

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ПЛАСТИН, КОЛЕБЛЮЩИХСЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. Баничук, А. А. Мионов

(Москва)

Исследуются колебания упругих пластин в идеальной жидкости. Формулируется оптимизационная задача об отыскании распределения толщин, для которого реализуется максимум фундаментальной частоты колебаний. Выводятся необходимые условия экстремума. Изучается зависимость фундаментальной частоты (функционала) от параметров задачи. Исследуется асимптотическое поведение распределений прогибов и толщин у краев оптимальной пластинки. Приводится аналитическое решение задачи оптимизации для тонких трехслойных панелей и показывается, что в этом случае условия оптимальности являются не только необходимыми, но и достаточными. Для сплошных панелей эта задача решалась численно в [1].

1. Рассмотрим задачу о малых колебаниях упругой пластинки в безграничной массе идеальной жидкости. Предположим, что пластинка шарнирно закреплена по гладкому контуру Γ в плоскости $z = 0$ прямоугольной системы координат xuz . Обозначим через $h = h(x, y)$ и $u = u(x, y, t)$, $Q = Q(x, y, t)$ соответственно распределение толщин, функцию прогибов и реакцию со стороны жидкости на пластинку. Тогда уравнение малых колебаний пластинки и граничные условия можно записать в виде

$$(1.1) \quad \rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = Q, \quad (x, y) \in G \\ u = 0, \quad D \left(\Delta u - \frac{1 - \nu}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma$$

Здесь G — область в плоскости xy , ограниченная контуром Γ , $D = D(h)$ — изгибная жесткость пластинки, ν — коэффициент Пуассона, ρ — удельная плотность материала пластинки. Через Δ , n , R обозначены соответственно оператор Лапласа по переменным xu , нормаль и радиус кривизны контура Γ .

Предположим, что движение жидкости безвихревое. Тогда его можно описать с помощью потенциала скоростей $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа и линеаризованным граничным условиям

$$(1.2) \quad \Delta \varphi = 0, \quad (\partial \varphi / \partial z)_{G^\pm} = \partial u / \partial t, \quad (\varphi)_\infty = 0$$

Первое из граничных условий (1.2) выставлено на верхнем (знак плюс) и нижнем (минус) берегах разреза $z = 0$, $(x, y) \in G$. Это условие получено путем сноса на плоскость xu условия непротекания жидкости через поверхность пластинки. При этом использовалось предположение о малости

прогибов u и толщин h , а также о безотрывности движений жидкости и пластинки.

Реакция Q на пластинку со стороны жидкости равна разности давлений на нижней и верхней поверхностях пластинки: $Q = p^- - p^+$. Выразим распределение давлений p через потенциал скоростей φ с помощью интеграла Коши — Лагранжа. Пренебрегая квадратичными членами, получим $p = p_\infty - \rho_2 \partial \varphi / \partial t$, где ρ_2 — плотность жидкости, а p_∞ — давление на бесконечности. Таким образом, получили выражение для реакции Q

$$(1.3) \quad Q = \rho_2 \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} \right)$$

Замкнутая краевая задача (1.1) — (1.3) полностью определяет функции $u(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, z, t)$, если заданы некоторые начальные условия.

В дальнейшем будем рассматривать свободные колебания системы и поэтому будем искать решение задачи (1.1) — (1.3) в виде

$$u = U(x, y) \exp(i\omega t), \quad \varphi = i\omega \Phi(x, y, z) \exp(i\omega t)$$

где ω — частота свободных колебаний. Представим зависимость изгибной жесткости пластинки D от распределения толщины h в виде $D(h) = \beta_m h^m$. При $m = 3$ эта зависимость отвечает случаю сплошных пластин, при $m = 1$ — трехслойных (h — толщина внешних армирующих слоев).

