

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. Б. Вигдергауз

(Ленинград)

Определение формы равнопрочных контуров отверстий в перфорированной плоскости при заданной нагрузке — обратная задача — поставлена и с достаточной общностью решена Г. П. Черепановым [1,2] сведением к задаче Дирихле для внешности системы параллельных разрезов на плоскости в классе функций со степенными особенностями в концах разрезов, причем в ряде случаев получено замкнутое решение. В данной заметке исходная задача для любой конечносвязной области приводится к уравнению типа Фредгольма относительно плотности интегрального представления функции, конформно отображающей плоскость с исключенными кругами на область той же связности с искомой границей. Полученное уравнение решается методом наименьших квадратов, что для любой конечносвязной области приводит к единообразной вычислительной схеме, удобной для реализации на ЭВМ. Определены коэффициенты соответствующей алгебраической системы. В качестве примера для плоскости с циклически-симметрично расположенными отверстиями построено однопараметрическое семейство искомых контуров.

Как известно [3], на всякую n -связную область S_+ на комплексной плоскости переменного z , включающую бесконечно удаленную точку, можно отобразить каноническую область, получаемую из плоскости переменной ζ выбрасыванием n кругов. При $n > 2$ отображение $\omega_0(\zeta)$, имеющее вид $\omega_0(\zeta) = C\zeta + \omega(\zeta)$, где $\omega(\zeta)$ ограничена на бесконечности, зависит от $3n$ действительных параметров, шесть из которых (например, одну окружность, фиксированную точку на ней и центр еще одной окружности) можно задать произвольно; C — масштабный множитель. Следовательно, система равнопрочных контуров, если она существует, образует $(3n - 6)$ -параметрическое семейство. Границы изменения параметров определяются из геометрических соображений. При наличии симметрии число параметров может уменьшиться.

Для определения компонент напряжения на границе Γ области S_+ имеем [4] соотношения

$$(1) \quad \sigma_r + \sigma_\theta = 4\operatorname{Re}\Phi_0(\xi)$$

$$(2) \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2(\xi - a_k)^2}{r_k^2 \overline{\omega'(\xi)}} (\overline{\omega_0(\xi)} \Phi_0'(\xi) + \omega_0'(\xi) \Psi_0(\xi))$$

Здесь σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ — нормальные и касательные напряжения в полярной системе координат с полюсом в центре a_k окружности с радиусом r_k и границей Γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Если на бесконечности задано однородное напряженное состояние с компонентами напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , то $\Phi_0(\zeta)$ и $\Psi_0(\zeta)$ имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \Phi_0(\zeta) &= 1/4 (\sigma_x + \sigma_y) + \Phi(\zeta) \\ \Psi_0(\zeta) &= 1/2 (\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy} + \Psi(\zeta) \end{aligned}$$

где $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ голоморфны в S_+ и при $z \rightarrow \infty$ имеют асимптотику $O(z^{-2})$. Принимая, что $\sigma_r = p$ на всех контурах, положим $\sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y - p$, тогда (1) имеет очевидное решение [5]

$$\Phi_0(\zeta) = 1/4 (\sigma_x + \sigma_y)$$

а (2) сводится к соотношению

$$(3) \quad \frac{Car_k^2}{(\xi - \alpha_k)^2} + \frac{ar_k^2 \overline{\omega'(\xi)}}{(\xi - a_k)^2} = Cb + \omega'(\xi) \Psi(\xi)$$

$$a = 1/2 (\sigma_x + \sigma_y) - p + i\tau, \quad b = 1/2 (\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy}$$

Рассмотрим в формуле (3) второй член слева. Заметив, что $r_k^2 / (\xi - a_k)^2 = -d\bar{\xi} / d\xi$ при $\xi \in \Gamma_k$, запишем его в виде

$$(4) \quad \frac{r_k^2 \overline{\omega'(\xi)}}{(\xi - a_k)^2} = - \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{\xi}}{\Delta\xi} \frac{\overline{\omega(\xi + \Delta\xi)} - \overline{\omega(\xi)}}{\Delta\xi} = - \frac{d}{d\xi} \overline{\omega(\xi)}$$

