

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШТАМПА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

Н. М. Бородачев

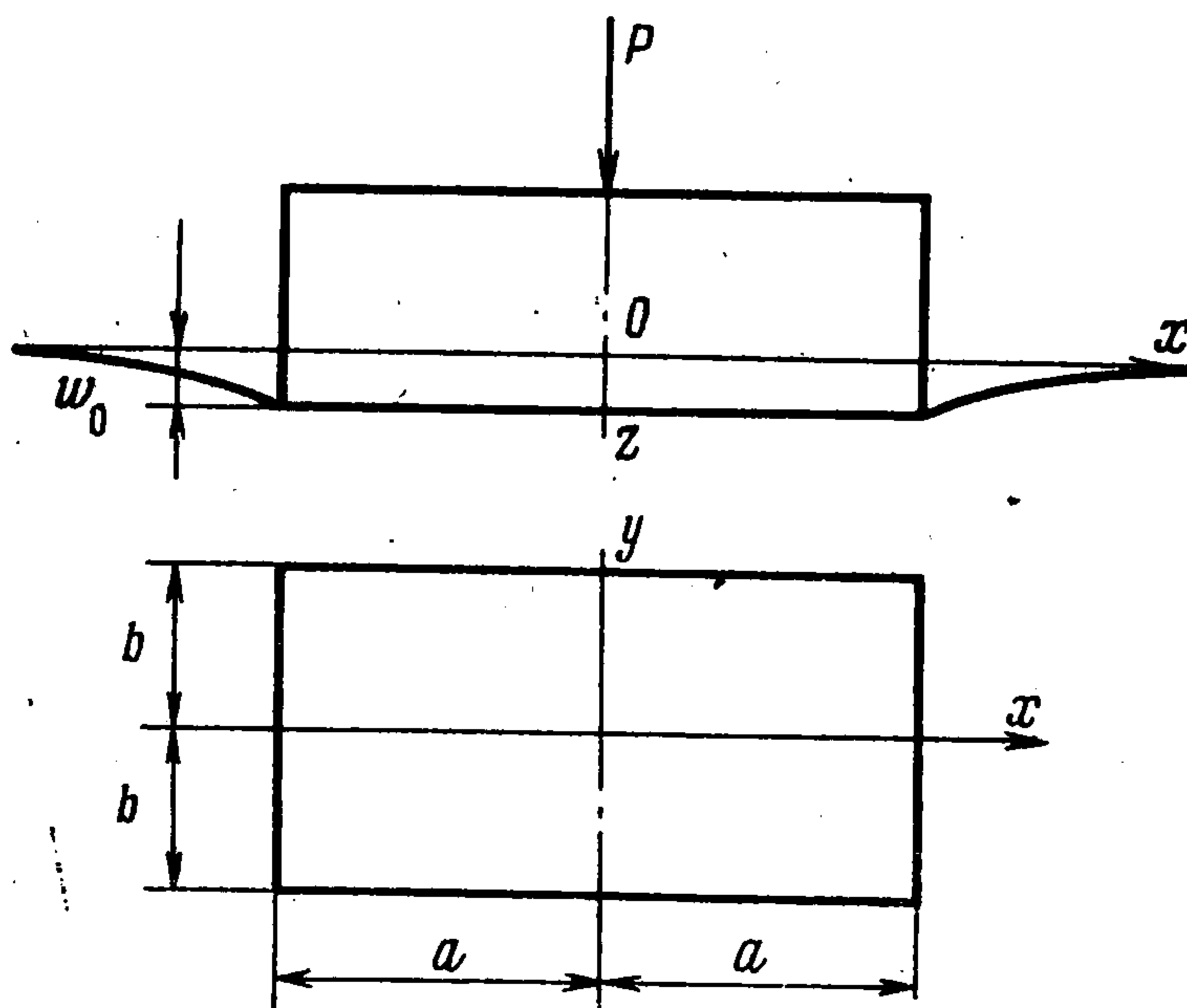
(Киев)

Предлагается метод решения задачи о вдавливании прямоугольного штампа с произвольным отношением сторон в упругое изотропное полупространство, основанный на сведении задачи к двумерным парным интегральным уравнениям. Указан метод сведения этих уравнений к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Получены формулы для определения давления на площадке контакта и перемещения штампа.

