

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА СО ЩЕЛЬЮ

А. Н. Мартиросян

(Ереван)

Рассматривается нестационарная пространственная задача о движении изотропной упругой среды при наличии трещины вдоль полуплоскости. В начальный момент времени на обоих берегах полуплоскости действуют мгновенные сосредоточенные нормальный и касательный импульсы. Решение для периодической во времени задачи определяется методом Винера — Хопфа, который в теории колебаний крыла применялся в [1], хотя процесс решения (как и постановка) задачи в [1] отличается от хода решения данной работы. Далее производится обратное преобразование по времени, что позволяет найти решение нестационарной задачи сразу во всем пространстве в форме Смирнова — Соболева.

Задачи неустановившегося движения упругой сплошной среды рассматривались в работах [2-5]. Решение ряда смешанных динамических задач для жидкой или упругой среды дано в работах [1, 3, 6, 7].

1. Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в пространственном случае при отсутствии массовых сил имеют вид

$$(1.1) \quad \partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 = (a^2 - b^2) \nabla \theta + b^2 \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \theta = \nabla \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

Вначале рассмотрим следующую периодическую во времени сингулярную граничную задачу для полубесконечного разреза ($z = 0, -\infty < x < \infty$):

$$(1.2) \quad \sigma_{zz} = \rho \left[(a^2 - 2b^2) \theta + 2b^2 \frac{\partial v_3}{\partial z} \right] = P \delta(x + x_0) \delta(y + y_0) \exp(-i\omega t)$$

$$y < 0, \quad v_3 = 0, \quad y > 0$$

$$\sigma_{xz} = \rho b^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) = Q \delta(x + x_0) \delta(y + y_0) \exp(-i\omega t)$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$\sigma_{yz} = \rho b^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) = V \delta(x + x_0) \delta(y + y_0) \exp(-i\omega t)$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$v_{1,2,3} = O(R_1^{1/2}), \quad R_1 = \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow 0 \quad (\text{условие на ребре})$$

Здесь x_0, y_0 — положительные постоянные, $\delta(x)$ — дельта-функция, ρ — плотность упругой среды, P, Q, V — постоянные. В силу граничных условий можно считать симметричной относительно плоскости xOy при-

чем $v_{1, 2}$ — четные, а v_3 — нечетная функция, и ставить задачу для полупространства $z \geq 0$.

Решение задачи (1.1), (1.2) будем искать в виде $(A_1^{(1)}(\alpha, \beta))$ — неизвестная функция)

$$(1.3) \quad v_j = v_j^\circ(x, y, z) \exp(-i\omega t)$$

$$v_i^\circ = \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} A_j^n \exp(i\alpha x + i\beta y + iz\gamma_n) d\alpha d\beta$$

$$A_1^{(2)} = -\frac{2\gamma_1\gamma_2}{C} A_1^{(1)} - \frac{i\psi_0}{C} A, \quad A_2^{(1)} = \frac{\beta}{\alpha} A_1^{(1)}, \quad A_3^{(1)} = \frac{\gamma_1}{\alpha} A_1^{(1)}$$

$$A_2^{(2)} = -\frac{2\beta}{\alpha C} \gamma_1\gamma_2 A_1^{(1)} - \frac{i\psi_0}{C} B, \quad A = \frac{Q(\gamma_2^2 - \beta^2) + V\alpha\beta}{4\pi^2 \rho b^2 \gamma_2}$$

$$A_3^{(2)} = \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha C} \gamma_1 A_1^{(1)} + \frac{i(Q\alpha + V\beta)}{4\pi^2 \rho b^2 C}$$

$$B = \frac{V(\gamma_2^2 - \alpha^2) + Q\alpha\beta}{4\pi^2 \rho b^2 \gamma_2}, \quad C = \gamma_2^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

$$\gamma_n = \sqrt{k_n^2 - \alpha^2 - \beta^2}, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{b^2}$$

$$\psi_0 = \exp(i\alpha x_0 + i\beta y_0)$$

Предположено, что при $|\alpha| < k$ (α считается действительным) в плоскости β проведены разрезы вдоль действительной оси от $-\infty$ до $-\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ и от $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ до ∞ , и выбрано $\gamma > 0$ на мнимой оси β , а при $|\alpha| > k$ проведены в плоскости переменной β разрезы, соединяющие точки мнимой оси $\pm i\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ с точкой $\pm i\infty$ соответственно, и выбрано, $\text{Im } \gamma > 0$ на действительной оси β .

Решение в виде (1.3) удовлетворяет уравнениям (1.1), граничным условиям $\sigma_{xz}^\circ = Q\delta(x + x_0)\delta(y + y_0)$ и $\sigma_{yz}^\circ = V\delta(x + x_0)\delta(y + y_0)$ при $z = 0$. Остальные граничные условия и условия на ребре определяют функцию $A_1^{(1)}$.

