Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3 + 517.9

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛИТ

Ю. А. Устинов

(Ростов-на-Дону)

Доказывается полнота однородных (элементарных) решений в пространстве решений уравнений теории упругости с конечной энергией. Схема обоснования включает в себя случай неоднородных по толщине плит и близка к схеме, реализованной в [1]. Приводится без доказательства одно из общих представлений решения неоднородных по толщине уравнений теории упругости, на основе которого определяется система элементарных решений. Другим способом эта система была получена в [2, 3].

Проблема полноты однородных решений А. И. Лурье [4] в различных аспектах была сформулирована [5] в связи с обоснованием одного из вариантов асимптотического метода [6, 7]; было указано на связь этой проблемы с проблемой n-кратной полноты М. В. Келдыша [8] и предложен один из способов ее решения, реализованный для случая плоской и осесимметричной задач в работах [9, 10].

1. Пусть $\Omega = S \times [-h, h]$ — область, занятая плитой, где $2h$ — толщина плиты, S — ее срединная поверхность, ∂S — граница S, $S^{\pm}$ — торцы плиты, соответствующие $x_3 = \pm h$, $\Gamma = \partial S \times [-h, h]$ — боковая поверхность. Свойства материала плиты заданы упругими характеристиками Ляме $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$.

Рассматривается упругое равновесие плиты, которое описывается уравнениями

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{i,i} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad x = \{x_1, x_2\} \in S, \quad x_3 \in [-h, h]$$

В работах [2, 3] приведена система элементарных решений, удовлетворяющих следующим однородным условиям на торцах плиты:

$$\sigma_{i3}\big|_{S^{\pm}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Для дальнейших рассуждений однородные решения, построенные в работах [2, 3], удобно определить с помощью общего представления решения уравнений (1.1) и (1.2), вид которого приводим без доказательства.

Именно, всякое решение уравнений теории упругости (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), можно представить в виде

$$u_i = u_i^{(1)}(\Phi_0, \Phi_1) + u_i^{(2)}(c) + u_i^{(3)}(g) \tag{1.3}$$

$$u_\alpha^{(1)} = \psi_\alpha + \partial_\alpha\left[e\Phi_1 - \sum_{i=0}^{1}(x_3{}^i\Phi_i - q_i(x_3)\Delta\Phi_i)\right] \tag{1.4}$$

$$u_3^{(1)} = \Phi_1 + (k_1 - ek_0)\Delta\Phi_1 - (\lambda^* + \mu^{(0)})^{-1}\mu^{(0)}k_0\Delta\Phi_0$$

$$(1.5)\qquad u_\alpha^{(2)} = \partial_\alpha b, \quad u_3^{(2)} = -b' - 2q\Delta c', \quad b = pc'' - r\Delta c$$
$$\alpha = 1, 2, \quad (\cdot)' = \partial_3(\cdot)$$
$$(1.6)\qquad u_1^{(3)} = \partial_2 g, \quad u_2^{(3)} = -\partial_1 g, \quad u_3^{(3)} = 0$$

Здесь $\Phi_i = \Phi_i(x)$ — бигармонические функции, ψ_1, ψ_2 — сопряженные гармонические функции, связанные с Φ_0 соотношением

$$\partial_1\psi_1 = \partial_2\psi_2 = k\Delta\Phi_0$$

$$\mu^{(0)} = \int_{-h}^{h} \mu dx_3, \quad \lambda^* = \int_{-h}^{h} \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} dx_3, \quad k = \frac{\lambda^* + 2\mu^{(0)}}{2(\lambda^* + \mu^{(0)})}$$

$$q_0(x_3) = (2k - 1) q_2(x_3) - 2k \int_0^{x_3} \mu^{-1} dx_3 \int_{x_3}^{h} \mu dx_3$$

$$q_1(x_3) = eq_2(x_3) - \int_0^{x_3} k_1 dx_3 - \int_0^{x_3} \mu^{-1} dx_3 \int_{x_3}^{h} x_3 a(x_3) dx_3$$

$$q_2(x_3) = \int_0^{x_3} k_1(x_3) dx_3 + \int_0^{x_3} \mu^{-1} dx_3 \int_{x_3}^{h} a(x_3) dx_3$$

$$a(x_3) = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad k_i(x_3) = \int_0^{x_3} x_3^i \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} dx_3$$

$$e = \frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}, \quad a^{(i)} = \int_{-h}^{h} x_3^i a(x_3) dx_3, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

