Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

В. Л. Бердичевский

(Москва)

Система уравнений теории изгиба пластин Рейсснера формулируется в терминах функций напряжений. Из вариационного принципа для функций напряжений выводится одна оценка упругой энергии. При помощи этой оценки доказывается, что решение системы уравнений Рейсснера при уменьшении толщины пластины стремится в энергетической норме к решению уравнения Кирхгофа.

1. Модели Кирхгофа и Рейсснера. Рассмотрим в декартовой системе координат x^α (греческие индексы пробегают значения 1, 2) линейно-упругую анизотропную пластину постоянной толщины h, срединная плоскость которой занимает в плоскости x^α ограниченную односвязную область Ω с гладкой границей Γ. Напряженное состояние пластины при изгибе описывается тензором изгибающих моментом $m^{\alpha\beta}$ и вектором перерезывающих усилий q^α. В модели Рейсснера q^α и $m^{\alpha\beta}$ определяются из решения следующей вариационной задачи: найти минимум функционала

$$E = \int_\Omega \Phi(m^{\alpha\beta}, q^\beta)\, dx^1 dx^2 \tag{1.1}$$

среди всех функций $m^{\alpha\beta}$ и q^α, удовлетворяющих ограничениям

$$m^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - q^\alpha = 0, \quad q^\alpha{}_{,\alpha} = 0, \quad m^{\alpha\beta} = m^{\beta\alpha} \tag{1.2}$$

$$m^{\alpha\beta}\nu_\beta = M^\alpha(s), \quad q^\alpha\nu_\alpha = Q(s) \quad \text{на } \Gamma \tag{1.3}$$

Здесь запятой в индексах обозначается дифференцирование по x^α, ν^α — вектор внешней единичной нормали к контуру, Γ, s — длина дуги вдоль Γ, внешние силы считаются приложенными только на контуре Γ и сводятся к изгибающему моменту $M^\alpha(s)$ и перерезывающей силе $Q(s)$, плотность упругой энергии есть квадратичная форма по $m^{\alpha\beta}$ и q^α вида

$$2\Phi = A^{\alpha\beta\gamma\delta} m_{\alpha\beta} m_{\gamma\delta} + h^2 B^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta \tag{1.4}$$

Тензоры упругих податливостей $A^{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $B^{\alpha\beta}$ считаются не зависящими от параметра h (несущественный для дальнейшего множитель h^{-3} опущен). Тензор $A^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет симметрию тензора упругих моделей.

Вариационная задача (1.1) — (1.4) была получена Рейсснером из вариационного принципа Кастильяно на основе гипотез относительно компонент тензора напряжений [1]. Соответствующие гипотезы относительно компонент вектора перемещений и вывод уравнений Рейсснера из вариационного принципа Лагранжа приведены в работе [2]. Вариационная задача в перемещениях является двойственной [3] к вариационной задаче (1.1) — (1.4). Асимптотическая точность модели Рейсснера доказана в работе [4].

В модели Кирхгофа $m^{\alpha\beta}$ и q^{α} определяются из задачи об отыскании минимума функционала

$$E_K = \int_{\Omega} \Phi_K(m^{\alpha\beta})\, dx^1 dx^2 \tag{1.5}$$

среди всех функций $m^{\alpha\beta}$ и q^{α}, удовлетворяющих в области Ω уравнениям (1.2) и на Γ условиям

$$m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta = M(s), \qquad q^\alpha\nu_\alpha + \frac{d}{ds} m^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta = N(s) \tag{1.6}$$

Здесь τ^α — вектор, касательный к Γ (за положительное принято направление обхода, при котором область Ω остается слева), $\Phi_K = \Phi(m^{\alpha\beta}, 0)$, а усилия Кирхгофа M и N связаны с M^α и Q формулами

$$M = M^\alpha\nu_\alpha, \qquad N = Q + \frac{d}{ds} M^\alpha\tau_\alpha$$

Величина $M^\alpha\tau_\alpha$ считается дальше непрерывно дифференцируемой функцией на Γ.