Подставляя (1.3) в (1.2), имеем при $z = 0$ уравнения, которые после обратного преобразования Фурье и исключения $A_1^{(1)}$ приводятся к уравнению Винера — Хопфа

$$(1.4) \quad 2ib^2 a^{-2} (a^2 - b^2) \gamma_2^+ F^+ U^+ + f_1(\alpha, \beta) = \frac{\Omega^-}{F^- \gamma_2^-}$$

$$U^+ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 (v_3^\circ)_{z=0} \exp[-i(\alpha x + \beta y)] dy$$

$$\Omega^- = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma_{zz}^\circ}{\rho} \right)_{z=0} \exp[-i(\alpha x + \beta y)] dy$$

$$f_1 = \frac{i\psi_0}{\sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2 - \beta}} = f_1^+ + f_1^-, \quad f = f(Q, V) +$$

$$+ f^{(p)} = \frac{(Q\alpha + V\beta)(C - 2\gamma_1\gamma_2) - P\gamma_1 k_2^2}{4\pi^2 \rho k_2^2 \gamma_1 + X(\alpha, \beta)}$$

$$X(\alpha, \beta) = \frac{F^- \gamma_1^- \gamma_2^-}{\sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2 - \beta}}$$

При проведении факторизации функций отдельно рассмотрены случаи $|\alpha| < k$ и $|\alpha| > k$ и показано, что для произвольных α имеет место

$$(1.5) \quad F(\alpha, \beta) = \frac{2}{k_2^2 - k_1^2} \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{C^2}{4\gamma_1\gamma_2} \right) = \\ = F^+(\alpha, \beta) F^-(\alpha, \beta), \quad \gamma_j = \gamma_j^+ \gamma_j^- \\ F^\pm = \frac{\sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2} \pm \beta}{\gamma_1^\pm \gamma_2^\pm} \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\mp k_1}^{\mp k_2} \ln \frac{R(\eta)}{R(\eta)} \frac{\eta d\eta}{(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - \beta) \sqrt{\eta^2 - \alpha^2}} \right] \\ \gamma_j^\pm = (\sqrt{k_j^2 - \alpha^2} \pm \beta)^{1/2}, \quad \eta_R = \frac{\omega}{c_R}, \quad c_R < b$$

($R(\eta)$ — функция Релея, η_R — корень функции $R(\eta)$) и выбираются одновременно либо верхние, либо нижние знаки, причем функции γ_j^- , F^- и γ_j^+ , F^+ аналитичны соответственно в нижней и в верхней полуплоскости комплексного переменного β .

Можно показать, что при любом действительном α

$$f_1^-(\alpha, \beta) = \frac{f^{(Q, V)}(\alpha, \sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2})}{\sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2} - \beta} \Phi(\alpha, \eta_R) + \\ + \int_{k_1}^{\omega_\infty} \varphi(\alpha, \beta, \eta) \Phi(\alpha, \eta) d\eta \\ \varphi = \begin{cases} \varphi_1, & \eta \in (k_1, k_2) \\ \varphi_2, & \eta \in (k_2, \infty) \end{cases} \\ \varphi_1 = \frac{\chi(k_2^2 - 2\eta^2)}{R(\eta) X^+(\alpha, \eta)} [(2Q\alpha + V\sqrt{\eta^2 - \alpha^2})\sqrt{k_2^2 - \eta^2} + \\ + P(k_2^2 - 2\eta^2)], \quad \varphi_2 = \frac{\chi P}{X(\alpha, \eta)} \\ \chi = \frac{\eta(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})^{1/2}}{4\pi^3 \rho (\sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2} - \sqrt{\eta^2 - \alpha^2})(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - \beta) \sqrt{\eta^2 - \alpha^2}} \\ \Phi(\alpha, \eta) = \exp [i(\alpha x_0 + y_0 \sqrt{\eta^2 - \alpha^2})]$$

($X^+(\alpha, \eta)$ — граничные значения функции $X(\alpha, \eta)$ сверху на участке $k_1 < \eta < k_2$).

Решая уравнения Винера — Хопфа, получим

$$(1.6) \quad 2b^2(k_2^2 - k_1^2) \gamma_2^+ F^+ U^+ = ik_2^2 [f_1(\alpha, \beta) - f_1^-(\alpha, \beta)] \\ \gamma_1^- \Omega^- = X(\alpha, \beta) (\sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2} - \beta) f_1^-(\alpha, \beta)$$