Контактным задачам для прямоугольного штампа посвящены работы [1-4]. Вопрос о вдавливании штампа с основанием в виде узкого прямоугольника в упругое полупространство изучался в [5-7].

Способ решения, примененный в данной статье, является дальнейшим развитием и обобщением (на случай двумерных парных уравнений) метода, использованного в [7]

1. Воспользуемся прямоугольной системой координат x, y, z , ось z которой перпендикулярна к границе полупространства. Пусть штамп,



Фиг. 1

имеющий в плане форму прямоугольника (фиг.1), вдавливается в упругое изотропное полупространство $z \geq 0$ под действием вертикальной силы P , направленной вдоль оси z и проходящей через центр тяжести штампа. Предполагаем, что штамп, имеющий плоское основание, перемещается строго поступательно в направлении оси z , и считаем, что трение между штампом и полупространством не возникает, а нагрузка на полупространство вне площадки контакта отсутствует.

Граничные условия при $z = 0$ в данном случае имеют вид (w — проекция вектора перемещения на ось z)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} w(x, y, 0) &= w_0 \quad (|x| \leq a, |y| \leq b) \\ \sigma_z(x, y, 0) &= 0 \quad (|x| > a, |y| > b) \\ \tau_{xz}(x, y, 0) &= \tau_{yz}(x, y, 0) = 0 \quad (-\infty < x, y < \infty) \end{aligned}$$

Применяя к уравнениям равновесия Ламе в прямоугольных координатах двумерное интегральное преобразование Фурье, находим

$$(1.2) \quad w(x, y, 0) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} p^{**}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

$$p(x, y) = -\sigma_z(x, y, 0)$$

(p^{**} — двумерная трансформанта Фурье реактивного давления p). Формула (1.2) справедлива при условии, что касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} при $z = 0$ отсутствуют.

На основании формулы обращения для двумерного преобразования Фурье имеем

$$(1.3) \quad p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p^{**}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1) и используя формулы (1.2), (1.3), приходим к двумерным парным интегральным уравнениям

$$(1.4) \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{p^{**}(\alpha, \beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta = c \quad (0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b)$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p^{**}(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta = 0 \quad (a < x < \infty, \quad b < y < \infty)$$

$$c = \frac{\pi E w_0}{4(1 - \nu^2)}$$

При составлении парных уравнений (1.4) были учтены также условия симметрии задачи относительно осей x и y .

Решая уравнения (1.4), можно найти функцию $p^{**}(\alpha, \beta)$, а затем, используя (1.3), получим интересующее нас распределение реактивного давления $p(x, y)$ по площадке контакта.

2. Решение парных интегральных уравнений (1.4) ищем в виде

$$(2.1) \quad p^{**}(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \frac{J_{\lambda+2m}(\alpha a) J_{\mu+2n}(b\beta)}{(2\alpha)^{\lambda} (2\beta)^{\mu}} \quad \left(\lambda, \mu > -\frac{1}{2} \right)$$

где $J_n(x)$ — бесселева функция первого рода. Далее, известно [8], что ($C_n^{\nu}(x)$ — многочлен Гегенбауэра)

$$(2.2) \quad \int_0^{\infty} x^{-\nu} J_{\nu+2n}(ax) \cos(yx) dx =$$

$$= \begin{cases} (-1)^n 2^{\nu-1} a^{-\nu} (2n)! \Gamma(\nu) [\Gamma(2\nu + 2n)]^{-1} (a^2 - y^2)^{\nu-1/2} C_{2n}^{\nu}(y/a) & (0 < y < a) \\ 0 & (a < y < \infty) \end{cases}$$

$$\operatorname{Re} \nu > -1/2, \quad a > 0$$

Подставляя (2.1) во второе уравнение (1.4) и учитывая (2.2), убеждаемся в том, что второе уравнение (1.4) удовлетворяется. Подставляя за