Замечания. 1°. На первый взгляд приведенные выше вариационные формулировки кажутся удивительными, так как естественным пространством, на котором следует искать минимум E и E_K, является L_2, в то время как на искомые функции наложены дифференциальные связи (1.2) и ограничения на множестве меры нуль (1.3) и (1.6). Однако ограничения (1.2), (1.3), имеющие смысл только для дифференцируемых непрерывных функций, допускают расширение на L_2, если записать их в форме [3]

$$\int_{\Omega} [m^{\alpha\beta}\psi_{(\alpha,\beta)} + q^\alpha(u_{,\alpha} + \psi_\alpha)]\, dx^1 dx^2 = \int_{\Gamma} (M^\alpha\psi_\alpha + Qu)\, ds \tag{1.7}$$

Здесь круглыми скобками в индексах отмечается операция симметрирования, ψ_α и u — произвольные функции из $H_2^1(\Omega)$. (В (1.7) учтено, функционал E не зависит от антисимметричной части тензора изгибающих моментов, поэтому последнее соотношение (1.2) можно отбросить, поставив при этом в первое уравнение (1.2) вместо $m^{\alpha\beta}$ тензор $m^{(\alpha\beta)}$).

Ограничения (1.2), (1.6) расширяются на L_2 следующим образом (u — любая функция из $H_2^2(\Omega)$):

$$-\int_{\Omega} m^{\alpha\beta}u_{,\alpha\beta}\, dx^1 dx^2 = \int_{\Gamma} \left(-M\frac{\partial u}{\partial \nu} + Nu\right) ds \tag{1.8}$$

Здесь $\partial/\partial\nu = \nu_\alpha \partial/\partial x^\alpha$. Отметим, что соотношение (1.8) формально следует из (1.7), если в (1.7) положить $\psi_\alpha = -u_{,\alpha}$ и преобразовать интеграл по Γ при помощи тождеств

$$\begin{gathered} M^\alpha = \nu^\alpha(M^\beta\nu_\beta) + \tau^\alpha(M^\beta\tau_\beta) \\ \int_{\Gamma} M^\alpha u_{,\alpha}\, ds = \int_{\Gamma}\left(M\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{d}{ds}M^\alpha\tau_\alpha\right) ds \end{gathered} \tag{1.9}$$

2°. Заданные на Γ функции M^α и Q в модели Рейсснера должны удовлетворять условиям

$$\int_{\Gamma} Q\, ds = 0, \qquad \int_{\Gamma} (M^\alpha - x^\alpha Q)\, ds = 0 \tag{1.10}$$

Эти условия получаются из (1.7), если положить

$$\psi_\alpha = 0,\ u = \text{const};\quad \psi_\alpha = c_\alpha = \text{const},\quad u = -c_\alpha x^\alpha$$

Величины M и N в модели Кирхгофа должны удовлетворять ограничениям

$$\int_\Gamma N ds = 0,\quad \int_\Gamma (\nu^\alpha M - x^\alpha N)\, ds = 0 \tag{1.11}$$

Равенства (1.11) следуют из (1.8) при $u = \text{const}$ и $u = c_\alpha x^\alpha$. При помощи тождеств (1.9) легко доказать эквивалентность ограничений (1.10) и (1.11).

2. Функции напряжений.[1] 1°. *Общее решение уравнений равновесия.* Любое решение уравнений равновесия (1.2) локально можно представить в форме

$$m^{\alpha\beta} = e^{\beta\gamma}\chi^\alpha_{,\gamma} + e^{\alpha\beta}\chi,\quad q^\alpha = e^{\alpha\beta}\chi_{,\beta},\quad \chi = {}^1/_2\chi^\alpha_{,\alpha} \tag{2.1}$$

где $e^{\alpha\beta}$ — символы Леви-Чивита ($e^{11} = e^{22} = 0,\ e^{12} = -e^{21} = 1$), χ^α — некоторые функции.