Так как $U^+ = A_{3,1}^{(1)} + A_{3,1}^{(2)}$, получим

$$(1.7) \quad A_{1,1}^{(1)} = iA_{1,1}^{(1)} \psi_0 + iA_{2,1}^{(1)} \Phi(\alpha, \eta_R) + iA_{3,1}^{(1)} \int_{k_1}^{\omega_\infty} \varphi(\alpha, \beta, \eta) \Phi(\alpha, \eta) d\eta \\ A_{1,1}^{(1)} = -\alpha \frac{PC + 2\gamma_2(Q\alpha + V\beta)}{4\pi^2 \rho b^2 R(\alpha, \beta)} \\ A_{2,1}^{(1)} = -\alpha C X(\alpha, \beta) \frac{f^{(Q, V)}(\alpha, \sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2})}{b^2 R(\alpha, \beta) \gamma_1^-} \\ b^2 R(\alpha, \beta) \gamma_1^- A_{3,1}^{(1)} = -\alpha C (\sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2} - \beta) X(\alpha, \beta) \\ R(\alpha, \beta) = C^2 + 4\gamma_1 \gamma_2 (\alpha^2 + \beta^2)$$

После вычисления остальных коэффициентов при помощи (1.3), (1.7) приходим к решению поставленной задачи, периодическому во времени

$$(1.8) \quad v_j^\circ = \sum_{n,m=1}^2 i \iint_{-\infty}^{\infty} [A_{m,j}^{(n)} \exp(i\varphi_m^{(n)}) + \frac{1}{2} A_{3,j}^{(n)} \times \\ \times \int_{k_1}^{\omega_\infty} \varphi(\alpha, \beta, \eta) \exp(i\varphi_3^{(n)}) d\eta] d\alpha d\beta \\ \varphi_1^{(n)} = (x + x_0) \alpha + (y + y_0) \beta + z\gamma_n, \quad \varphi_2^{(n)} = \\ = (x + x_0) \alpha + y\beta + z\gamma_n + y_0 \sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2} \\ \varphi_3^{(n)} = (x + x_0) \alpha + y\beta + z\gamma_n + y_0 \sqrt{\eta^2 - \alpha^2} \\ n = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$$

2. Обратное преобразование по t , соответствующее решению нестационарной задачи, для которой в (1.2) вместо $\exp(-i\omega t)$ стоит $\delta(t)$, имеет вид

$$(2.1) \quad v_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} v_j^\circ \exp(st) ds, \quad s = -i\omega$$

При применении обратного преобразования Лапласа по t введем вместо α, β переменные $\alpha = \zeta \omega \cos \psi, \beta = \zeta \omega \sin \psi$ [8] и полярные координаты $x + x_0 = r \cos \theta_1, y + y_0 = r \sin \theta_1, x_0 + x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ для $\varphi_1^{(n)}$ и $\varphi_{2,3}^{(n)}$ соответственно.

Существенным в интегралах по ζ оказываются окрестности точек $\zeta = \zeta_m^{(n)}$, для которых выражения в экспонентах обращаются в нуль

$$(2.2) \quad f_m^{(n)}(\zeta_m^{(n)}) \equiv t - \varphi_m^{(n)}(\zeta_m^{(n)}) = 0$$

Для определенности рассмотрим первый интеграл

$$(2.3) \quad I = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \{A_{1,1}^{(1)}(\zeta) \zeta \exp[sf_1^{(1)}(\zeta)]\} d\zeta$$

Здесь в силу однородности произведено сокращение на ω . Заменяем в интеграле по ψ , взятом в пределах $\pi < \psi < 2\pi$, величину ψ на $\pi + \psi_1$. Тогда в $f_1^{(1)}(\zeta)$ коэффициент при ζ поменяет знак, причем, отбрасывая индекс при ψ_1 , интегралы по ψ и ψ_1 , взятые в пределах $0 < \psi < \pi$, можно объединить и во втором интеграле заменить ζ на $-\zeta$. Тогда

$$(2.4) \quad I = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_0^\pi d\psi \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial}{\partial t} \{A_{1,1}^{(1)}(\zeta) \zeta \exp[sf_1^{(1)}(\zeta)]\} \operatorname{sgn} \zeta d\zeta$$