Далее, функция $c(x, x_3)$ удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$(1.7)\qquad L(\Delta)\, c(x, x_3) \equiv (\Delta^2 - 2\Delta F + V)\, c(x, x_3) = 0$$
$$F\varphi = \{-p^{-1}[(p\varphi')' - r''\varphi],\ \varphi(\pm h) = 0\}$$
$$V\varphi = \{p^{-1}(p\varphi'')'',\ \varphi(\pm h) = 0 = \varphi'(\pm h)\}$$
$$p = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad q = \frac{1}{2\mu}, \quad r = \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}$$

И, наконец, для функции $g(x, x_3)$ имеем

$$(1.8)\qquad L_1(\Delta) g \equiv (\Delta + T) g(x, x_3) = 0$$
$$(1.9)\qquad Tl = \{-\mu^{-1}(\mu l')',\ l'(\pm h) = 0\}$$

Ниже функции $c(x, x_3)$, $g(x, x_3)$ будем рассматривать как функции $c(x)$, $g(x)$ со значениями в некотором гильбертовом пространстве X, а операторы F, V — как неограниченные самосопряженные операторы в этом пространстве.

Следуя [6,7], $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ будем называть соответственно бигармоническим, потенциальным и вихревым решениями. Подчеркнем, что каждое из них удовлетворяет уравнениям (1.1) и граничным условиям (1.2). Если $\lambda, \mu = \mathrm{const}$, уравнение (1.7) превращается в бигармоническое, уравнение (1.8) — в гармоническое, а формулы (1.4) — в известные формулы А. И. Лурье [4].

2. Введем понятия элементарных решений для уравнений (1.7) и (1.8) соответственно.

Элементарным решением первого рода назовем решение уравнения (1.7) вида

$$c_k = \sum_{s=0}^{p-1} m_{ks}(x)\varphi_{ks}' \tag{2.1}$$

Здесь β_k — собственное значение, φ_{k0} —обобщенный собственный вектор (см. [11]) операторного пучка

$$L(\beta)\varphi \equiv (\beta^2 I - 2\beta F + V)\varphi = 0 \tag{2.2}$$

φ_{ks} — присоединенные векторы, определяемые из уравнений

$$L(\beta_k)\varphi_{ks} + \frac{\partial L}{\partial\beta_k}\varphi_{ks-1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\beta_k^2}\varphi_{ks-2} = 0$$

Функции $m_{ks}(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\Delta - \beta_k)m_{k0} = 0$$

$$(\Delta - \beta_k)m_{ks} = m_{ks-1} \quad (s = 1, \ldots, p-1)$$

В случае отсутствия присоединенных векторов второй индекс будем опускать.

Заметим, что спектральная задача (2.2) подробно изучена в работе [1], где, в частности, с использованием результатов работы [11] установлена двукратная полнота системы собственных и присоединенных векторов.

Элементарное потенциальное решение определим теперь как вектор-функцию вида

$$u_k^{(2)} = u^{(2)}(c_k)$$

Элементарным решением второго рода назовем всякое решение уравнения (1.8) вида

$$g_t = n_t(x)\,l_t, \quad (\Delta - \gamma_t)\,n_t(x) = 0, \quad Tl_t = \gamma_t l_t$$

где γ_t — собственное значение, l_t — собственный вектор оператора T, определенного соотношением (1.9). Очевидно, что T — положительный оператор и, следовательно, все $\gamma_t \geqslant 0$. Из общей теории самосопряженных операторов [12] следует, что система собственных векторов $\{l_t\}$ составляет ортонормированный базис пространства X_μ, т. е.

$$(l_t, l_s)_{X_\mu} = \int_{-h}^{h} \mu l_t l_s\,dx_3 = \delta_{ts}$$

Элементарное вихревое решение определим как вектор-функцию вида

$$u_t^{(3)} = u^{(3)}(g_t) \tag{2.3}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\gamma_0 = 0$ — собственное значение оператора T. Соответствующее ему элементарное вихревое решение является частным случаем бигармонического решения. Поэтому ниже под вихревым решением будем понимать совокупность элементарных решений вида (2.3), соответствующих точкам спектра $\gamma_t > 0$ ($t = 1, 2, \ldots$).