Действительно, общее решение второго уравнения (1.2) локально имеет вид

$$q^\alpha = e^{\alpha\beta}\chi_{,\beta} \tag{2.2}$$

где χ — произвольная функция. Переписывая первое уравнение (1.2) в форме

$$(m^{\alpha\beta} - e^{\alpha\beta}\chi)_{,\beta} = 0$$

аналогично (2.2) получим

$$m^{\alpha\beta} - e^{\alpha\beta}\chi = e^{\beta\gamma}\chi^\alpha_{,\gamma} \tag{2.3}$$

где χ^α — произвольные функции. Осталось удовлетворить условию симметрии тензора изгибающих моментов. Сворачивая (2.3) с $e_{\alpha\beta}$, придем к третьему уравнению (2.1).

Легко видеть, что χ^α являются компонентами псевдовектора. В дальнейшем χ^α будем называть функциями напряжений.

2°. *Произвол в выборе функций напряжений.* Для того, чтобы функции χ^α и χ'^α соответствовали одному и тому же напряженному состоянию, необходимо и достаточно, чтобы (c, c^α — произвольные постоянные)

$$\chi'^\alpha = \chi^\alpha + cx^\alpha + c^\alpha$$

В дальнейшем произвол в выборе функций χ^α будем устранять, накладывая условия

$$\int_\Gamma \chi^\alpha ds = 0,\quad \int_\Gamma \chi ds = 0 \tag{2.4}$$

3°. *Краевые условия.* Уравнения (1.2) являются общими для моделей Кирхгофа и Рейсснера, поэтому допустимые напряженные состояния можно представить через функции напряжений как в модели Кирхгофа, так

---

[1] Утверждения 1° и 6° представляют частные случаи соответствующих результатов Рейсснера для оболочек [5].

и в модели Рейсснера. Различие будет заключаться в краевых условиях для функций напряжений.

В модели Рейсснера функции напряжений, согласно (1.3) и (2.1), должны удовлетворять на Г соотношениям

$$(2.5) \qquad d\chi^\alpha/ds - \tau^\alpha\chi = M^\alpha(s), \qquad d\chi/ds = Q(s)$$

Соотношения (2.5) представляют систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций χ^α и χ и интегрируются явно; однако в дальнейшем удобнее иметь дело с дифференциальной формой записи (2.5). В силу (1.10) χ^α и χ, определяемые из (2.5),— однозначные функции на Г.

В модели Кирхгофа краевые условия, записанные через функции напряжений, приобретают простой вид

$$(2.6) \qquad \nu_\alpha \frac{d\chi^\alpha}{ds} = M(s), \qquad \frac{d}{ds}\tau_\alpha \frac{d\chi^\alpha}{ds} = \tilde{N}(s)$$

Соотношения (2.6) представляют систему уравнений относительно χ^α и, так же как и (2.5), интегрируются явно. При помощи (1.11) легко убедиться, что соответствующие решения являются однозначными функциями на контуре Г.

Величины M^α и Q связаны с M, N, и Q взаимнооднозначными соотношениями, поэтому в модели Рейсснера можно считать заданными усилия Кирхгофа M и N, а также перерезывающую силу Q. В терминах функций напряжений краевые условия Кирхгофа и Рейсснера приобретают тогда простое содержание: краевые условия Кирхгофа сводятся к заданию на Г двух функций χ^α, а краевые условия Рейсснера — к заданию, помимо χ^α, функции $\chi \equiv {}^1/_2\chi^{\alpha}_{,\alpha}$.

4°. *Условия на разрыве.* При построении допустимых полей $m^{\alpha\beta}$ и q^α иногда удобно пользоваться кусочно-гладкими функциями. Разрывы $m^{\alpha\beta}$, q^α, χ^α и χ не могут быть произвольными. Соответствующие условия на разрывах выводятся из (1.7) и (1.8) и для моделей Кирхгофа и Рейсснера имеют одинаковую форму

$$[\chi^\alpha] = cx^\alpha + c^\alpha, \quad [\chi] = c$$

Здесь $[A]$ — разность значений величины A на двух сторонах линии разрыва, c, c^α — некоторые постоянные.