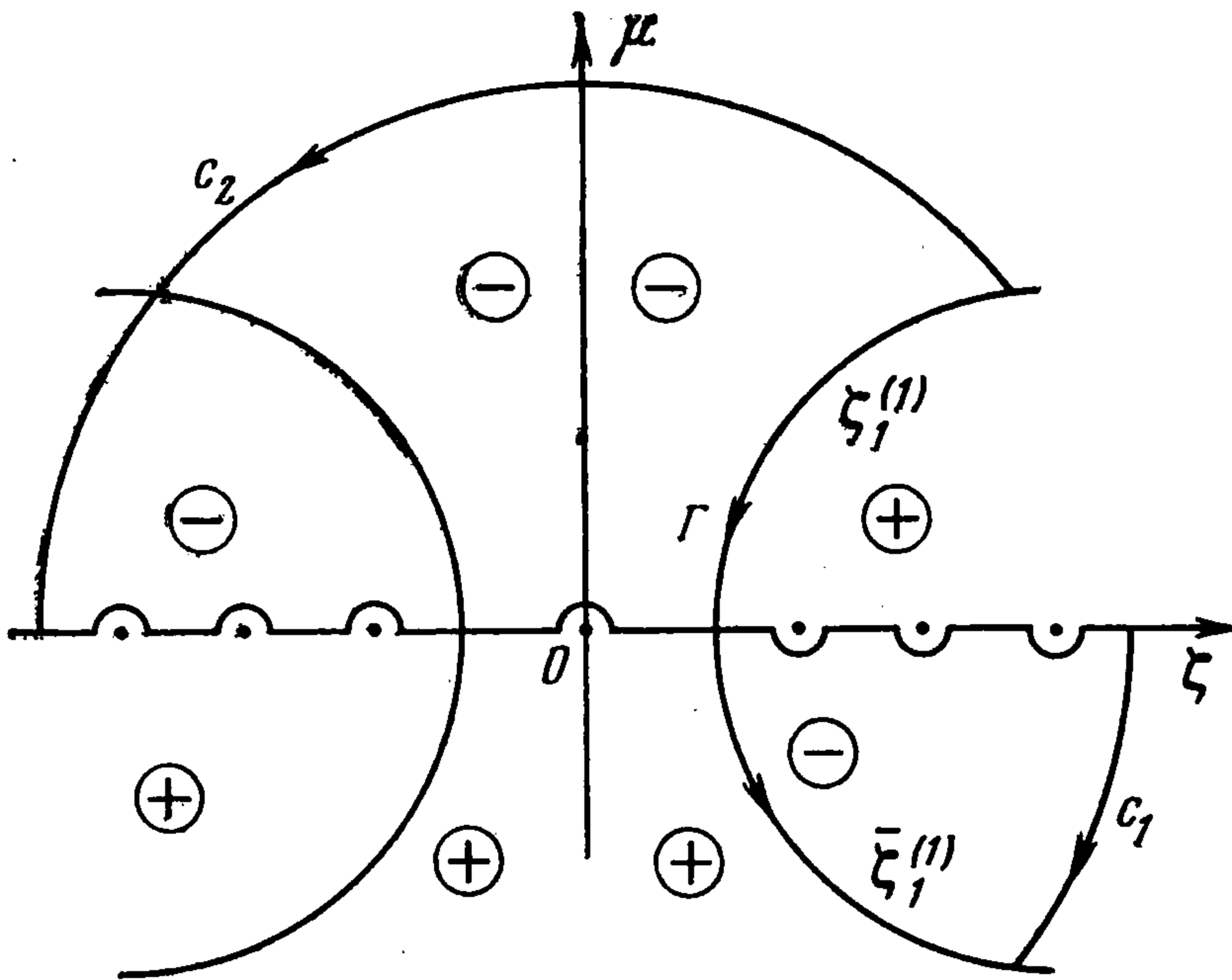
Пусть $\omega > 0$. Заменяем контур интегрирования $-\infty < \zeta < \infty$ на контур Γ , проходящий через указанные точки $\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(1)}$ в направлении $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\zeta) = 0$. Обозначая $f_1^{(1)}(\zeta) = B_1$, где величина B_1 вещественна, $\zeta = \xi + i\mu$, можно убедиться, что в плоскости (ξ, μ) линии $f_1^{(1)}(\zeta) = B_1$ состоят из двух ветвей гиперболы

$$\frac{\xi^2}{r^2 \cos^2 \psi} - \frac{\mu^2}{z^2} = \frac{1}{a^2 r_1^2}, \quad r_1^2 = r^2 \cos^2 \psi + z^2$$

а также из отрезков действительной оси $|\xi| < 1/a$.

Пусть $z > 0$. Тогда, предполагая, что $\sqrt{a^{-2} - \zeta^2} > 0$ на мнимой оси плоскости ζ , можно показать, что $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\zeta) < 0$ в областях (см. фигуру), где проходят дуги

окружностей, c_1, c_2 , причем на фигуре указаны знаки $\text{Im } f_1^{(1)}$ в различных областях. Тогда интегрирование по ζ от $-\infty$ до $r \cos \psi / (ar_1)$ заменяется на интегрирование по верхней половине контура Γ , а интегрирование по ζ от $r \cos \psi / (ar_1)$ до ∞ — на



интегрирование по нижней половине Γ . Это можно сделать, так как на $c_1, c_2, \text{Im } f_1^{(1)}(\zeta) < 0$ и можно показать, что интегралы по c_1, c_2 стремятся к нулю при неограниченном увеличении радиусов окружностей c_1, c_2 .

В результате при $\omega > 0$ можно заменить интегрирование по действительной оси ζ на интегрирование по Γ .

При $\omega < 0$ вместо c_1, c_2 берутся их дополнения до верхней и соответственно нижней полуокружностей, на которых $\text{Im } f_1^{(1)}(\zeta) > 0$. Тогда интегрирование по действительной оси ζ заменится на интегрирование по Γ в обратном

предыдущему направлению. С учетом $\text{sgn } \zeta$ получится внутренний интеграл в (2.4) таким же, как при $\omega > 0$.