Подставляя (4) в (3) и интегрируя, получим

$$(5) \quad F(\xi) + \overline{\omega(\xi)} = -C \frac{b}{a} \xi - C \frac{r_k^2}{\xi - a_k} + d_k$$

$$\xi \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Функция $F(\zeta)$ голоморфна в S_+ , $F'(\zeta) = \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) / a$, d_k — произвольные постоянные. Изменяя при необходимости d_k , добьемся, чтобы ограниченные функции $F(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ убывали на бесконечности. Для решения краевой задачи (5) представим, следуя Д. И. Шерману [6], $F(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ интегралами типа Коши

$$(6) \quad F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(t)}{t - \zeta} dt, \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{u(t)}}{t - \zeta} dt$$

($u(t)$ — гладкая комплекснозначная функция на Γ). Условия убывания на бесконечности удовлетворяются представлением (6). Подставляя (6) в (5), получим

$$(7) \quad u(\xi) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(t) d \ln \frac{t - \xi}{t - \bar{\xi}} - d_k = -C \frac{b}{a} \xi - \frac{Cr_k^2}{\xi - a_k}$$

Постоянные d_k определим соотношением

$$(8) \quad d_k = - \frac{1}{2\pi r_k} \int_{\Gamma_k} u(t) dS, \quad dS = |dt|$$

Уравнение (7) фредгольмово с вещественным симметричным ядром. Отделяя в нем вещественную и мнимую части, получим пару интегральных уравнений относительно потенциалов двойного слоя $\mu(t)$ и $\nu(t)$ видоизмененной [7] задачи Дирихле в классе ограниченных непрерывных в S_+ функций. (В работе [2] парная задача Дирихле решается в классе функций, имеющих $2n$ особенностей типа квадратного корня в углах разрезов.)

Эти уравнения однозначно разрешимы [7], поэтому уравнение (7) при условии (8) также разрешимо для любой правой части. В случае $n = 1$ уравнение (7) имеет очевидное решение: $F(\zeta) = \zeta$, $\omega(\zeta) = ba^{-1}\zeta^{-1}$. Функция $\omega_0(\zeta) = C(\zeta + ba^{-1}\zeta^{-1})$ совпадает с полученной в [2], если дополнительно преобразовать внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ функцией Жуковского

$$\nu(\zeta) = 1/2 (\zeta + \zeta^{-1})$$

При $n > 1$ для решения уравнения (7) методом наименьших квадратов в $L_2(\Gamma)$ удобно, поскольку Γ состоит из окружностей, задаться конечномерными приближениями в виде ($f(t)$ — правая часть (7))

$$\sum_{p=1}^m \left\{ \frac{\alpha_{pk}}{(t - a_k)^p} + \frac{\beta_{pk}}{(\bar{t} - \bar{a}_k)^p} \right\} + \int_{\Gamma_k} f(t) dS, \quad t \in \Gamma_k$$

Перенумеруем неизвестные α_{pk} и β_{pk} по правилу

$$x_{2(p-1)n+2k-1} = \alpha_{pk}, \quad x_{2(p-1)n+2k} = \beta_{pk}$$

$$p = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Обозначая $\alpha_{pk}, \beta_{pk} = x_i; \alpha_{ul}, \beta_{ul} = x_j$, получим: при $i + j - 1$ четном

$$(9) \quad a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{dS}{(t - a_k)^p (t - a_l)^u} = \sum_{s=1}^n r_s (a_s - a_k)^{-1} (a_s - a_l)^{-1} +$$

$$+ \begin{cases} 0, & k = l \\ (-1)^p \binom{p}{p+u-1} \frac{pr_k + ur_l}{(a_k - a_l)^{p+u}}, & k \neq l \end{cases}$$