3. Ниже будут использованы следующие функциональные пространства:

X — пространство функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $x_3 \in [-h, h]$ и весом $p(x_3)$;

X^α — шкала гильбертовых пространств [13], которая получается замыканием пересечения областей определения $D(V^n)$ операторов V^n ($n = 1, 2, \ldots$) по метрике

$$\|\varphi\|^2_{X^\alpha} = \|V^\alpha \varphi\|^2_X$$

$L_2(\partial S, X^\alpha)$ — пространство функций со значениями в X^α и нормой

$$\|f\|^2_{0,\alpha} = \int_{\partial S} \|f\|^2_{X^\alpha} ds$$

$W^{(\beta)}(\partial S, X)$ — пространства функций со значениями в X, обобщенные производные которых до порядка β принадлежат $L_2(\partial S, X)$, ($\|\cdot\|_{\beta,0}$ — обозначение нормы в $W^{(\beta)}(\partial S, X)$);

$W_{\beta,\alpha}(\partial S)$ — гильбертово пространство с нормой

$$\|f\|^2_{\beta,\alpha} = \|f\|^2_{0,\alpha} + \|f\|^2_{\beta,0}$$

Замечание. В случае, когда ∂S — гладкая замкнутая кривая длиной l, норму в пространстве $W_{\alpha,\beta}(\partial S)$ можно определить следующим способом:

$$\|f\|^2_{\beta,\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\|f_n\|^2_{X^\alpha} + |n|^{2\beta} \|f_n\|^2_X] \tag{3.1}$$

$$f_n = \oint_{\partial S} f\bar{e}_n ds_0, \quad e_n = (2\pi)^{-1/2} \exp(ins_0), \quad s_0 = \frac{2\pi s}{l}$$

H — пространство вектор-функций $\mathbf{w}(w_1, w_2, w_3)$, имеющих конечный интеграл энергии

$$\|\mathbf{w}\|^2_H = \int_S \int_{-h}^{h} \sigma_{ij}(\mathbf{w}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{w}) dx\, dx_3 \tag{3.2}$$

H_0 — пространство, получаемое замыканием множества вектор-функций $\mathbf{v}$, каждая компонента которых $v_i \in C_\infty(S, X)$ по метрике (3.2);

$C_\infty(S, X)$ — множество функций со значениями в X, финитных и бесконечно дифференцируемых в S.

Элементы пространства H_0 обладают следующим очевидным свойством:

$$\mathbf{v}|_\Gamma = 0 \tag{3.3}$$

Определим пространство обобщенных решений задачи (1.1), (1.2).

Определение. Пространством обобщенных решений H_1 назовем множество элементов $\mathbf{u} \in H$, удовлетворяющих условию

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = 0, \quad \mathbf{v} \in H_0 \tag{3.4}$$

Иными словами, H_1 — ортогональное дополнение к H_0 в метрике (3.2) или $H = H_0 \oplus H_1$.

Если выражение (3.4) проинтегрировать по частям и учесть свойство (3.3), убедимся, что $\mathbf{u}$ удовлетворяет соотношениям (1.1), (1.2).

4. Обратимся к изучению вопроса о полноте системы однородных решений в пространстве H_1.

Прежде всего заметим, что из общего представления решения (1.3) на основании неравенства треугольника имеем

$$\|\mathbf{u}\|_H \leqslant \|\mathbf{u}^{(1)}(\Phi_0, \Phi_1)\|_H + \|\mathbf{u}^{(2)}(c)\|_H + \|\mathbf{u}^{(3)}(g)\|_H = \tag{4.1}$$
$$= \|\mathbf{u}^{(1)}(\Phi_0, \Phi_1)\|_H + \|c\|_{Z_1} + \|g\|_{Z_2}$$

Здесь Z_1 и Z_2 — пространства, индуцированные энергетической метрикой для функций c и g и нормами

$$\|c\|_{Z_1}^2 = \frac{1}{2}\int_S\int_{-h}^{h} \{p(x_3)[|\Delta c''|^2 + |\Delta^2 c|^2 - 2r(x_3)\Delta c''\Delta^2 c + \tag{4.2}$$
$$+ 2q(x_3)[|\partial_1\Delta c'|^2 + |\partial_2\Delta c'|^2] + 2\mu(x_3)[|\partial_1\partial_2 b|^2 - \partial_1^2 b\partial_2^2 b]\}\, dx\, dx_3$$
$$b = p(x_3)c'' - q(x_3)\Delta c$$

$$\|g_*\|_{Z_2}^2 = \frac{1}{2}\int_S\int_{-h}^{h} \mu(x_3)[|\partial_1^2 g_*|^2 + |\partial_2^2 g_*|^2 + |\partial_1 g_*'|^2 + |\partial_2 g_*'|^2]\, dx\, dx_3 \tag{4.3}$$
$$g_* = g - \frac{1}{\mu^{(0)}}\int_{-h}^{h} \mu(x_3) g\, dx_3$$