При $z < 0$ точки $\zeta_1^{(1)}, \bar{\zeta}_1^{(1)}$ меняются местами, а решение не изменяется.

Итак, при любых ω, z из (2.4) получим

$$I = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_0^\pi d\psi \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial t} \{ \pm \zeta A_{1,1}^{(1)}(\zeta) \exp [s f_{1,1}^{(1)}(\zeta)] \} d\zeta$$

где верхний и нижний знаки относятся к верхней и нижней половине контура Γ , который проходится сверху вниз. На верхней половине Γ величина B_1 меняется от $-\infty$ до $r \cos \psi / (ar_1)$, а на нижней — от $r \cos \psi / ar_1$ до $-\infty$, поэтому после обратного преобразования Лапласа по t , вычисляя интеграл от дельта-функции вещественного аргумента $f_1^{(1)}(\zeta)$, получим

$$I = -2 \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi \frac{\zeta_1^{(1)} A_{1,1}^{(1)}(\zeta_1^{(1)})}{f_1^{(1)'}(\zeta_1^{(1)})} d\psi, \quad r_1^2 \zeta_1^{(1)} = tr \cos \psi + iz \sqrt{t^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}$$

При $t < r_1/a$ решение $I = 0$.

Отметим, что для поперечной волны при $ar > br_1$, что соответствует области вне конуса, проходящего через линию касания точечной и боковой волн, следует в контур Γ включить для $ar |\cos \psi| > r_1$ верхний и нижний берега разреза ($\pm 1/a, r \cos \psi / r_1$), проходимые справа налево и слева направо соответственно. Решение снова запишется в прежнем виде через корни уравнений (2.2), причем указанным разрезам соответствуют точки между указанными волнами.

Аналогично вычисляются остальные интегралы.

Окончательно решение записывается в следующем виде:

$$(2.5) \quad v_j = -2 \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n,m=1}^2 \int_0^\pi \left[\frac{A_{m,j}^{(n)}(\zeta_m^{(n)}) H(\zeta_{m,0}^{(n)}) \zeta_m^{(n)}}{f_m^{(n)'}(\zeta_m^{(n)})} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{1/a}^\infty \frac{\zeta_3^{(n)} H(\zeta_0^{(n)}) A_{3,j}^{(n)}(\zeta_3^{(n)}) \varphi(\zeta_3^{(n)}) d\eta}{f_3^{(n)'}(\zeta_3^{(n)})} \right] d\psi$$

где $H(x)$ — единичная функция. Соотношения $\zeta_{m,0}^{(n)} = 0$, $\zeta_0^{(n)} = 0$ дают фронты соответствующих волн.

Отметим, что при $x_0 = y_0 = 0$ слагаемые в решении, соответствующие P , выпадают. Это сразу видно из уравнения (1.5), которое при $x_0 = y_0 = Q = V = 0$ примет вид

$$(2.6) \quad 2ib^2a^{-2}(a^2 - b^2)\gamma_2^+F^+U^+ = \frac{P}{4\pi^2\rho F^-\gamma_2^-} + \frac{\Omega^-}{F^-\gamma_2^-}$$

Отсюда, если предполагать, как и выше, что $v_{1,2,3} = O(R_1^{1/2})$, получится $U^+ \equiv 0$, т. е. тривиальное решение. Поскольку ясно, что решение должно зависеть от P , естественно предположить, что слагаемые в решении, соответствующие P , дают $v_{1,2,3} = O(R_1^{-1/2})$ при $R_1 \rightarrow 0$; тогда для этих слагаемых следует обе части (2.6) приравнять постоянной, определяемой с помощью теоремы Коши, и окончательно решение для P примет вид

$$U^+ = a^2K(\alpha)[2b^2(b^2 - a^2)F^+\gamma_2^+]^{-1}, \quad \Omega^- = K(\alpha)F^-\gamma_2^- - \frac{P}{4\pi^2}$$

$$K(\alpha) = P[4\pi^2F^-(\alpha, 0)\sqrt[4]{k_2^2 - \alpha^2}]^{-1}$$

Тогда полное решение при $x_0 = y_0 = 0$ дается формулами, следующими за (1.7), в которых $x_0 = y_0 = P = 0$, и, кроме того, следует добавить слагаемые в $A_{2,1}^{(1)}$

$$(2.7) \quad P\alpha C \frac{\gamma_1^- X(\alpha, 0) \sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2} - X(\alpha, \beta) (\sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2} - \beta) \sqrt[4]{k_1^2 - \alpha^2}}{4\pi^2\rho b^2 R(\alpha, \beta) X(\alpha, 0) \gamma_1^- \sqrt{\eta_R^2 - \alpha^2}}$$

Отметим, что при $x_0 = y_0 = 0$ в (2.5) в интегралах по η отличными от нуля будут значения, соответствующие участку интегрирования $1/a < \eta < 1/b$, причем для функций ϕ и f получатся те же выражения, что и выше, в которых поставлено $P = 0$.

