УДК 539.3

О ДАЛЬНЕЙШЕМ РАЗВИТИИ «МЕТОДА БОЛЬШИХ λ» В ТЕОРИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ

М. И. Чебаков

(Ростов-на-Дону)

Среди асимптотических методов исследования интегральных уравнений теории смешанных задач широкое распространение получил метод больших λ [1], когда решение интегральных уравнений представлено в форме асимптотического разложения по отрицательным степеням некоторого безразмерного параметра λ. Как правило, удавалось построить лишь несколько членов такого асимптотического разложения.

Ниже исследуются методом больших λ некоторые типы интегральных уравнений второго рода, для которых предлагается методика построения всех членов асимптотического разложения. Коэффициенты в разложении искомого решения по отрицательным степеням λ представлены в виде многочленов основного аргумента и для коэффициентов этих многочленов получены рекуррентные формулы. В качестве примеров рассматривается осесимметричная смешанная нестационарная задача теплопроводности для однородного полупространства и осесимметричная задача теории упругости о скручивании штампом усеченного шара.

1. Решение интегрального уравнения. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\,M\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right)d\tau+g(t)\quad(|t|\leqslant 1)\tag{1.1}$$

$$M(y)=\int_0^\infty[1-L(u)]\cos uy\,du=\sum_{k=0}^{\infty}b_k|y|^k\quad(|y|<B<\infty)\tag{1.2}$$

где $0<\lambda<\infty$ — безразмерный параметр, $g(t)$ — известная функция. Пусть ряд (1.2) сходится равномерно при $|y|<B<\infty$ (B — сколько угодно большое число).

Будем разыскивать решение интегрального уравнения (1.1) с ядром (1.2) в виде [2]

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)\,\lambda^{-n}\tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) и ряд (1.2) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим для определения $\varphi_n(t)$ рекуррентные соотношения

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1}b_i\int_{-1}^{1}\varphi_{n-i-1}(\tau)\,|t-\tau|^i\,d\tau\quad(n=1,2,\ldots),\qquad \varphi_0(t)=g(t)\tag{1.4}$$

Предположим, что $g(t)=1$. Тогда, разыскивая $\varphi_n(t)$ в виде (квадратные скобки в пределах суммирования здесь и далее означают целую часть числа)

$$\varphi_n(t)=\sum_{i=0}^{[n/2]}\eta_{n,i}t^{2i}\quad(n=1,2,\ldots)\tag{1.5}$$

подставляя (1.5) в (1.4) и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты при одинаковых степенях t^2, найдем рекуррентные формулы для определения $\eta_{n,k}$

$$\eta_{n,k}=\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{k}(2l-1)!\,b_{2l-1}\eta_{n-l,k-l}\sum_{p=0}^{2l-1}\frac{(-1)^p(2k-2l+1+p)^{-1}}{(2l-1-p)!\,p!}+\\+\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{l=2k}^{n-1}\frac{l!\,b_l}{(l-2k)!}\sum_{p=0}^{[(n-l-1)/2]}(2p+l-2k+1)^{-1}\eta_{n-l-1,p}\tag{1.6}$$

$$\eta_{n,0} = \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{n-l} b_l \sum_{p=0}^{[(n-l-1)/2]} \eta_{n-l-1,p}(2p+l+1)^{-1} \tag{1.7}$$

$$\eta_{n[n/2]} = \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{[n/2]} (2l-1)!\, b_{2l-1} \eta_{n-2l,[n/2]-l} \sum_{p=0}^{2l-1} \frac{(-1)^p (n-2l+1+p)^{-1}}{(2l-1-p)!\, p!} \tag{1.8}$$

В (1.6) $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, если n нечетное, и $k = 1, 2, \ldots, [(n-1)/2]$, если n четное; в (1.8) n четное.

Аналогичным образом для больших λ может быть построено решение уравнения (1.1), (1.2) в случае, когда $g(t) = t^m$ (m — любое натуральное число), а также в случае, когда $g(t)$ представимо в виде ряда по положительным степеням аргумента t.