Перейдем к безразмерным переменным и обозначениям

$$x' = x/l, \quad y' = y/l, \quad z' = z/l, \quad U' = U/l, \quad h' = l^2 h/V$$

$$\Omega^2 = \omega^2 \rho_1 l^{2m+2} \beta_m^{-1} V^{1-m}, \quad \alpha = \rho_2 l^3 / \rho_1 V$$

Здесь V — объем пластинки, l — характерный размер области G , α — безразмерный параметр задачи. Штрихи в дальнейшем будем опускать. Таким образом, получили краевую задачу на собственные значения

$$(1.4) \quad L_1(h, U) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^m \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^m \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(h^m \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) = \Omega^2 [hU + \alpha(\Phi^- - \Phi^+)]$$

$$z = 0, \quad (x, y) \in G$$

$$(1.5) \quad (U)_\Gamma = 0, \quad h^m \left(\Delta U - \frac{1 - \nu}{R} \frac{\partial U}{\partial n} \right)_\Gamma = 0$$

$$(1.6) \quad \Delta \Phi = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_G^\pm = U, \quad (\Phi_\infty) = 0$$

2. Задача для потенциала Φ линейна по U и не зависит от h , поэтому разность $\Phi^- - \Phi^+$ в правой части (1.4) можно представить в виде $\Phi^- - \Phi^+ = L_2 U$, где L_2 — некоторый линейный оператор, который оказывается самосопряженным и положительным.

Действительно, пусть U_1 и U_2 — две произвольные функции и пусть Φ_1 и Φ_2 — решения краевой задачи (1.6) для случаев $U = U_1$ и $U = U_2$. Тогда

$$(U_1, L_2 U_2) = \iint_G U_1 L_2 U_2 dx dy = \iint_G U_1 (\Phi_2^- - \Phi_2^+) dx dy =$$

$$= \iint_G \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Phi_2^- - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Phi_2^+ \right) dx dy = - \iint_G \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Phi_2 d\sigma$$

В последнем интеграле интегрирование ведется как по верхней, так и по нижней поверхностям пластинки, n — внешняя нормаль к поверхности пластинки. Преобразуя интеграл по формуле Грина, получим

$$(U_1, L_2 U_2) = - \iint_G \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Phi_2 d\sigma = - \iint_G \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma = \iint_G (\Phi_1^- - \Phi_1^+) \times \\ \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} dx dy = \iint_G L_2 U_1 U_2 dx dy = (L_2 U_1, U_2)$$

Покажем теперь, что $(U, L_2 U) > 0$ при всех допустимых U . Действительно, для произвольного допустимого U имеем

$$(U, L_2 U) = \iint_G U L_2 U dx dy = \iint_G \frac{\partial \Phi}{\partial z} (\Phi^- - \Phi^+) dx dy = \\ = - \iint_G \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = \iiint (\text{grad } \Phi)^2 dx dy dz > 0$$

В последнем интеграле интегрирование ведется по всей области, занимаемой жидкостью.

Свойства положительности и самосопряженности для оператора L_1 известны (см. [2]).

Таким образом, задача на собственные значения (1.4) — (1.6) самосопряженная и вполне определенная, откуда следует действительность собственных чисел и применимость вариационного принципа Релея для отыскания наименьшего собственного значения

$$(2.1) \quad \Omega_0^2(h) = \min_U J(h, U) \\ J(h, U) = I_1(h, U) [\alpha I_2(U) + I_3(h, U)]^{-1} \\ I_1 = \iint_G U L_1 U dx dy, \quad I_2 = \iint_G U L_2 U dx dy, \quad I_3 = \iint_G h U^2 dx dy$$

Минимум по U вычисляется на множестве всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $U(x, y)$, удовлетворяющих первому краевому условию (1.5). Второму краевому условию (1.5) заранее удовлетворять не требуется: функция U , доставляющая минимум функционалу J , будет автоматически удовлетворять второму краевому условию (1.5).

3. Релеевское отношение $J(h, U)$ является функционалом от $h(x, y)$ и от $U(x, y)$, поэтому фундаментальная частота Ω_0 , определяемая из (2.1), зависит от $h(x, y)$. Рассмотрим множество непрерывных функций $h(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$(3.1) \quad \iint_G h dx dy = 1$$

Изопериметрическое условие (3.1) означает постоянство объема пластинки. Равенство объема единице объясняется соответствующим выбором безразмерных переменных.

Сформулируем задачу оптимизации. Требуется найти функцию h , удовлетворяющую условию (3.1) и максимизирующую минимальное собственное значение Ω_0 (фундаментальную частоту), т. е.

$$(3.2) \quad \Omega_{0*}^2 = \max_h \Omega_0^2(h) = \max_h \min_U J(h, U)$$

Задача (3.1), (3.2) — однопараметрическая с параметром $\alpha = \rho_2 l^3 / (\rho_1 V)$. При $\alpha = 0$ имеем задачу оптимизации частоты для пластинки, колеблющейся в вакууме.