5°. *Вариационный принцип для модели Рейсснера.* Вариационная задача (1.1)—(1.4) в терминах функций напряжений формулируется следующим образом: найти минимум функционала

$$(2.7) \qquad E = \int_\Omega \Phi_1(\chi^{\alpha}_{,\beta}; \chi_{,\alpha})\, dx^1 dx^2$$

$$\Phi_1(\chi^{\alpha}_{,\beta}; \chi_{,\alpha}) = \Phi(e^{\beta\gamma}\chi^{\alpha}_{,\gamma} + e^{\alpha\beta}\chi; e^{\alpha\beta}\chi_{,\beta}), \qquad \chi = {}^1/_2\chi^{\alpha}_{,\alpha}$$

среди всех функций χ^α, удовлетворяющих на контуре Г условиям (2.5).

6°. *Уравнения совместности для модели Рейсснера.* Уравнения Эйлера вариационной задачи *п.* 5° имеют вид

$$(2.8) \qquad -e^{\beta\gamma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial m^{\alpha\beta}}\right)_{,\gamma} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q^\gamma}e^{\gamma\beta}\right)_{,\beta} = 0$$

После подстановки в (2.8) выражения для Φ (1.4) уравнение (2.8) превращается в уравнение относительно $m^{\alpha\beta}$ и q^α, замыкающее систему уравнений равновесия (1.2), (1.3).

В частности, в изотропном случае

$$2\Phi = 12\left[\frac{1}{2\mu} m_{\alpha\beta}m^{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(m_\gamma{}^\gamma)^2\right] + \frac{6h^2}{5\mu} q^\alpha q_\alpha$$

Поэтому уравнение (2.8) принимает вид

$$\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} m^\sigma_{\sigma,\gamma} e^{\alpha\gamma} - m^{\alpha\beta,\gamma} e_{\beta\gamma} + \frac{h^2}{10} q^{\gamma,\alpha\beta} e_{\gamma\beta} = 0 \tag{2.9}$$

Можно проверить, что подстановка в (2.9) уравнений состояния

$$m_{\alpha\beta} = \frac{1}{12}\left[\frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\psi^\sigma_{,\sigma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\psi_{(\alpha,\beta)}\right]$$

$$q_\alpha = \frac{5}{6} h^{-2}\mu(u_{,\alpha} + \psi_\alpha)$$

превращает (2.9) в тождество.

3. Одна оценка упругой энергии. Пусть в окрестности Ω' контура Γ можно ввести криволинейную систему координат ρ, s, связанную с x_α формулами $x^\alpha = x_0{}^\alpha(s) - \rho\nu^\alpha(s)$. Здесь $x_0{}^\alpha(s)$ — функции, задающие параметрически контур Γ, $0 \leqslant s \leqslant L$, $0 \leqslant \rho \leqslant l$, L — длина Γ; l — некоторое достаточно малое фиксированное число. Система координат ρ, s ортогональна, ковариантные компоненты метрического тензора даются формулами

$$g_{\rho\rho} = 1,\ g_{ss} = (1 + k\rho)^2,\ g_{\rho s} = 0,\ k = \nu_\alpha d\tau^\alpha / ds$$

Предположим, что функции $x_0{}^\alpha(s)$ трижды дифференцируемы, и кривизна контура Γ $k(s)$ и ее первая производная ограничены $|k(s)| \leqslant k_1$, $|dk/ds| \leqslant k_2$. Пусть также $k_1 l < 1$ и параметр h выбран столь малым, что $h \leqslant l$, $hlk_2 \leqslant 1$.

Теорема. Для упругой энергии E_0, найденной по модели Рейсснера, имеет место неравенство

$$E_0 \leqslant A \int_\Gamma (M^2 + L^2N^2 + hLQ^2)\, ds \tag{3.1}$$

где постоянная A зависит только от k_1, k_2, l и упругих модулей [1].

Лемма. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(\chi^\alpha) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\chi_{\alpha,\beta}\chi^{\alpha,\beta} + h^2\chi_{,\alpha}\chi^{,\alpha})\, dx^1dx^2, \quad \chi = \frac{1}{2}\chi^\alpha_{,\alpha} \tag{3.2}$$

среди функций χ^α, удовлетворяющих на Γ условиям

$$\chi^\alpha|_\Gamma = \chi_0{}^\alpha, \quad \chi|_\Gamma = \chi_0$$

Тогда для минимального значения I_0 функционала I справедлива оценка

$$I_0 \leqslant A\int_\Gamma \left[\left(\nu_\alpha \frac{d\chi_0{}^\alpha}{ds}\right)^2 + h^2\left(\frac{d}{ds}\tau_\alpha\frac{d\chi_0{}^\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\tau_\alpha\frac{d\chi_0{}^\alpha}{ds}\right)^2\right] ds \tag{3.3}$$

[1] Дальше буквой A будут обозначаться постоянные, не зависящие от h.