Теорема 1. Если $g(t) \in H_1^{1/2}(-1,1)$ и справедливо неравенство

$$\lambda > \lambda^\circ = \pi^{-1}[2b_0^* + d_1 + \sqrt{(d_1 + 2b_0^*)^2 + 2d_2\pi}] \tag{1.9}$$

$$d_1 = \sup_{|\varepsilon| \leqslant 1} \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \int_{1/|\varepsilon|}^{\infty} |1 - L(u)|\, du$$

$$d_2 = \sup_{|\varepsilon| \leqslant 1} \sqrt{2|\varepsilon|} \int_0^{1/|\varepsilon|} |1 - L(u)|\, du, \quad b_0^* = \int_0^{\infty} |1 - L(u)|\, du$$

тогда решение интегрального уравнения (1.1) с ядром (1.2) в классе $H_1^{1/2}(-1,1)$ существует, единственно и может быть получено методом больших λ.

Здесь $H_1^{1/2}(-1,1)$ — пространство функций, первая производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем $^1/_2$ на отрезке $(-1,1)$.

Если в интегральном уравнении (1.1)

$$M(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^{2n} \quad (|y| < y_0) \tag{1.10}$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{-2n} t^{2n} \quad (|t| < t_0) \tag{1.11}$$

тогда, аналогично предыдущему, решение уравнения (1.1) с ядром (1.10) и правой частью (1.11) для больших значений λ может быть построено в виде

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-2j} \sum_{i=0}^{j} \alpha_{ji} t^{2i} + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-(2j+1)} \sum_{i=0}^{j} \beta_{ji} t^{2i} \tag{1.12}$$

где α_{ji} и β_{ji} определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$\alpha_{ji} = \frac{2}{\pi(2i)!} \sum_{k=i}^{j-1} \frac{b_k (2k)!}{(2k-2i)!} \sum_{m=0}^{j-1-k} \frac{\beta_{j-1-k,m}}{2m+2k-2i+1} \quad (i = 0,1,\ldots,j-1) \tag{1.13}$$

$$\beta_{ji} = \frac{2}{\pi(2i)!} \sum_{k=i}^{j} \frac{b_k (2k)!}{(2k-2i)!} \sum_{m=0}^{j-k} \frac{\alpha_{j-k,m}}{2m+2k-2i+1} \quad (i = 0,1,\ldots,j)$$

$$\alpha_{jj} = a_j$$

2. Смешанная задача теплопроводности. Рассмотрим осесимметричную задачу теплопроводности для однородного полупространства, когда на границе в круге радиуса a задана изменяющаяся во времени t температура

$$T(r, 0, t) = T_0 e^{i\omega t} \quad (T_0 = \text{const},\ \omega = \text{const}) \tag{2.1}$$

а на остальной части поверхности отсутствует теплообмен.

Задача определения осесимметричного температурного поля в цилиндрических координатах $T(r, z, t)$ в этом случае (считаем процесс установившимся) равносильна [2, 3] интегральному уравнению (1.1), (1.2) при условии $g(t) = 1$,

$$L(u) = u\,[u^2 + (1+i)^2]^{-1/2}, \qquad \lambda = \sqrt{2\varkappa}\,(a\sqrt{\omega})^{-1} \tag{2.2}$$

$$b_{2k+2} = -\sqrt{2}\,\frac{2^{k+1}\,i^{k+3/2}}{(2k+1)!!\,(2k+3)!!} \tag{2.3}$$

$$b_{2k+1} = -\frac{\pi\, i^{k+1}}{2^{k+1}k!\,(k+1)!}, \qquad b_0 = -(1+i) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

($\varkappa$ — коэффициент температуропроводности).

Таким образом, согласно п. 1, решение интегрального уравнения задачи для случая больших λ представимо в виде (1.3), (1.5), где $\eta_{n,k}$ определяются из рекуррентных соотношений (1.6) — (1.8)

Величина суммарного теплового потока, проходящего через границу полупространства внутри круга $r \leqslant a$, для больших значений λ определяется по формуле

$$Q = 4aT_0\varkappa_0 e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{N}\lambda^{-n}\sum_{i=0}^{[n/2]}\frac{\eta_{n,i}}{2i+1} \qquad (N\to\infty) \tag{2.4}$$

