $n = 2$ следует несколько изменить постановку задачи, не фиксируя длину разрезов и расстояние между ними, что сужает общность, а определяя по выбранному отношению b / a допустимые значения λ из явного задания кривой формулами (3.17), (3.18) работы [2].

Поступила 4 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды. т. 1. М., «Наука», 1965.
2. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
3. *Курант Р.* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. *Космодамианский А. С.* Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Донецк. Изд-во Донецкого ун-та, 1972.
6. *Шерман Д. И.* Об одном способе рассмотрения краевых задач теории функций и двумерных задач теории упругости. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (К восьмидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972.
7. *Мусхелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.

УДК 539.3

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Л. В. Андреев, В. И. Моссаковский, Н. И. Ободан

(Днепропетровск)

С помощью принципа максимума Понтрягина решается задача об оптимальном в весовом отношении подкреплении оболочки, нагруженной неравномерным осесимметричным внешним давлением.

При постановке задач об оптимизации параметров конструкций с ограничениями, обязательно указывается класс решений, среди которых отыскивается оптимальное.

Ранее [1] с помощью принципа максимума Понтрягина получено решение об оптимальном распределении материала по длине оболочки при неравномерном нагружении. Ниже решается аналогичная задача при предварительном условии, что оболочка имеет постоянную толщину и поперечные подкрепления.

Рассматривается полубезмоментная модель оболочки, осевая линия шпангоута считается совмещенной со срединной поверхностью и нерастяжимой.

Из уравнения устойчивости после разделения переменных получаем

$$\frac{d^4\varphi_n}{dx^4} - \alpha_n^4\varphi_n = 0, \quad \alpha_n^4 = \frac{q(x)R}{E\delta} n^4(n^2-1) - \frac{D}{E\delta R^2} n^4(n^2-1)^2 \tag{1}$$

В местах постановки шпангоутов $x = l_1, l_2, \ldots, l_m$ должны выполняться условия совместности деформаций. Учитывая, что переход через шпангоут влечет за собой скачок перерезывающей и продольной силы, получим связь для усилий и перемещений в виде

$$\varphi_+ = \varphi_-, \quad \varphi_+' = \varphi_-', \quad \varphi_+'' = \varphi_-'' + \gamma_2\varphi', \quad \varphi_+''' = \varphi_-''' - \gamma_1\varphi \tag{2}$$

$$\gamma_1 = \frac{n^4(n^2-1)}{E\delta R}\left[\frac{E^\circ I_x(n^2-1)}{R^2} - N^\circ\right], \quad \gamma_2 = \frac{n^2(n^2-1)}{E\delta R^3}\left(\frac{n^2}{E^\circ I_z} + \frac{1}{GI_*}\right)^{-1}$$

Здесь и далее приняты обозначения: l, R, δ — соответственно длина, радиус и толщина оболочки: E, E°,— модули упругости материала оболочки и шпангоута; I_x, I_z, I_* — моменты инерции шпангоута; D — изгибная жесткость; N° — усилие в шпангоуте.

Выражения для γ_1 и γ_2 заимствованы из работы [2].

Зададим форму шпангоута в виде прямоугольника ($b \times h$) и запишем соотношения (1), (2) в фазовых координатах [3]

$$y_1^\cdot = y_2, \quad y_2^\cdot = y_3 + \frac{c_1}{\delta}\left(\frac{c_2}{bh} + \frac{c_3}{bh^3\gamma}\right)^{-1} y_2 u, \quad y_3^\cdot = y_4 - \frac{a_1}{\delta}(a_2bh^3 - a_3)\, y_1 u \tag{3}$$

$$y_4^\cdot = \alpha_n^4 y_1 \quad (y_1 = \varphi_n,\ y_2 = \varphi_n^\cdot,\quad y_3 = \varphi_n^{\cdot\cdot},\ y_4 = \varphi_n^{\cdot\cdot\cdot})$$

Здесь c_i, a_i — константы, определяемые из уравнений (1), (2), u — функция включения в работу шпангоута

$$u = \begin{cases} 1, & x = l_k \\ 0, & x \neq l_k \end{cases}, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