тем (2.1) в первое уравнение (1.4), получаем

$$(2.3) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{nm} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{J_{\lambda+2m}(a\alpha) J_{\mu+2n}(b\beta)}{(2\alpha)^{\lambda} (2\beta)^{\mu} (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \cos x\alpha \cos y\beta d\alpha d\beta = c$$

($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$)

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \cos x\alpha \cos y\beta &= 2^{2(\lambda+\mu)} \Gamma(\lambda) \Gamma(\mu) a^{-\lambda} b^{-\mu} \times \\ &\times \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{i+k} (\lambda + 2i) (\mu + 2k) C_{2i}^{\lambda} \left(\frac{x}{a}\right) C_{2k}^{\mu} \left(\frac{y}{b}\right) \times \\ &\times \frac{J_{\lambda+2i}(a\alpha) J_{\mu+2k}(b\beta)}{(2\alpha)^{\lambda} (2\beta)^{\mu}} \end{aligned}$$

С использованием этого выражения формула (2.3) принимает вид

$$(2.4) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} E_{ik} C_{2i}^{\lambda} \left(\frac{x}{a}\right) C_{2k}^{\mu} \left(\frac{y}{b}\right) = 1 \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$$

$$E_{ik} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}^{(1)} D_{mnik}^{(1)}$$

$$B_{mn}^{(1)} = 2^{2(\lambda+\mu)} \Gamma(\lambda) \Gamma(\mu) a^{-\lambda} b^{-\mu} c^{-1} B_{mn}$$

$$D_{mnik}^{(1)} = (-1)^{i+k} (\lambda + 2i) (\mu + 2k) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{J_{\lambda+2m}(a\alpha) J_{\mu+2n}(b\beta) J_{\lambda+2i}(a\alpha) J_{\mu+2k}(b\beta)}{(2\alpha)^{2\lambda} (2\beta)^{2\mu} (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} d\alpha d\beta$$

Разлагая правую часть в первой формуле (2.4) по многочленам Гегенбауэра, находим

$$(2.5) \quad E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k = 0 \\ 0 & \text{при } i \neq 0 \text{ или } k \neq 0 \end{cases}$$

Положим

$$(2.6) \quad X_{mn} = a^{2\lambda-1} b^{2\mu} B_{mn}^{(1)}, \quad D_{mnik}^{(1)} = a^{2\lambda-1} b^{2\mu} D_{mnik}$$

Тогда второе выражение из (2.4) примет вид

$$(2.7) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_{mnik} X_{mn} = E_{ik} \quad (ik = 0, 1, 2, \dots)$$

Таким образом, получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему (2.7), можно найти коэффициенты X_{mn} . Найти точное решение бесконечной системы уравнений (2.7), по видимому, невозможно. Однако можно получить приближенное решение этой системы с помощью способа редукции или метода последовательных приближений.

Подставляя выражения для $p^{**}(\alpha, \beta)$ из (2.1) в формулу обращения для двумерного косинус-преобразования Фурье и учитывая соотношение

(2.2), находим

$$(2.8) \quad p(x, y) = p_1(x, y)p_2(x, y) \quad (0 \leq x < a, \quad 0 \leq y < b)$$

$$p_1(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\lambda-1/2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\mu-1/2}$$

$$p_2(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} C_{2m}^{\lambda} \left(\frac{x}{a}\right) C_{2n}^{\mu} \left(\frac{y}{b}\right)$$

$$(2.9) \quad p(x, y) = 0 \quad (a < x < \infty, \quad b < y < \infty)$$

$$(2.10) \quad B_{mn} = (-1)^{m+n} 2\pi a^{1-\lambda} b^{1-\mu} \frac{\Gamma(2\lambda + 2m) \Gamma(2\mu + 2n)}{(2m)! (2n)! \Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)} A_{mn}$$