Очевидно, что проблема будет решена, если доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любых решений уравнения (1.7) $c \in Z_1$ и уравнения (1.8) $g \in Z_2$ существуют такие K и N, что

$$\left\|c - \sum_{k=1}^{K} c_k\right\|_{Z_1} < \varepsilon, \quad \left\|g_* - \sum_{n=1}^{N} g_n\right\|_{Z_2} < \varepsilon \tag{4.4}$$

Доказательство первого из неравенств (4.4) основано на использовании некоторой априорной оценки, которую из-за недостатка места приводим без доказательства.

Рассмотрим краевую задачу

$$L(\Delta)\, c(x) = 0, \quad c|_{\partial S} = f_1, \quad \Delta c|_{\partial S} = f_2 \tag{4.5}$$

Лемма 1. Для решения краевой задачи (4.5) имеет место априорная оценка

$$\|c\|_{Z_1}^2 \leqslant A[\|f_1\|_{^7/_2, ^7/_2}^2 + \|f_2\|_{^3/_2, ^3/_2}^2] \tag{4.6}$$

Введем пространство пар $Y^{\alpha\gamma} = X^\alpha \oplus X_*^\gamma$, элементы которого будем обозначать $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$.

Введем также пространство

$$\Pi_{\beta\alpha\delta\gamma} = W_{\beta,\alpha}(\partial S) \oplus W_{\delta,\gamma}(\partial S)$$

Элементы этого пространства — пары функций $E = \{f_1, f_2\}$, определенных на Г. Скалярное произведение в этом пространстве определим следующим образом:

$$(E^{(1)}, E^{(2)})_{\beta\alpha\delta\gamma} = (f_1^{(1)}, f_1^{(2)})_{\beta,\alpha} + (f_2^{(1)}, f_2^{(2)})_{\delta,\gamma} \tag{4.7}$$

где скалярные произведения справа определены соотношением (3.1).

Пусть Θ_k — некоторая полная система в пространстве $Y^{\alpha\beta}$, а e_n — ортонормированный базис в $L_2(\partial S)$. Очевидно следующее утверждение.

Лемма 2. Система $E_{nk} = e_n \otimes \Theta_k$ является полной в пространстве $\Pi_{\beta\alpha\delta\gamma}$.

Допустим теперь, что решение уравнения (1.7) $c \in Z_1$ и $\Gamma(c) = \{c|_{\partial S} = f_1, \ \Delta c|_{\partial S} = f_2\}$ — его след на боковой поверхности Г. На основании неравенства (4.6) имеем

(4.8) $$\|c\|^2_{Z_1} \leqslant A \|\Gamma(c)\|^2_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (\alpha = \beta = {}^3/_8,\ \gamma = \delta = {}^7/_8)$$

Положим $\Theta_k{}^0 = \{V^{7/8}\varphi_k,\ \beta_k V^{3/8}\varphi_k\}$, где φ_k — собственные векторы квадратичного пучка (2.2) (здесь для простоты предполагаем, что присоединенные векторы отсутствуют). Как следует из работы [1], система $\{\Theta_k{}^0\}$ является полной в пространстве Y^{00}, следовательно, система $\Theta_k = \{\varphi_k,\ \beta_k\varphi_k\}$ является полной в пространстве $Y^{7/8, 7/8}$. Из леммы 2 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие N, K и такие постоянные C_{nk}, что

(4.9) $$\|E - E_{Nk}\|_{\beta\alpha\delta\gamma} \leqslant \frac{\varepsilon}{A}, \quad E_{Nk} = \sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=1}^{K} C_{nk}(e_n \otimes \Theta_k)$$

Введем обозначение

$$d_k(s) = \sum_{n=-N}^{N} C_{nk}e_n(s)$$

В области S рассмотрим следующую систему краевых задач:

(4.10) $$\Delta m_k - \beta_k m_k = 0, \quad m_k|_{\partial S} = d_k(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, K)$$

В [3] показано, что среди β_k нет вещественных отрицательных, в силу чего все краевые задачи (4.10) однозначно разрешимы.