3. Чтобы получить решения вблизи волн, применим метод [9]. Для простоты рассмотрим задачу, в которой $x = y_0 = 0$, причем имеем три вида волн: точечные сферические продольные и поперечная волна и коническая волна, представляющая собой огибающую точечных поперечных волн, произведенных линией пересечения продольной волны с плоскостью $z = 0$.

Для определения решения вблизи точечных волн со скоростями распространения c_n , где $c_1 = a$, $c_2 = b$, введем в (2.5) согласно [9] с помощью (2.2), где $x_0 = y_0 = 0$, новую переменную интегрирования $\sigma = \sqrt{1 - c_n^2 \zeta_n^2}$. При этом

$$\cos \psi = \frac{tc_n - z\sigma}{r \sqrt{1 - \sigma^2}}, \quad \sin \psi = \frac{R \sqrt{(\sigma - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma)}}{r \sqrt{1 - \sigma^2}}$$

$$R = r^2 + z^2, \quad R^2 \sigma_{1,2}^{(n)} = tzc_n \pm r \sqrt{R^2 - t^2 c_n^2}$$

На фронтах точечных волн $\sigma_*^{(n)} \equiv \sigma_1^{(n)} = \sigma_2^{(n)} = tzc_n R^{-2}$, причем при определении решения вблизи волн по теореме Коши заменим контур интегрирования в плоскости σ на малый отрезок, соединяющий точки

$\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}$ [9], и, вычисляя интеграл, получим вблизи точечных волн

$$(3.1) \quad v_j = \frac{2\pi t z}{R^2} \sum_{n=1}^2 \delta\left(t - \frac{R}{c_n}\right) \times \\ \times [B_j^{(n)}(\sigma) + \int_{1/a}^{1/b} A_{3,j}^{(n)}(\sigma) \varphi(\sigma, \eta) d\eta]_{\sigma=\sigma_*^{(n)}}, \quad B_j^{(n)}(\sigma) = \sum_{m=1}^2 A_{m,j}^{(n)}(\sigma)$$

где $A_{m,j}^{(n)}$ даются формулами (1.7) с учетом (2.7).

Для определения решения вблизи конической волны, имеющей уравнение

$$t = t_f = (r \sin \beta + z \cos \beta) / b, \quad \cos \beta = \gamma = \sqrt{a^2 - b^2} / a$$

(β — угол, отсчитываемый от оси z в вертикальной плоскости, соответствующий окружности касания конической и точечной поперечной волн) следует изучить относительное расположение точек $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \gamma$ на вещественной оси σ . Для точек $M(x, y, z)$, расположенных впереди конической волны, имеем $\gamma < \sigma_1$, т. е. разрез плоскости σ , соответствующий точкам разветвления γ, σ_1 подынтегральной функции, лежит вне контура интегрирования. Для точек $M(x, y, z)$, находящихся позади конической волны, значение интеграла в плоскости σ можно заменить на интегралы по берегам разреза (σ_1, γ), причем $\sigma_1 < \gamma$. Тогда получим решение вблизи конической волны

$$(3.2) \quad v_j = \frac{2\pi}{b \sqrt{r}} \left(\frac{\cos \beta}{l}\right)^{3/2} \sin \beta \times \\ \times \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{Im} \left[A_{3,j}^{(2)}(\sigma) \int_{1/a}^{1/b} \varphi(\sigma, \eta) d\eta + B_j^{(2)}(\sigma) \right]_{\sigma=\gamma} \Delta n + O[(\Delta n)^2] \right\}$$

$$l = r \cos \beta - z \sin \beta, \quad \Delta n \sin \beta = b(t_f - t), \quad bt_f = r \sin \beta + z \cos \beta$$

Вблизи линии касания волн $l \approx 0$ и (3.2) неприменимо, но, как и в [9], можно получить решения и в указанной окрестности.

Таким образом, из общих формул (2.5) получены решения (3.1) и (3.2) вблизи точечных и конической волн в случае, когда сила сосредоточена в точке $(0, 0, 0)$.

Из формул (2.5) — (2.7) можно получить главные члены в коэффициенте интенсивности напряжений и в значении перемещения v_3 вблизи $z = 0$, $y = \pm 0$ соответственно в виде

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2r\pi^2} \text{Re} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{T}{|\theta|} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\mu_+ + i\mu_-}{\lambda^2} d\lambda$$

$$v_3 = \frac{Pa^2}{4\pi^2 b^2 \rho (a^2 - b^2) r} \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\frac{T}{|\theta|}} \int_0^\infty \frac{\mu_- + i\mu_+}{\lambda} d\lambda$$

$$\mu_\pm = [(b^{-2} - T^2) \lambda^2 - T^2 (1 \pm 2\lambda)]^{-1/4}$$

$$T = tr^{-1}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Вблизи точки $x = y = z = 0$ имеем $T \gg 1$ и получим

$$\sigma_{zz} = \frac{P \sqrt{2}}{6\pi^2 b^2 t^3 |\theta| \sqrt{|\theta|}}, \quad v_3 = \frac{Pa^2 \sqrt{2}}{8\pi \rho b^2 (a^2 - b^2) tr \sqrt{|\theta|}}$$