Получим необходимое условие оптимальности в задаче (3.1), (3.2). Выписывая с этой целью выражения для первой вариации δJ при условии (3.1) и полагая $\delta J = 0$, имеем

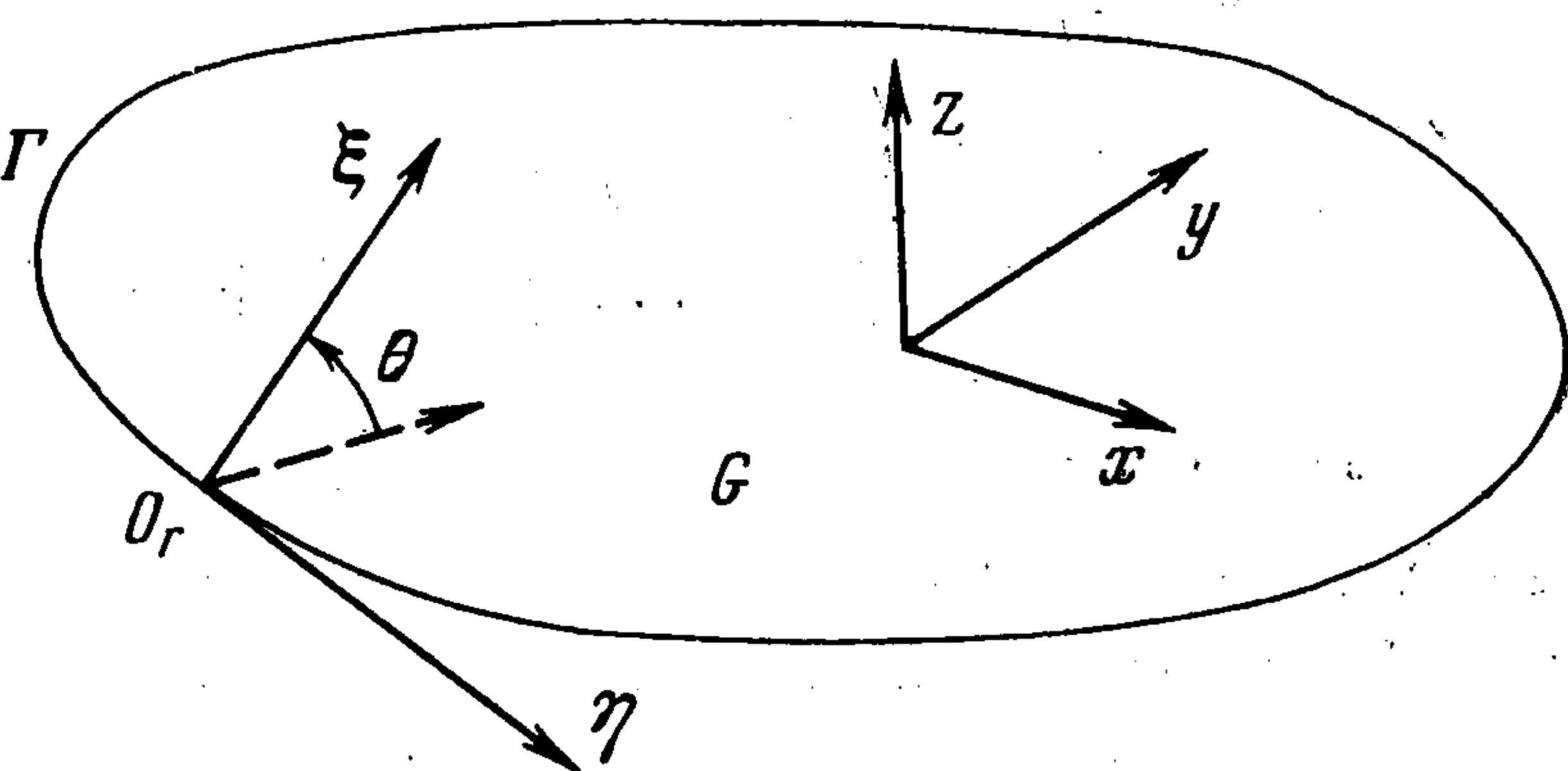
$$(3.3) \quad mh^{m-1} \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} - \Omega^2 U^2 = c^2$$

где $c^2 > 0$ — постоянная, определяемая при решении задачи (множитель Лагранжа).