Формула (2.8) устанавливает закон распределения давления $p(x, y)$ по площадке контакта прямоугольного штампа и упругого изотропного полупространства. Сила, действующая на штамп

$$(2.11) \quad P = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b p(x, y) dy = 2^{2(1-\lambda-\mu)} \pi^2 ab A_{00} \frac{\Gamma(2\lambda) \Gamma(2\mu)}{\lambda\mu [\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)]^2}$$

При выводе этой формулы были использованы соотношения [9]

3. Используя формулы (2.4), (2.6), (2.8), находим

$$(3.1) \quad A_{mn} = (-1)^{m+n} \frac{c (2m)! (2n)!}{2^{1+2\lambda+2\mu} \pi b \Gamma(2\lambda + 2m) \Gamma(2\mu + 2n)} X_{mn}, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

Зная коэффициенты A_{mn} , по формуле (2.8) можно определить давление $p(x, y)$ в любой точке площадки контакта. Коэффициенты A_{mn} связаны формулой (3.1) с коэффициентами X_{mn} , которые можно найти из системы уравнений (2.7).

В систему (2.7) входят величины D_{mnik} . Используя (2.4), (2.6) и вводя новые переменные $x = a\alpha$, $y = b\beta$, имеем

$$(3.2) \quad D_{mnik} = (-1)^{i+k} (\lambda + 2i) (\mu + 2k) \times \\ \times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{J_{\lambda+2m}(x) J_{\lambda+2i}(x) J_{\mu+2n}(y) J_{\mu+2k}(y)}{(2x)^{2\lambda} (2y)^{2\mu} (\epsilon^2 x^2 + y^2)^{1/2}} dx dy \quad (\epsilon = b/a)$$

Определим глубину вдавливания штампа w_0 под действием силы P . Используя выражение для c в (1.4), формулы (2.11) и (3.1), окончательно находим

$$(3.3) \quad w_0 = 2^{1+4(\lambda+\mu)} \frac{\lambda\mu [\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)]^2}{\pi^2 X_{00}} \frac{P(1-\nu^2)}{Ea}$$

Представляет интерес вычислить давление p при $x = 0$ и $y = 0$ (под центром штампа). Имеем

$$p(0, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} C_{2m}^{\lambda}(0) C_{2n}^{\mu}(0)$$

Используя известный результат [10]

$$C_n^{\lambda}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — нечетное} \\ (-1)^m \frac{(\lambda)_m}{m!}, & \text{если } n = 2m \text{ — четное} \end{cases}$$

$((\lambda)_m = \Gamma(\lambda + m) / \Gamma(\lambda)$ — символ Похгаммера) получаем окончательно

$$p(0, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} A_{mn} \frac{(\lambda)_m (\mu)_n}{m!n!}$$

При вычислении давления $p(x, y)$ в любой точке площадки контакта используются выражения для многочленов Гегенбауэра [9].

4. Выясним вопрос о характере особенностей реактивного давления $p(x, y)$ под штампом при приближении к границе и углам площадки контакта. В основу рассмотрения положим формулу (2.8). Будем считать, что $p_1(x, y)$ содержит в себе все особенности функции $p(x, y)$, а $p_2(x, y)$ не имеет особенностей (этого можно добиться за счет соответствующего выбора величин λ и μ). Тогда коэффициенты A_{mn} будут быстрее стремиться к нулю (при увеличении m и n) и потребуется меньше членов ряда, входящего в $p_2(x, y)$, чтобы обеспечить заданную точность.

Очевидно, что величины λ и μ , входящие в формулу для $p_1(x, y)$, зависят от параметра $\varepsilon = b/a$. Рассматривая предельный случай $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к выводу, что $\lambda = 1/2$, $\mu = 0$. Аналогично, при $\varepsilon \rightarrow \infty$ получаем $\lambda = 0$, $\mu = 1/2$. Этим условиям можно удовлетворить, если принять

$$(4.1) \quad \lambda = 1/2 e^{-\beta\varepsilon}, \quad \mu = 1/2 e^{-\beta/\varepsilon}$$

где β — некоторая постоянная, которая будет определена ниже.