Отметим, что выделена основная часть особенности вблизи ребра, соответствующая P , причем слагаемые в σ_{zz} и v_3 , соответствующие поперечным нагрузкам Q и V , дают особенность $|\theta|^{-1/2}$ и $|\theta|^{1/2}$ соответственно, т. е. более гладкие слагаемые в решении.

Изучим прифронтные области для волн, отраженных от края $z = y = 0$ в общей задаче, в которой $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$. В решении (2.5) члены, содержащие $A_{1,j}^{(n)}$, соответствуют падающим продольной и поперечной волнам, т. е. решению Ламба для полупространства. Решение для окрестностей указанных волн находится вычислениями, подобными вычислениям при получении (3.2), и имеет ту же особенность в виде δ -функции.

Сложнее получить решение для волн, отраженных от края щели, которым соответствуют остальные слагаемые в (1.8), причем $y_0 \sqrt{\eta^2 - \alpha^2}$ — момент времени, в который в точке $(-x_0, 0)$ возникают возмущения, даваемые подынтегральными функциями в интеграле по η . При этом η имеет смысл скоростей возмущений, приходящих в точку $(-x_0, 0)$ и порождающих отраженные волны. Таким образом, нужно определить в окрестности волн поведение слагаемых, содержащих интегралы по η в формуле (2.5). Отметим, что фронты волн, отраженных от ребра, можно получить из уравнений огибающей «плоских» волн

$$(3.3) \quad f_3^{(n)}(\zeta_3^{(n)}) = \frac{\partial}{\partial \zeta_3^{(n)}} f_3^{(n)}(\zeta_3^{(n)}) = \frac{\partial}{\partial \psi} f_3^{(n)}(\zeta_3^{(n)}) = 0$$

В дальнейшем для краткости индекс 3 отбрасывается, $\eta = 1/a$ соответствует волнам, порожденным падающей продольной, $\eta = 1/b$ — поперечным волнам. Отметим, что указанным интегралам по η соответствуют по две волны (продольные и поперечные), произведенные падающими на ребро продольными и поперечными волнами, что обусловлено разрывным характером φ_η' , и можно записать в (2.5)

$$(3.4) \quad \int_{1/a}^{\infty} \lambda_{n,j} \varphi(\zeta_3^{(n)}, \eta) d\eta = \sum_{k=1}^2 \int_{1/c_k}^{\infty} \lambda_{n,j} v_k d\eta$$

$$\lambda_{n,j} = \zeta_3^{(n)} H(\zeta_3^{(n)}) A_{3,j}^{(n)}(\zeta_3^{(n)}) [f_3^{(n)'}(\zeta_3^{(n)})]^{-1}, \quad v_1 = \varphi_1, \quad v_2 = \varphi_2 - \varphi_1$$

Рассмотрим вначале слагаемые, соответствующие первому интегралу в правой части (3.4). Обозначим величины ψ , ζ , даваемые указанными уравнениями волны ($\eta = 1/a$), через $\psi_0^{(n)}$, $\zeta_0^{(n)}$. Введем переменную $\sigma = \sqrt{1 - c_n^2 \zeta^2}$. В решении (1.8) в полярных координатах можно считать для пределов интегрирования $\psi_0 < \psi < \psi_0 + 2\pi$, а в (2.5) $\psi_0 < \psi < \psi_0 + \pi$. Тогда, повторяя рассуждения, проведенные при получении (3.1), для указанных слагаемых в (2.5) получим вблизи волн

$$(3.5) \quad -2\text{Re} \sum_{n=1}^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} d\mu \int_{\sigma_1^{(n)}}^{\sigma_2^{(n)}} \frac{\sigma A_{3,j}^{(n)}(\zeta^{(n)}) \varphi_1(\zeta^{(n)}, \eta) H(f^{(n)})}{c_n^2 \partial f^{(n)} / \partial \psi} d\sigma$$

$$\mu = \sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - \sqrt{a^{-2} - \alpha^2}$$

В промежуточных вычислениях индекс n отбросим, тогда можно записать $\sigma_1 = \sigma(\psi_0)$, $\sigma_2 = \sigma(\pi + \psi_0)$, причем $\zeta(\psi)$ дается уравнением $f = 0$. Отсюда видно, что

$$\zeta(\psi_0) = -\bar{\zeta}(\pi + \psi_0), \quad \sigma(\psi_0) = \bar{\sigma}(\pi + \psi_0)$$

где черта означает комплексно-сопряженное значение, и на волне $\sigma_{1,2} = \sigma_0$, $c\zeta_0 = \sqrt{1 - \sigma_0^2}$.