Доказательство. Перепишем подынтегральное количество в (3.2) в окрестности Ω' контура Г в криволинейной системе координат ρ, s, заменяя частные производные по x^α по правилам дифференцирования сложной функции на частные производные по ρ, s и вводя вместо χ^α переменные χ_ν и χ_τ соотношениями $\chi^\alpha = \chi_\nu \nu_\alpha + \chi_\tau \tau^\alpha$. При этом потребуются формулы

$$\rho_{,\alpha} = -\nu_\alpha(s), \quad s_{,\alpha} = (1 + k\rho)^{-1}\tau_\alpha$$

$$\frac{d\tau^\alpha}{ds} = k\nu^\alpha, \quad \frac{d\nu^\alpha}{ds} = -k\tau^\alpha, \quad dx^1dx^2 = |1 + k\rho|\,d\rho ds$$

После несложных оценок получим (запятой в индексах отмечаются частные производные)

$$\begin{aligned} (3.4)\qquad & |1 + k\rho|\,\chi_{\alpha,\beta}\chi^{\alpha,\beta} \leqslant A\,[\chi^2_{\tau,s} + \chi^2_{\tau,\rho} + \chi^2_{\nu,s} + \chi^2_{\nu,\rho} + \\ & + k_1^2(\chi_\tau^2 + \chi_\nu^2)] \\ & |1 + k\rho|\,\chi_{,\alpha}\chi^{,\alpha} \leqslant A\,[\chi^2_{\tau,ss} + \chi^2_{\tau,\rho s} + \chi^2_{\nu,\rho s} + \chi^2_{\nu,\rho\rho} + \\ & + (k_1^2 + L^2k_2^2)\,\chi^2_{\tau,s} + k_1^2(\chi^2_{\nu,s} + \chi^2_{\nu,\rho}) + (k_1^4 + k_2^4)\,\chi_\nu^2] \end{aligned}$$

Зададим функции χ_ν и χ_τ в Ω' формулами

$$\chi_\tau = \chi_0{}^\alpha\tau_\alpha f(\rho), \quad \chi_\nu = \chi_0{}^\alpha\nu_\alpha f(\rho) + \chi_0 g(\rho)$$

$$f(\rho) = (1 - \rho^2/l^2)^2, \quad g(\rho) = \rho\,(1 - \rho^2/h^2)^2 \tag{3.5}$$

Вне Ω' положим $\chi^\alpha = 0$. Построенные функции являются допустимыми, поэтому их подстановка в (3.2) дает оценку I_0 сверху. В результате этой подстановки при помощи неравенств

$$\begin{aligned} & \int\limits_\Gamma \chi_\alpha\chi^\alpha ds \leqslant A \int\limits_\Gamma \left[\left(\nu_\alpha \frac{d\chi^\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\tau_\alpha \frac{d\chi^\alpha}{ds}\right)^2\right] ds \\ (3.6)\qquad & \int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{d}{ds}\nu_\alpha\chi^\alpha\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\tau_\alpha\chi^\alpha\right)^2\right] ds \leqslant A \int\limits_\Gamma \frac{d\chi_\alpha}{ds}\frac{d\chi^\alpha}{ds}\, ds \\ & \int\limits_\Gamma \left(\frac{d^2}{ds^2}\tau_\alpha\chi^\alpha\right)^2 ds \leqslant A \int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{d}{ds}\tau_\alpha\frac{d\chi^\alpha}{ds}\right)^2 + L^{-2}\frac{d\chi^\alpha}{ds}\frac{d\chi_\alpha}{ds}\right] ds \end{aligned}$$

а также неравенства (3.4) получим (3.3). Неравенства (3.6) выводятся при помощи неравенства Виртингера [6].