Выясним вопрос о характере особенности реактивного давления $p(x, y)$ под штампом при $x \rightarrow a$ и $y \rightarrow b$, т. е. при приближении к углу площадки контакта. Имеем на основании (2.8)

$$p(x, y) \approx \alpha \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\lambda-1/2} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\mu-1/2} \quad (x \rightarrow a, y \rightarrow b)$$

$$\alpha = 2^{\lambda+\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \frac{(2\lambda)_{2m} (2\mu)_{2n}}{(2m)! (2n)!}$$

При записи выражения для α было учтено, что [10]

$$C_n^\nu(1) = (2\nu)_n / n!$$

Введем новые переменные $x_1 = 1 - x/a = r \cos \varphi$, $y_1 = 1 - y/b = r \sin \varphi$. Получим

$$(4.2) \quad p(r, \varphi) \approx \alpha_0(\varphi) r^{-\psi} \quad (r \rightarrow 0) \quad (\varphi \neq 0, \varphi \neq \pi/2)$$

$$\alpha_0(\varphi) = \alpha (\cos \varphi)^{\lambda-1/2} (\sin \varphi)^{\mu-1/2}$$

$$\psi = 1 - \lambda - \mu = 1 - 1/2 (e^{-\beta\varepsilon} + e^{-\beta/\varepsilon})$$

Формула (4.2) устанавливает характер особенности реактивного давления под прямоугольным штампом при приближении к углу площадки контакта вдоль любой линии (наклоненной к оси x_1 под углом φ) при условии, что $0 < x_1 / y_1 < \infty$.

Используя результат Нобла [11], можно дать оценку величины ψ для квадратного штампа. При $\varepsilon = 1$ получаем $\psi = 0,7$. Этот результат позволяет оценить постоянную β , для которой находим $\beta \approx 1.204$. Следовательно, можно принять $\beta = 1/4 e^{\pi/2} = 1.2026$.

Таким образом, величина ψ , входящая в формулы (4.2), полностью определена. На фиг. 2 приведен график зависимости ψ от параметра ε .

Выясним вопрос о характере особенности реактивного давления

$p(x, y)$ под штампом при $y \rightarrow b$, т. е. при приближении к границе площадки контакта (к стороне штампа, параллельной оси x). В этом случае на основании (2.8) имеем

$$(4.3) \quad p(x, y) \approx \tilde{\alpha}_1(x) \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{-\xi}, \quad \xi = \frac{1}{2} - \mu = \frac{1}{2} (1 - e^{-\beta\varepsilon^{-1}}) \quad (y \rightarrow b)$$

$$\tilde{\alpha}_1(x) = 2^{\mu-1/2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\lambda-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \frac{(2\mu)_{2n}}{(2n)!} C_{2m}^{\lambda} \left(\frac{x}{a}\right)$$

Формула (4.3) справедлива, когда x не стремится к $\pm a$.

Если одновременно $x \rightarrow a$ и $y \rightarrow b$, то необходимо пользоваться формулой (4.2). Для случая, когда $x \rightarrow a$ (y не стремится к b), получается формула, подобная (4.3). На фиг. 2 изображен график зависимости ξ от ε .

5. Формулу (3.2) для коэффициентов D_{mnik} приведем к виду, более удобному для вычислений. Произведем замену переменных ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$), а затем дважды используем формулу Неймана [10]

$$J_\nu(z) J_\mu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{\nu+\mu}(2z \cos \theta) \cos [(\mu-\nu)\theta] d\theta, \quad \operatorname{Re}(\nu + \mu) > -1$$