В соответствии с заданными условиями закрепления формулируем граничные условия. При шарнирном опирании

$$y_1(0) = y_1(l) = y_3(0) = y_3(l) = 0 \tag{4}$$

Требуется найти такие значения b, h, δ и l_k, чтобы выполнялось условие

$$I = \int_0^l (2\pi R\delta + bhu)\, dx = \min \tag{5}$$

В терминах теории оптимальных процессов рассматривается процесс с подвижными концами, параметрами и закрепленным временем. Для таких процессов справедлив обыкновенный принцип максимума

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p \tag{6}$$

$$H(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}, x) = \sum_{i=1}^{p} f_i\psi_i, \quad H(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}, x) = M(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}, x)$$

$$(M = \sup\nolimits_{u \in D} H(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}, x)), \quad \psi_0 \leqslant 0, \quad \psi_0 = \text{const}$$

и имеет место равенство

$$\text{(7)} \qquad \sum_{i=0}^{p} \psi_i(l) \int_0^l \frac{\partial f_i(y, u, \omega)}{\partial \omega_\rho} dx = 0, \quad \rho = 1, 2, 3, \quad \omega = \{b, h, \delta\}$$

Запишем функцию $H(y, \psi, u, x)$ для рассматриваемой задачи

$$H = A + \left[\psi_0 bh + \psi_2 \frac{c_1}{\delta}\left(\frac{c_2}{b^3 h} + \frac{c_3}{bh^3\gamma}\right)^{-1} y_2 - \psi_3 \frac{a_1}{\delta}(a_2 bh^3 - a_3) y_1\right] u$$

Из условия $H(y, \psi, u, x) = M(y, \psi, x)$ получается

$$\text{(8)} \qquad \psi_0 bh + \psi_2 y_2 \frac{c_1}{\delta}\left(\frac{c_2}{b^3 h} + \frac{c_3}{bh^3\gamma}\right)^{-1} - \psi_3 y_1 \frac{a_1}{\delta}(a_2 bh^3 - a_3) = 0$$

так как $u = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ и $\psi_0 \leqslant 0$, $\psi_0 = \text{const}$

Далее, дополнительные условия (7) дают соотношения

$$\text{(9)} \qquad N_1 = \psi_0 2\pi R l - \psi_3(l) \frac{a_1}{\delta^2}(a_2 bh^3 - a_3) \sum_{k=1}^{m} y_1(l_k) = 0$$

$$\text{(10)} \qquad N_2 = \psi_0 mh - \psi_3(l) \sum_{k=1}^{m} y_1(l_k) \frac{a_1}{\delta} a_2 h^3 = 0$$

$$\text{(11)} \qquad N_3 = \psi_0 bm - 3\psi_3(l) \frac{a_1}{\delta} a_2 bh^2 \sum_{k=1}^{m} y_1(l_k) = 0$$

Из уравнения (11) следует, что $b = 0$. Поэтому, введя ограничение $b \geqslant b_*$, вместо равенства (10) имеем неравенство $N_2 \leqslant 0$, которое удовлетворяется автоматически при выполнении равенства (11), условия $\psi_0 \leqslant 0$ и $b = b_*$. Исключая $\psi_3(l) \sum_k y_1(l_k)$ из выражений (9) и (11), получим уравнение для определения h

$$\text{(12)} \qquad (a_2 b_* h^3 - a_3)\, m - 6\pi R l \delta a_2 b_* h^2 = 0$$

Подставляя ψ_0, определенное из (9), в условие (8), получаем систему уравнений для определения l_k

$$\text{(13)} \qquad 3\psi_3(l) \sum_{k=1}^{m} y_1(l_k) \frac{a_2 b^2 h^3}{m} + \psi_3(l_1) y_1(l_1)(a_2 bh^3 - a_3) = 0$$

$$\psi_3(l_k)\, y_1(l_k) = \text{const}, \qquad k = 2, 3, \ldots, m$$

Поскольку условия принципа максимума для уравнений рассматриваемого вида являются необходимыми, а не достаточными, число m приходится определять путем сравнения нескольких вариантов счета.