Вблизи волны можно полагать

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} \approx \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} (\psi - \psi_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi \partial \sigma} (\sigma - \sigma_0)$$

по уравнению $f(\sigma, \psi) = 0$ имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} (\psi - \psi_0) \approx - \frac{\partial^2 f}{\partial \psi \partial \sigma} (\sigma - \sigma_0) + \left[-K_0 (\sigma - \sigma_0)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} (t - t_f - y_0 \mu) \right]^{1/2}$$

$$K_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \psi \partial \sigma} \right)^2, \quad t_f = \zeta_0 \rho \cos(\theta - \psi_0) + z \sqrt{c^2 - \zeta_0^2} + y_0 \sqrt{c^2 - \zeta_0^2 \cos^2 \psi_0}$$

Здесь $t = t_f$ — уравнение волн (3.3) при $\eta = a^{-1}$, $\partial^2 f / \partial \psi^2 > 0$, $K_0 > 0$. Можно показать, что

$$\sigma_{1,2} = \sigma_0 \pm i \left[\frac{2}{K_0} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} (t - t_f - y_0 \mu) \right]^{1/2}$$

Вычисляя интегралы в (3.5) и повторяя приведенные выше рассуждения для второго слагаемого правой части (3.4), обозначая в нем $\bar{\mu} = \sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - \sqrt{b^{-2} - \alpha^2}$, вблизи отраженных от ребра волн получим

$$(3.6) \quad -2\pi \operatorname{Re} \sum_{n=1}^2 \frac{1}{y_0 c_n^2 \sqrt{K_0^{(n)}}} \left[\sigma_0^{(n)} H(t - t_f^{(n)}) A_{3,j}^{(n)}(\zeta_0^{(n)}) v_1(\zeta_0^{(n)}, a^{-1}) + \bar{\sigma}_0^{(n)} H(t - \bar{t}_f^{(n)}) A_{3,j}^{(n)}(\bar{\zeta}_0^{(n)}) v_2(\bar{\zeta}_0^{(n)}, b^{-1}) \right]$$

Здесь $\bar{\zeta}_0^{(n)}$ — значения $\zeta_0^{(n)}$ в (3.3) на фронтах волн, порожденных падающей поперечной волной, на которых $\eta = b^{-1}$, $\bar{t}_f^{(n)}$ — уравнения указанных фронтов волн; $\mu_0^{(n)} = (t - t_f^{(n)}) y_0^{-1} \approx 0$, $\bar{\mu}_0^{(n)} = (t - \bar{t}_f^{(n)}) y_0^{-1} \approx 0$ вблизи соответствующих фронтов волн.

При получении последней формулы, дающей решение вблизи отраженных от ребра волн, учтено, что в интегралах по μ в верхнем пределе вместо ∞ должно стоять $\mu_0^{(n)}$, $\bar{\mu}_0^{(n)}$, поскольку при $t < t_f^{(n)}$, $t < \bar{t}_f^{(n)}$ отраженные волны в данной точке отсутствуют.

Как видно из (3.6), решение вблизи отраженных волн более гладкое, чем решение вида δ -функции за падающими волнами. Исключение составляет решение около волн, отраженных от ребра при падении волн Релея и даваемых $f_2^{(n)}$ в (2.5), за которыми особенность решения снова является δ -функцией.

Следует отметить, что при $x_0 = y_0 = 0$ обращение преобразования Лапласа можно получить также методом работы [10].

Автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 1 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Miles J. W. The oscillating rectangular airfoil at supersonic speeds. Quart. Appl. Math., 1951, vol. 9, No. 1.
2. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г., Натансон Г. И., Гиз П. М., Слободецкий Л. Н., Смирнов М. М. Линейные уравнения математической физики. М., «Наука», 1964.

3. Черепанов Г. П. Дифракция упругих волн на разрезе. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию академика Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972.
 4. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л., ОНТИ, 1937.
 5. Нигул У. К. Отклонения решения квазилинейного волнового уравнения от решения линейного уравнения в области непрерывных первых производных. ПММ, 1967, т. 37, вып. 3.
 6. Зволинский Н. В., Флитман Л. М., Костров Б. В., Афанасьев В. А. Некоторые задачи дифракции упругих волн. В кн.: Приложения теории функции к задачам механики сплошной среды. М., «Наука», 1965.
 7. Свекло В. А. Смешанная задача для упругой анизотропной полуплоскости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
 8. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов. Изв. АН АрмССР. Механика, 1974, т. 27, № 3.
 9. Зволинский Н. В. Отраженные и головные волны, возникающие на границе раздела двух упругих сред. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1957, № 10.
 10. Cagniard L. Réflexion et réfraction des ondes seismiques progressives. Paris, Gauthier-Villard, 1939.
-