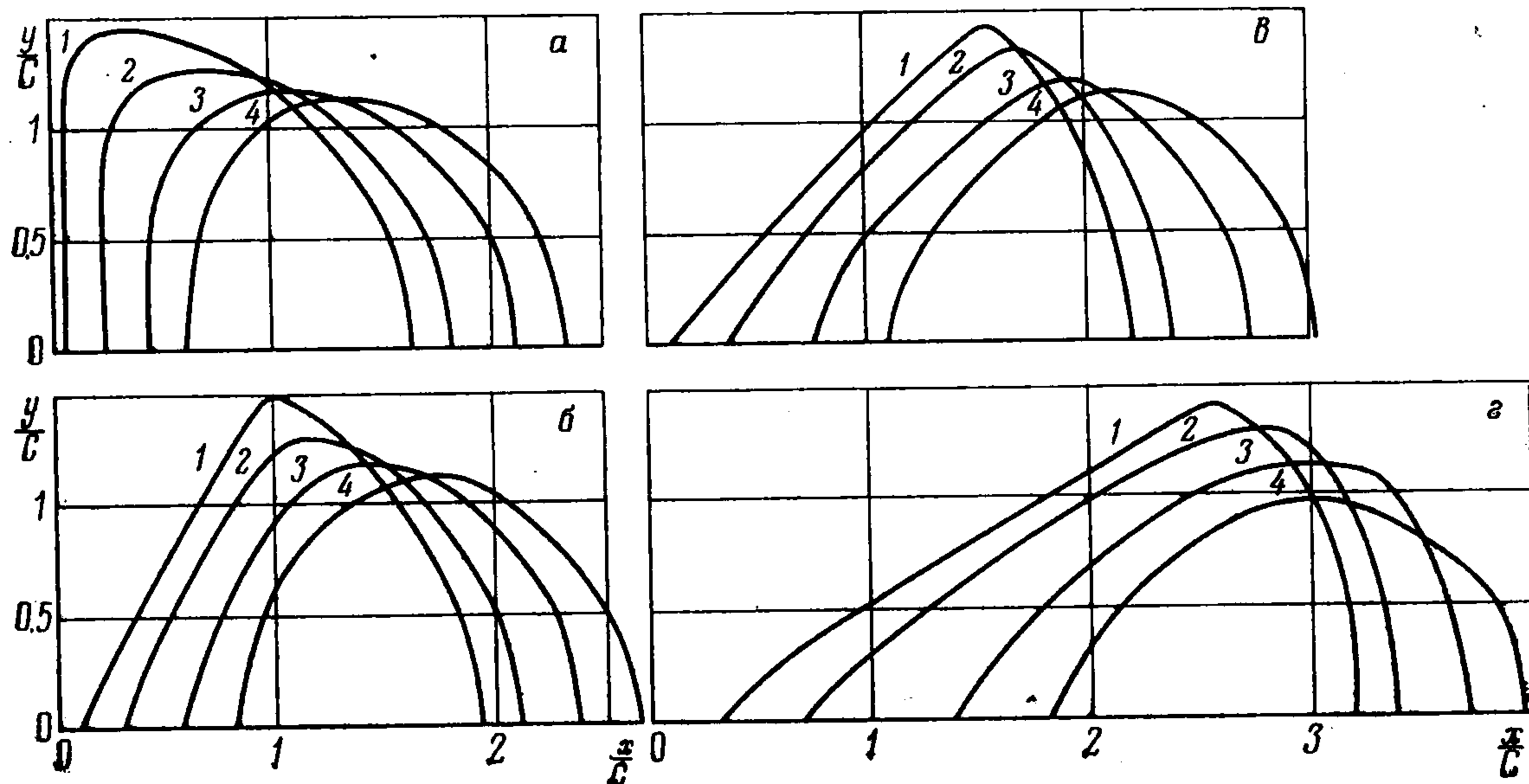
при $i + j - 1$ нечетном

$$(10) \quad a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{dS}{(t - a_k)^p (\bar{t} - \bar{a}_l)^u} = \sum_{s=1}^n (-1)^u r_s \sum_{q=1}^u \binom{q-1}{u-1} \times$$

$$\times \binom{p-1}{p+u-q-1} \frac{(r_s^2 / (\bar{a}_s - \bar{a}_l))^{u-q} (a_l - a_s)^{p-q}}{(r_s^2 - (a_k - a_s)(\bar{a}_s - \bar{a}_l))^{p+u-q}} + r_k^{-l}$$

Интегралы в (9), (10) вычислены с помощью вычетов. Штрих означает, что под знаком суммы опущены члены с $s = k, l$; $\{a_{ij}\}$ — симметричная матрица нормальной системы. Выражения для свободного члена, имеющие аналогичную, более простую структуру, не приведены ради экономии места.