Воспользуемся далее результатами работы [4] и будем считать, что действие неравномерной нагрузки $q^\circ f(x)$ на участке можно заменить действием равномерной с ординатой

$$q^\circ (l_k - l_{k-1})^{-1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} f(x)\, dx$$

Тогда общее решение исходной системы уравнений (3) для i-го участка имеет вид

$$\text{(14)} \qquad y_1^{\,i}(x) = y_1(l_{i-1})\,\xi_1 + y_2(l_{i-1})\,\xi_2 + y_3(l_{i-1})\,\xi_3 + y_4(l_{i-1})\,\xi_4$$

или

(15) $$\mathbf{y}(x)=\prod_{k=1}^{i-1}A_kB_kA_i(x)\cdot\mathbf{y}(0)=D_i(x)\,\mathbf{y}(0),\qquad \mathbf{y}(x)=\{y_1(x),y_2(x),y_3(x),y_4(x)\}$$

где ξ_j — функция Крылова первого или второго рода в зависимости от величины $\alpha_n{}^4$

$$A_k=\begin{Vmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3&\xi_4\\ \alpha_k{}^4\xi_4&\xi_1&\xi_2&\xi_3\\ \alpha_k{}^4\xi_3&\alpha_k{}^4\xi_4&\xi_1&\xi_2\\ \alpha_k{}^4\xi_2&\alpha_k{}^4\xi_3&\alpha_k{}^4\xi_4&\xi_1\end{Vmatrix},\quad B_k=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&\gamma_2&1&0\\-\gamma_1&0&0&1\end{Vmatrix}$$

Обозначим [5] $D(l)=\|a_{ij}\|$, $i,j=1,2,3,4$ и запишем условия существования решения системы при шарнирном опирании (14) и жестком защемлении (15)

$$a_{12}a_{34}-a_{14}a_{32}=0$$

$$a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23}=0$$

Для вычисления форм $y(x)$ необходимо определить $y_2(0)$ и $y_4(0)$. Константа $y_2(0)$ нормируется. При шарнирном опирании

(16) $$y_4(0)=y_2(0)\frac{a_{12}}{a_{14}}$$

Так как краевая задача (6) самосопряженная, то векторы $y(x)$ и $\psi(x)$, тождественны. Поэтому решение для сопряженной системы уравнений

(17) $$\psi^i(x)=\prod_{k=1}^{i-1}A_kB_kA_i(x)\,\psi(0),\qquad \psi(x)=\{\psi_4(x),\psi_3(x),\psi_2(x),\psi_1(x)\}$$

Таким образом, мы получили разрешающую систему уравнений (12), (13), (14), (16) для определения неизвестных параметров h, l_i, δ

(18) $$f_k(h,l_i,\delta,q^\circ)=0,\quad k=1,2,\ldots,m+1$$

Решение полученной нелинейной системы проводилось методом Ньютона — Канторовича. Задавался начальный вектор $\mathbf{F}=\{\delta,l_1,\ldots,l_m,h\}$. Программно вектору $\mathbf{F}$ давалось приращение $\Delta\mathbf{F}$ и вычислялась матрица

$$A=\|\partial f_k/\partial F_j\|,\qquad j,k=1,2,\ldots,m+1$$

Поправки вычислялись с помощью матричной операции

$$\Delta^n\mathbf{F}=|A_{n-1}|^{-1}\mathbf{f}^{n-1}$$

где n — номер поправки; f^{n-1} — столбец невязок системы $f_k=0$ на $(n-1)$ шаге.