Доказательство теоремы. Для плотности упругой энергии можно написать

$$\begin{aligned} 2\Phi & \leqslant A\,(m_{\alpha\beta}m^{\alpha\beta} + h^2 q_\alpha q^\alpha) = A\,(\chi_{\alpha,\beta}\chi^{\alpha,\beta} - {}^1\!/_2\,(\chi^\sigma_{,\sigma})^2 + \\ & + h^2\chi_{,\alpha}\chi^{,\alpha}) \leqslant A\,(\chi_{\alpha,\beta}\chi^{\alpha,\beta} + h^2\chi_{,\alpha}\chi^{,\alpha}) \end{aligned}$$

Поэтому минимум функционала E (2.7) среди функций, удовлетворяющих краевым условиям (2.5), не будет превосходить минимума на том же множестве функций функционала $A \cdot I$. Отсюда с использованием (2.6), (3.3) и неравенства Виртингера вытекает (3.1).

Замечание: Выше не было использовано, что тензор упругих податливостей не зависит от x^α. Поэтому доказанное утверждение справедливо и для неоднородных пластин переменной толщины.

4. Асимптотика решений уравнений Рейсснера. Дальше будем считать, что внешние нагрузки M^α и Q не зависят от параметра h, и $M^2 + N^2 \not\equiv 0$. Тогда, очевидно, E_0 имеет порядок $h^0 = 1$.

Теорема. Решение системы уравнений Рейсснера при $h \to 0$ сходится в энергетической норме к решению уравнений Кирхгофа.

Доказательство. Обозначим через $m_K^{\alpha\beta}$, q_K^α и $m_R^{\alpha\beta}$, q_R^α решения уравнений Кирхгофа и Рейсснера, через $\Delta m^{\alpha\beta}$, Δq^α — их разность, через $E\,(\Delta m^{\alpha\beta}, \Delta q^\alpha)$ — упругую энергию поля $\Delta m^{\alpha\beta}$, Δq^α. Покажем, что

$$E\,(\Delta m^{\alpha\beta}, \Delta q^\alpha) = O\,(h) \tag{4.1}$$

Из (4.1), очевидно, следует утверждение теоремы.

Будем считать решение уравнений Кирхгофа $m_K^{\alpha\beta}$ и q_K^α известным и сделаем в вариационной задаче (1.1) — (1.4) замену искомых функций $m'^{\alpha\beta} = m^{\alpha\beta} - m_K^{\alpha\beta}$, $q'^\alpha = q^\alpha - q_K^\alpha$. Функционал энергии после отбрасывания членов, зависящих только от $m_K^{\alpha\beta}$ и q_K^α, примет вид

$$J = \int\limits_\Omega \left(\Phi\,(m'^{\alpha\beta}, q'^\alpha) + h^2 B_{\alpha\beta} q'^\alpha q_K^\beta + A_{\alpha\beta\gamma\delta} m'^{\alpha\beta} m_K^{\gamma\delta}\right) dx^1\, dx^2 \tag{4.2}$$

Величины $m'^{\alpha\beta}$ и q'^α определяются из задачи о минимуме функционала I по всем функциям $m'^{\alpha\beta}$ и q'^α, удовлетворяющим уравнениям (1.2) и краевым условиям

$$\begin{aligned} & m'^{\alpha\beta}\nu_\beta = \tau^\alpha\,(M^\beta\tau_\beta - m_K^{\beta\gamma}\tau_\beta\nu_\gamma) \\ & q'^\alpha\nu_\alpha = -\frac{d}{ds}(M^\beta\tau_\beta - m_K^{\beta\gamma}\tau_\beta\nu_\gamma) \equiv Q' \end{aligned} \tag{4.3}$$

Отметим, что краевые усилия Кирхгофа M и N для краевых данных (4.3) равны нулю.

Минимизирующий элемент функционала J есть $\Delta m^{\alpha\beta}$, Δq^α.