Решение поставленной здесь задачи можно получить также методом малых λ, изложенным в работе [2]. Для малых λ будем иметь ($\Phi(-1/2, 1; -2ix)$ — вырожденная гипергеометрическая функция)

$$\varphi(t) = aT_0\frac{\pi}{4}F\left(\frac{1+t}{2}\right)F\left(\frac{1-t}{2}\right), \qquad F(x) = \Phi\left(-\frac{1}{2}, 1; -2ix\right) \tag{2.5}$$

$$Q = \pi a T_0\varkappa_0 e^{i\omega t}\left(1 + \frac{1+i}{\lambda}\right) \tag{2.6}$$

Введем в рассмотрение величины Q_1 и Q_2 по формуле

$$Q_1 + iQ_2 = Q\,(aT_0\varkappa_0)^{-1}e^{-i\omega t} \tag{2.7}$$

В табл. 1 приведены результаты числовых расчетов величин Q_1 и Q_2 для различных значений параметра λ, вычисленные методом больших λ по формулам (2.4), (2.7) (2 и 3 колонки), причем все приведенные цифры являются точными, и методом малых λ по формулам (2.6), (2.7) (4 и 5 колонки).

Как видно из табл. 1, результаты методов хорошо согласуются между собой и позволяют сделать вывод о том, что при $\lambda < 0.8$ для решения задачи следует пользоваться методом малых λ, а при $\lambda \geqslant 0.8$ — методом больших λ.

Отметим, что при вычислении величины Q методом больших λ относительная погрешность равна 0.001% при $\lambda = 0.8$, если в (2.4) $N = 25$, т. е. если в (2.4) удержано по λ 25 членов ряда; при $\lambda = 1.3$, если $N = 10$; при $\lambda = 2.5$, если $N = 4$.

3. Кручение штампом усеченного шара. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости о кручении усеченного шара жестко прикрепленным к его плоской границе круговым цилиндрическим штампом. При этом будем считать, что сферическая часть поверхности шара неподвижна.

Таблица 1

λ	Q_1	Q_2	Q_1	Q_2	λ	Q_1	Q_2	Q_1	Q_2
0.80	6.9244	3.9943	7.0686	3.9270	1.00	6.4876	3.0003	6.2832	3.1416
0.85	6.8172	3.6778	6.8376	3.6960	1.50	5.7070	1.8996	5.2360	2.0944
0.90	6.7054	3.4151	6.6323	3.4907	2.00	5.2828	1.3928	4.7124	1.5708
0.95	6.5946	3.1924	6.4485	3.3069					

Эта задача рассматривалась в работах [4,5], где она была сведена к интегральному уравнению второго рода. Решение последнего в них не строилось. В работе [2] построено приближенное (замкнутое) решение задачи на основе специальной аппроксимации ядра интегрального уравнения, а в работе [6] построено ее асимптотическое решение в случае, когда радиус штампа близок к радиусу среза.

Ниже будет построено «точное» решение задачи методом, изложенным в п. 1, для случая, когда радиус штампа в достаточной мере меньше радиуса среза шара.

Как известно [2], поставленная задача может быть сведена к интегральному уравнению (1.1) с ядром (3.1) и правой частью (3.2) (c — постоянная, определяемая из условия $\varphi(1) = 0$)

$$M(y) = \int_0^\infty [1 - \operatorname{th} \pi u \operatorname{th} \gamma u] \cos uy\, du \tag{3.1}$$

$$g(t) = \frac{\pi c_0}{2} \operatorname{ch} \frac{t}{2\lambda} - \sqrt{2} \operatorname{ch}^{-1} \frac{t}{2\lambda} \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 2 \operatorname{Arth} \frac{a}{b} = \alpha_0, \qquad \gamma = \arcsin \frac{b}{R}$$

Здесь $\gamma \in [0, \pi]$ — параметр, характеризующий степень усечения шара, a — радиус штампа, b — радиус среза, R — радиус шара.

Ядро (3.1) и правую часть (3.2) можно разложить соответственно в ряды (1.10) и (1.11), где

$$b_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\infty [1 - \operatorname{th} \pi u \operatorname{th} \gamma u]\, u^{2n} du \tag{3.3}$$

$$a_n' = c_0 a_n^* - a_n^{**}, \qquad a_0 = \frac{\pi c_0}{2} - \sqrt{2}$$

$$a_n^* = \frac{\pi}{2(2n)!}, \qquad a_n^{**} = \frac{4\sqrt{2}(-1)^n}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Таким образом, в случае больших значений λ решение интегрального уравнения (1.1) с ядром (3.1) и правой частью (3.2) представимо в виде (1.12), (1.13) при условии (3.3).