Получим

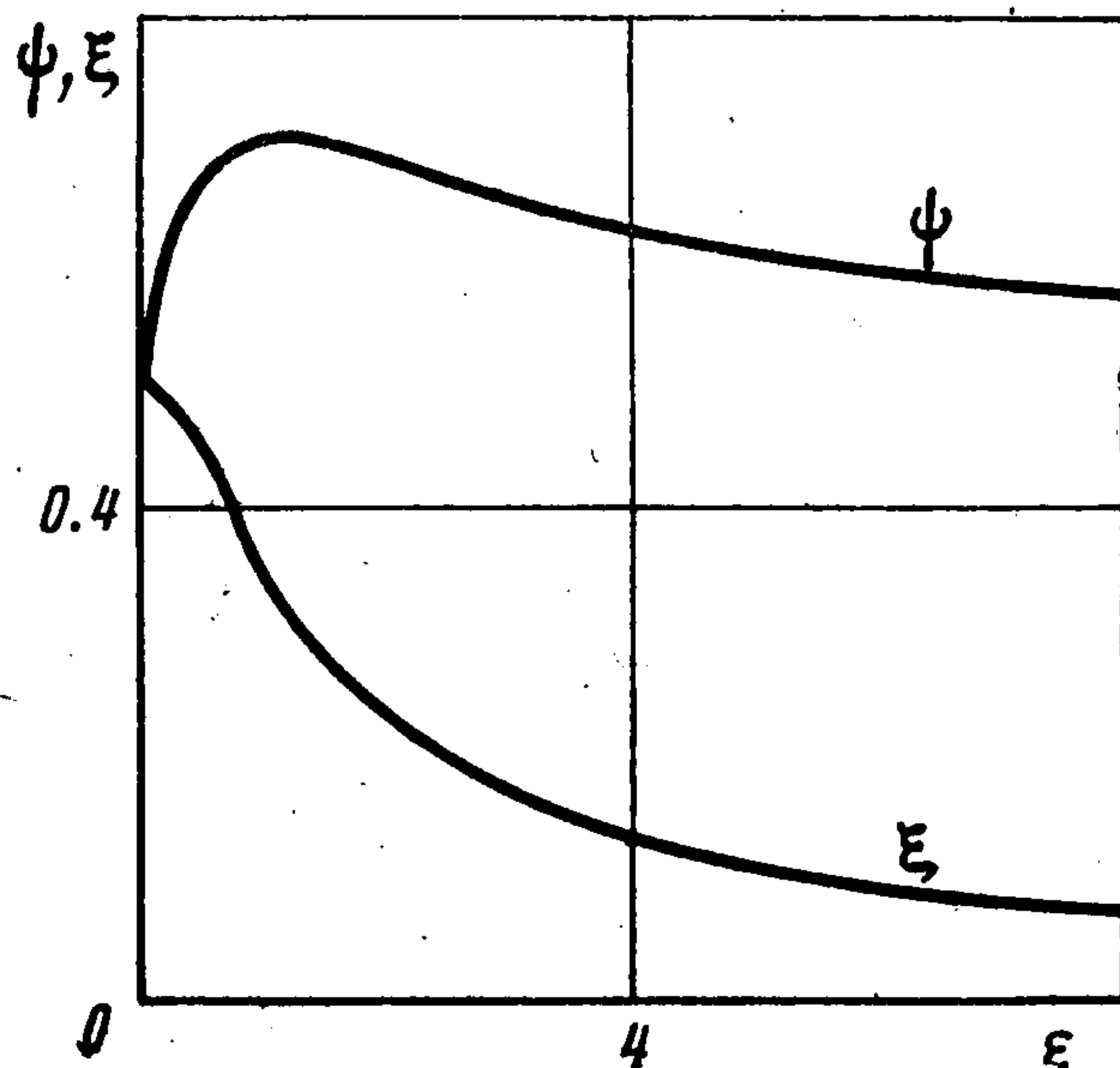
$$(5.1) \quad D_{mnik} = (-1)^{i+k} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{-2\lambda} (\sin \varphi)^{-2\mu} d\varphi \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \cos [(2n-2k)\theta] d\theta \int_0^{\pi/2} \cos [(2m-2i)\psi] g(\varphi, \theta, \psi) d\psi$$

$$g(\varphi, \theta, \psi) = 2^{-2(\lambda+\mu)} e^{2\lambda-1} (\lambda+2i) (\mu+2k) \int_0^{\infty} r^{-2(\lambda+\mu)} \times$$

$$\times J_{2\lambda+2m+2i}(2\varepsilon^{-1}r \cos \varphi \cos \psi) J_{2\mu+2n+2k}(2r \sin \varphi \cos \theta) dr$$