Покажем, что последний член в (4.2) обращается в нуль. В самом деле, для решения уравнений Кирхгофа существует функция u, такая, что $A_{\alpha\beta\gamma\delta}\, m_K^{\gamma\delta} = u_{,\alpha\beta}$, поэтому последний член в (4.3) можно переписать в виде

$$\int\limits_\Omega m'^{\alpha\beta} u_{,\alpha\beta}\, dx^1\, dx^2 \tag{4.4}$$

С другой стороны, для любой функции u в силу (1.2) и (4.3) интеграл (4.4) обращается в нуль.

Второе слагаемое в (4.2) оценим при помощи неравенства Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} & h^2 \int\limits_\Omega B_{\alpha\beta} q'^\alpha q_K^\beta\, dx^1\, dx^2 \leqslant \frac{h^2}{2} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} B_{\alpha\beta} q'^\alpha q'^\beta + 2 B_{\alpha\beta} q_K^\alpha q_K^\beta\right) dx^1\, dx^2 \leqslant \\ & \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Phi\,(m'^{\alpha\beta}, q'^\alpha)\, dx^1\, dx^2 + h^2 \int\limits_\Omega B_{\alpha\beta} q_K^\alpha q_K^\beta\, dx^1\, dx^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

На основании (4.5) функционал J можно оценить сверху и снизу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Phi\,(m'^{\alpha\beta}, q'^\alpha)\, dx^1\, dx^2 - h^2 \int\limits_\Omega B_{\alpha\beta} q_K^\alpha q_K^\beta\, dx^1\, dx^2 \leqslant J \leqslant \\ & \leqslant \frac{3}{2} \int\limits_\Omega \Phi\,(m'^{\alpha\beta}, q'^\alpha)\, dx^1\, dx^2 + h^2 \int\limits_\Omega B_{\alpha\beta} q_K^\alpha q_K^\beta\, dx^1\, dx^2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Из первого неравенства (4.6), полагая $m'^{\alpha\beta} = \Delta m^{\alpha\beta}$, $q'^{\alpha} = \Delta q^{\alpha}$, имеем

$$\frac{1}{2} E(\Delta m^{\alpha\beta}, \Delta q^{\alpha}) - h^2 \int_{\Omega} B_{\alpha\beta} q_{\text{к}}{}^{\alpha} q_{\text{к}}{}^{\beta}\, dx^1\, dx^2 \leqslant \inf J \tag{4.7}$$

Минимизируем обе части второго неравенства (4.6) по $m'^{\alpha\beta}$ и q'^{α}

$$\inf I \leqslant \frac{3}{2} \inf \int_{\Omega} \Phi(m'^{\alpha\beta}, q'^{\alpha})\, dx^1\, dx^2 + h^2 \int_{\Omega} B_{\alpha\beta} q_{\text{к}}{}^{\alpha} q_{\text{к}}{}^{\beta}\, dx^1\, dx^2 \tag{4.8}$$

Оценим правую часть в (4.8) при помощи неравенства (3.1). Так как для краевых условий (4.3) $M = N = 0$, получим

$$\inf \int_{\Omega} \Phi(m'^{\alpha\beta}, q'^{\alpha})\, dx^1\, dx^2 \leqslant Ah \int_{\Gamma} Q'^2\, ds \tag{4.9}$$

Из (4.7) и (4.9) следует (4.1) и утверждение теоремы.

Вопрос о сходимости решений уравнений Рейсснера к решениям уравнения Кирхгофа другим методом рассматривался в работе [7].

Поступила 3 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reissner E.* On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1, p. 55—68.
2. *Бердичевский В. Л.* Об уравнениях, описывающих поперечные колебания тонких упругих пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.
3. *Бердичевский В. Л.* Об одном вариационном принципе. Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 6.
4. *Бердичевский В. Л.* Одно энергетическое неравенство в теории изгиба пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
5. *Reissner E.* A note on stress functions and compatibulity equations in shell theory. In: Topics in applied mechanics, Amsterdam, Elsevier Publ. Co, 1965.
6. *Беккенбах Э. Ф., Беллман Р.* Неравенства, М., «Мир», 1965.
7. *Гордон Л. А., Шойхет Б. А.* Об одном способе численного расчета тонких пластин и оболочек. Изв. ВНИИ гидротехники им. Б. Е. Веденеева, 1972, т. 98.