Введем обозначение

$$\varphi(t) = c_0 \varphi^*(t) - \varphi^{**}(t)$$

естественным образом связанное с представлением правой части (3.2) интегрального уравнения. Тогда из условия $\varphi(1) = 0$

$$c_0 = \varphi^{**}(1) [\varphi^*(1)]^{-1}$$

Для удобства численного определения величины касательных напряжений под штампом [2] методом больших λ представим их в виде

$$\tau_{\varphi z}(r, 0) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} G\varepsilon\lambda (1 + \operatorname{ch} \alpha)^{3/2} \operatorname{sh} \alpha \left\{ \frac{\varphi'(1)}{\operatorname{sh} \alpha_0 \sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - \operatorname{ch} \alpha}} - \right. \tag{3.4}$$

$$- \frac{2\sqrt{\operatorname{ch} \alpha_0 - \operatorname{ch} \alpha}}{\operatorname{sh} \alpha_0} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\varphi'(\tau\lambda)}{\operatorname{sh} \tau} \right]_{\tau = \alpha_0} +$$

$$+ \int_\alpha^{\alpha_0} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varphi'(\tau\lambda)}{\operatorname{sh} \tau} \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \tau} \right] \sqrt{\operatorname{ch} \tau - \operatorname{ch} \alpha}\, d\tau$$

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=0}^\infty \mu_i \tau^{2i}, \qquad \mu_i = \sum_{j=i}^\infty \lambda^{-2j} (\alpha_{ji} + \lambda^{-1} \beta_{ji})$$

Здесь $\alpha = \operatorname{Arth}(r / b)$ (r — расстояние точек полупространства от оси симметрии), G — модуль сдвига, ε — угол поворота штампа.

Таблица 2

γ	$\frac{a}{b}$	r / b: 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
π	0.1	0.1280	0.4005	0.7352	1.248	2.629
	0.5	0.1308	0.4094	0.7521	1.279	2.698
	0.7	0.1356	0.4252	0.7840	1.341	2.864
2	0.1	0.1280	0.4005	0.7353	1.248	2.630
	0.5	0.1326	0.4152	0.7628	1.297	2.737
	0.7	0.1411	0.4425	0.8163	1.397	2.985
$\frac{\pi}{2}$	0.1	0.1280	0.4006	0.7354	1.249	2.630
	0.5	0.1350	0.4224	0.7758	1.318	2.779
	0.7	0.1447	0.4529	0.8329	1.426	3.191
1	0.1	0.1281	0.4009	0.7359	1.249	2.632
	0.5	0.1456	0.4545	0.8303	1.401	2.949
0.5	0.1	0.1287	0.4028	0.7394	1.255	2.644
	0.3	0.1509	0.4692	0.8507	1.418	2.921

Связь между моментом M, действующим на штамп, и углом поворота ε штампа при больших λ определится соотношением

$$M = -2\sqrt{2}\,G\varepsilon a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i}\mu_i \int_0^{\alpha_0} \frac{t^{2i}\,dt}{\operatorname{ch}^3(t/2)}$$

В табл. 2 для различных γ и λ приведены значения безразмерной величины

$$\tau^* = \tau_{\varphi z}(r, 0)\,(G\varepsilon)^{-1}$$

подсчитанной на ЭЦВМ по формулам (3.4), (1.12), (1.13) с точностью до 0.01%.

Если через ρ обозначить кратчайшее расстояние точек штампа при $r = a$ до неподвижной сферической границы шара, то, как показывают расчеты, метод больших λ дает решение задачи, когда отношение ρ / a достаточно велико.

Данные табл. 2. достаточно хорошо согласуются с соответствующими данными, приведенными для этой задачи в таблицах работ [2,6].

Автор благодарит В. М. Александрова за внимание к данной работе.

Поступила 17 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Смешанные задачи механики сплошной среды, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера — Фока. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
3. *Партон В. З.* Осесимметричная температурная задача для пространства с дискообразной трещиной. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
4. *Бабłоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
6. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Об одном способе решения парных интегральных уравнений. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.