Интеграл, входящий в выражение для $g(\varphi, \theta, \psi)$, вычислим воспользовавшись интегралом Вебера — Шафхейтлина [12]. Находим

$$(5.2) \quad g(\varphi, \theta, \psi) = \frac{e^{2n+2k}}{2^{2\lambda+2\mu+1}} (\lambda+2i) (\mu+2k) \times \\ \times \frac{\Gamma(m+n+i+k+1/2)}{\Gamma(2\mu+2n+2k+1) \Gamma(2\lambda+m+i-n-k+1/2)} \times$$



Фиг. 2

$$\begin{aligned} & \times \frac{(\sin \varphi \cos \theta)^{2(\mu+n+k)}}{(\cos \varphi \cos \psi)^{2(n+k-\lambda)+1}} F \left(m+n+i+k+\frac{1}{2}, \right. \\ & \left. n+k-m-i-2\lambda+\frac{1}{2}; 2\mu+2n+2k+1; \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \psi} \right) \\ & (0 < \varepsilon \operatorname{tg} \varphi \cos \theta < \cos \psi) \\ g(\varphi, \theta, \psi) &= \frac{\varepsilon^{-2m-2i-1}}{2^{2\lambda+2\mu+1}} (\lambda+2i)(\mu+2k) \times \\ & \times \frac{\Gamma(m+n+i+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda+2m+2i+1)\Gamma(2\mu+n+k-m-i+\frac{1}{2})} \times \\ & \times \frac{(\cos \varphi \cos \psi)^{2(\lambda+m+i)}}{(\sin \varphi \cos \theta)^{2(m+i-\mu)+1}} F \left(m+n+i+k+\frac{1}{2}, \right. \\ & \left. m+i-n-k-2\mu+\frac{1}{2}; 2\lambda+2m+2i+1; \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \theta} \right) \\ & (0 < \cos \psi < \varepsilon \operatorname{tg} \varphi \cos \theta) \end{aligned}$$

Коэффициенты D_{mnik} , определяемые формулами (5.1) и (5.2), теперь можно вычислить с помощью ЭВМ, заменяя интегралы, входящие в (5.1), по одной из квадратурных формул. Зная D_{mnik} , можно найти приближенное решение системы уравнений (2.7) и тем самым определить коэффициенты X_{mn} . Затем по формуле (3.3) можно найти глубину вдавливания штампа w_0 . С помощью соотношения (3.1) нетрудно перейти к коэффициентам A_{mn} . Реактивное давление $p(x, y)$ в любой точке площадки контакта можно определить по формуле (2.8).

Поступила 13 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании. М., Гостройиздат, 1953.
2. Леонов М. Я., Пасацкий С. Л., Иващенко А. Н. Расчет фундамента квадратного в плане. В сб.: Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении, вып. 4. Киев, Изд-во АН УССР, 1956.
3. Белик Г. И., Рвачев В. Л. О характере распределения реактивного давления под прямоугольной пластинкой, лежащей на упругом полупространстве, модуль упругости которого есть степенная функция глубины. В сб.: Теория пластин и оболочек. Киев, Изд-во АН УССР, 1962.
4. Noble B. The numerical solution of the singular integral equation for the charge distribution on a flat rectangular lamina. Sympos. numerical Treatment ordinary differential equations, integral and integro-differential equations. (Proc. Rome Sympos. 20—24 september 1960), Berlin — Stuttgart, Birkhanser, 1960.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
6. Бородачев Н. М. Вдавливание штампа с основанием в виде узкого прямоугольника в упругое полупространство. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
7. Бородачев Н. М., Галин Л. А. Контактная задача для штампа с основанием в виде узкого прямоугольника. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 1, М., «Наука», 1969.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1974.
11. Noble B. The potential and charge distribution near the tip of a flat angular sector. NYU EM-135, July, 1959.
12. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. М., Изд-во иностр. лит., 1949.