Рассмотрим выражение

$$c_0 = c - c_1, \quad c_1 = \sum_{k=1}^{K} m_k(x)\varphi_k = \sum_{k=1}^{K} c_k$$

Очевидно, что c_0— решение уравнения (1.7) и

$$\Gamma(c_0) = \Gamma(c) - \Gamma(c_1) = E - E_{NK}$$

Из неравенств (4.8) и (4.9) теперь вытекает первое из неравенств (4.4). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Всякое решение уравнения (1.7) можно аппроксимировать элементарными решениями первого рода в метрике (4.2).

Замечание. Если система $\{\Theta_k\}$ является базисом в пространстве $Y^{\alpha\gamma}$, то неравенство (4.4) можно понимать в смысле сходимости, т. е. элементарные решения первого рода обладают базисными свойствами.

В силу того, что система собственных функций $\{l_t\}$ составляет ортонормированный базис пространства X_μ, значительно проще доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Всякое решение уравнения (1.8), принадлежащее пространству Z_2, можно представить в виде ряда по элементарным решениям второго рода, сходящегося по метрике этого пространства.

Из теорем 1.2 и неравенства (4.1) вытекает следующая основная теорема.

Теорема 3. Система однородных решений является полной в пространстве H_1.

5. Рассмотрим задачу о деформации плиты под действием усилий $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$, приложенных к боковой поверхности Г. К условиям (1.1), (1.2) добавляется теперь следующее граничное условие:

$$n_j\sigma_{ij}(\mathbf{u})\,|_\Gamma = t_i \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{5.1}$$

где n_j — компоненты внешней нормали к поверхности Г.

Определение. Назовем обобщенным решением краевой задачи (1.1) (1.2), (1.6) вектор-функции $\mathbf{u} \in H_1$ и удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})_H = Q(\boldsymbol{\eta}) \equiv \int_\Gamma t_i\eta_i\, d\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H_1 \tag{5.2}$$

Замечание. 1°. Если в качестве η взять вектор твердого смещения

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{5.3}$$

где $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\omega}$ — произвольные постоянные векторы, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, то, поскольку левая часть (5.2) тождественно обращается в нуль, получаем известные необходимые условия разрешимости, означающие требование выполнения условий равновесия

$$\int_\Gamma t_i d\Gamma = 0, \qquad \int_\Gamma (t_i x_j - t_j x_i)\, d\Gamma = 0$$

2°. Метрика (3.2) в пространстве H_1 определяет только полунорму, поскольку всякая вектор-функция вида (5.3) обращает в нуль интеграл энергии (3.2). Поэтому вопрос существования обобщенного решения сводится к изучению условий непрерывности функционала $Q(\eta)$ в факторпространстве $G = H_1/D$, где D — ядро H_1, т. е. множество вектор-функций вида (5.3).

В работах [3,6,7] исходная задача теории упругости сведена к бесконечной системе, которая получается, если в тождестве (4.2) вместо $\boldsymbol{\eta}$ подставлять последовательно элементарные решения и считать независимыми вариации $\delta\Phi_i, \delta\partial_n\Phi_i$, δm_k, δn_t. На основании теоремы 3 можно заключить, что получаемая таким образом система эквивалентна исходной краевой задаче.

Поступила 22 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Устинов Ю. А., Юдович В. И.* О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
2. *Устинов Ю. А.* Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит. Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 4.
3. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г., Устинов Ю. А.* К теории неоднородных по толщине плит. Изв. АН СССР. МТТ. 1975, № 3.
4. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.

5. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. Тр. 2-го Всес. съезда по теор. и прикл. механике. Механика твердого тела. М., «Наука», 1966.
6. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
7. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
8. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. Докл. АН СССР, 1951, т. 74, № 1.
9. *Ворович И. И., Ковальчук В. Е.* О базисных свойствах одной системы однородных решений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
10. *Ковальчук В. Е.* Некоторые математические вопросы, связанные со второй основной задачей теории упругости для круглой плиты. В сб.: Математический анализ и его приложения. Изд-во Ростовск. ун-та, 1969.
11. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* О некоторых математических принципах теории демпфированных колебаний континуумов. В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1965.
12. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
13. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.