Для решения системы методом квадратных корней составлена программа и приведены расчеты на ЭВМ «Минск-22». На практике, кроме числа отверстий, заранее зада-



ются их относительными размерами и взаимным расположением, т. е. геометрией области, причем последняя лишь неявно зависит от a_k и r_k — входных параметров программы. Накопленный опыт расчетов позволяет утверждать, что если отверстия не слишком близки между собой, параметры следует выбирать, перенося на плоскость ζ заданную геометрию плоскости z . В противном случае производят выбор из нескольких вариантов расчета.

Метод быстро сходится при любом относительном расположении отверстий.

Для n циклически-симметрично расположенных отверстий зададимся нагрузкой $\sigma_r = p, \tau_{r\theta} = 0, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = 0$ (равномерное давление на контурах отверстий при отсутствии усилий на бесконечности) $\tau = 2\pi/n, |a_k| = H$. Имеем

$$a_{k+1} = e^{i\tau} a_k, \quad r_k = r, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(e^{i\tau} \zeta) = e^{i\tau} \omega(\zeta), \quad F(e^{i\tau} \zeta) = e^{-i\tau} F(\zeta)$$

Поэтому

$$\alpha_{pk} = e^{-i\tau} \alpha_{p, k-1}, \quad \beta_{pk} = e^{i\tau} \beta_{p, k-1}$$

и порядок системы (9) при фиксированном m понижается до $2m$. При решении (9) величина m менялась от 3 до 15. На фигуре построены искомые кривые при $n = 2$ (а), $n = 3$ (б), $n = 4$ (в), $n = 6$ (г); кривым 1 — 4 соответствуют значения единственного независимого параметра $\lambda = Hr^{-1} \sin \tau / 2$, $\lambda > 1$, равные 1.01, 1.1, 1.3, 1.5. При $\lambda \gg 1$ уравнение (7) для данных граничных условий имеет очевидное решение

$$(11) \quad F(\zeta) = \sum_{k=1}^n (a_k - \zeta)^{-1}, \quad \overline{\omega(\zeta)} = \sum_{k=1}^n (\zeta - \alpha_k)^{-1}, \quad \zeta \in \Gamma_l$$

Штрих означает, что в сумме опущен член с $k = l$. Раскладывая (11) в ряд по степеням λ , приходим к решению задачи, полученному в [5] более сложным путем.

Замечание. В работе [2] при $n = 2$ на нагрузку накладываются ограничения — $1 < b/a < -0.187$. Это — следствие досадной арифметической ошибки: формула (3.17) в [2] должна иметь вид $x_B = C_1(1.23 + 0.23 b/a)$, и значит, $|b/a| < 1$, что включает и рассмотренный выше случай $b = 0$. Вообще, в цитируемом примере для симметричного случая при $n = 2$ следует несколько изменить постановку задачи, не фиксируя длину разрезов и расстояние между ними, что сужает общность, а определяя по выбранному отношению b/a допустимые значения λ из явного задания кривой формулами (3.17), (3.18) работы [2].

Поступила 4 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды. т. 1. М., «Наука», 1965.
2. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
3. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. Космодамианский А. С. Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Донецк. Изд-во Донецкого ун-та, 1972.
6. Шерман Д. И. Об одном способе рассмотрения краевых задач теории функций и двумерных задач теории упругости. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (К восьмидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972.
7. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.

УДК 539.3

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Л. В. Андреев, В. И. Моссаковский, Н. И. Ободан

(Днепропетровск)

С помощью принципа максимума Понтрягина решается задача об оптимальном в весовом отношении подкреплении оболочки, нагруженной неравномерным осесимметричным внешним давлением.

При постановке задач об оптимизации параметров конструкций с ограничениями, обязательно указывается класс решений, среди которых отыскивается оптимальное.