Такой алгоритм может быть применен в случае, когда заранее введено предположение о том, что геометрические характеристики всех шпангоутов одинаковы. В случае, когда шпангоуты имеют различные геометрические характеристики, в качестве управляющих функций вводится m функций u_k, заданных аналогично u

(19) $$y_1{}^\cdot=y_2\qquad y_2{}^\cdot=y_3+\sum_k\frac{c_1}{\delta}\left(\frac{c_2}{h_kb_k{}^3}+\frac{c_3}{b_kh_k{}^3k_k}\right)^{-1}y_2u_k(x)$$

$$y_3{}^\cdot=y_4-\sum_k\frac{a_1}{\delta}(a_2b_kh_k{}^3-a_3)\,y_1u_k(x),\qquad y_4{}^\cdot=\alpha_n{}^4y_1$$

Условие $H=M$ превращается в несвязанную систему уравнений относительно l_k

(20) $$3\psi_3(l)\,y_1(l_k)\,a_2b_k{}^2h_k{}^2+\psi_3(l_k)\,y_1(l_k)\,(a_2b_kh_k{}^3)-a_3=0$$
$$i=1,2,\ldots,m$$

Исключив из условий (9) и (11) величину ψ_0, получим связанную систему уравнений относительно h_k

(21) $$\sum_{k=1}^{m}(a_2b_kh_k{}^3-a_3)\,y_1(l_k)-3a_2b_kh_k{}^2y_1(l_k)=0,\qquad k=1,2,\ldots,m$$

		l_i/l_1				δ/δ°	m	G°/G
$q = \text{const}$	$h = \text{const}$	1	0.666	1	—	0.7	2	1.21
	$h \neq \text{const}$	1	0.89	0.89	1	0.61	3	1.4
$q = q^\circ e^{-\alpha x}$	$h = \text{const}$	1	0.81	—	—	0.79	1	1.19
	$h \neq \text{const}$	1	0.89	1.3	—	0.7	2	1.37

Вместе с условием равенства нулю определителя (14) получается достаточное число условий для определения всех неизвестных параметров. Решается полученная система также методом Ньютона — Канторовича.

Вес оптимальной оболочки G сравнивался с результатами, полученными из условия равноустойчивости оболочки к общей и местной потере устойчивости [6]. Результаты сравнения приведены в таблице, в которой δ° и G° — соответственно толщина и вес оболочек, полученные по методике [6].

Поступила 18 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Л. В., Моссаковский В. И., Ободан Н. И.* Об оптимальной толщине цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
2. *Сегаль А. И.* Некоторые итоги решения циклических задач. В сб.: Расчет пространственных конструкций. М., Госстройиздат, 1955, вып. 3.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
4. *Моссаковский В. И., Андреев Л. В., Зюзин В. А.* Некоторые вопросы устойчивости цилиндрической оболочки под действием неравномерного давления. Аннотации докладов 5-й Всес. конференции по теории пластин и оболочек, М., 1965.
5. *Андреев Л. В., Ободан Н. И.* Устойчивость цилиндрических оболочек переменной толщины. Прикл. механ., 1968, т. 4. вып. 5.
6. *Маневич Л. И.* Оптимальное проектирование подкрепленной цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении. Докл. АН УССР, 1963, № 7.

УДК 539.3 : 534.231.1

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗКАХ

В. М. Гончаренко

(Киев)

Анализируются основные статические и динамические краевые задачи теории упругости при случайных нагрузках. Введены и исследуются различные обобщенные решения этих задач. Они либо представляют собой обобщенные случайные функции (случайные распределения), либо принадлежат пространствам суммируемых случайных функций, аналогичным пространствам С. Л. Соболева. Эти пространства введены в работе [1]. С помощью доказанной в этой работе теоремы вложения для случайных функций устанавливаются условия, при которых существует классическое решение.

1. Некоторые классы случайных функций и распределений. Пусть Ω — область в R^n, H — пространство комплекснозначных случайных величин с конечным вторым моментом, гильбертовое относительно скалярного произведения $(\xi, \eta) = M\xi\bar{\eta}$. Случайные функции второго порядка, определенные в Ω, можно рассматривать как функции со значениями в H. Пространства $C^m(\Omega, H)$ и $C_0{}^m(\Omega, H)$ состоят из H-значных функций, имеющих в Ω производные в сильном смысле (относительно нормы H, т. е. в среднеквадратичном) до порядка m, непрерывные в том же смысле. Они аналогичны про-