Отметим, что при $m = 1$ условие оптимальности не зависит явно от функции h .

4. Исследуем поведение функций h , U , Φ вблизи контура Γ для оптимальной пластинки в случае $m = 3$. Для этого в произвольной точке O_Γ контура Γ (см. фиг. 1) введем локальную цилиндрическую систему координат $\eta\xi\theta$,

направив ось η по касательной к контуру Γ в точке O_Γ . Ось ξ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси η , а угол θ отсчитывается от плоскости xu до оси ξ . Тогда при $\theta = 0$ координаты $\xi\eta$ представляют собой декартову систему координат в плоскости xu .



Фиг. 1

Условие оптимальности (3.3) и второе граничное условие (1.5) в окрестности точки O_Γ при $m = 3$ и $\theta = 0$ примут вид

$$(4.1) \quad 3h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right)^2 - \Omega_0^2 U^2 = c^2, \quad h^3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0$$

Отсюда, учитывая первое краевое условие (1.5), получаем

$$(4.2) \quad (h)_{\xi=0} = 0, \quad (\partial^2 U / \partial \xi^2)_{\xi=0}^{-2} = 0$$

Появление таких краевых условий характерно для задач оптимизации упругих балок и пластин в случае шарнирного закрепления краев.

Используя условие оптимальности (4.1) и граничные условия для функции U , запишем уравнение (1.4) при малых ξ

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right)^{-2} - \Omega_0^2 \left[cU \left(\sqrt{3} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right)^{-1} + \alpha(\Phi^+ - \Phi^-) \right] = 0$$

Учитывая краевое условие (4.2) и условие обращения в нуль на границе Γ функции U , запишем ее асимптотическое представление

$$(4.4) \quad U = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + \xi^\mu (b_0 + b_1 \xi + \dots)$$

Параметр μ должен удовлетворять условиям $0 < \mu < 2$, $\mu \neq 1$, которые следуют из условий (4.2) и первого краевого условия (1.5).

Исследуем асимптотику функции Φ . Уравнение Лапласа для функции Φ в окрестности точки O_T асимптотически представимо в виде

$$\frac{1}{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] = 0$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\Phi = g(\theta) \xi^\kappa + o(\xi^\kappa)$, где κ — некоторый параметр, который предстоит определить, а g — функция угла θ . Подставив это выражение в уравнение Лапласа и отбросив малые высшего порядка по ξ , получим

$$g'' + \kappa^2 g = 0$$

Заметим, что в силу антисимметрии задачи для Φ относительно плоскости xy , функция Φ должна быть нечетной по z и, следовательно, функция g должна удовлетворять условию $g(\pi) = 0$.

Из граничного условия для функции Φ нетрудно получить краевое условие для g . Действительно

$$(4.5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = \xi^{\kappa-1} (g')_{\theta=0} = \\ = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + \xi^\mu (b_0 + b_1 \xi + \dots)$$

Определение параметров κ и μ , как обычно, проводится путем последовательного рассмотрения различных вариантов соотношений между ними. Не приводя здесь этих рассуждений, сформулируем окончательный результат. Из соотношений (4.3) — (4.5) величины κ и μ определяются единственным образом: $\mu = 3/2$, $\kappa = 2$.

Подставляя найденные асимптотики в условие оптимальности (4.1), получим асимптотику для h

$$(4.6) \quad h = \frac{c}{\sqrt{3}} \sqrt{\xi} + \dots$$

Асимптотика (4.6) и (4.4) с $\mu = 3/2$ имеет тот же вид, что и для оптимальных пластин, колеблющихся в вакууме [3].

5. Фундаментальная частота Ω_0 при фиксированной функции h зависит от параметра α . Можно показать, что Ω_0 — монотонно убывающая функция параметра α . Ниже рассмотрим случай оптимальных пластин. Каждому значению параметра α отвечает некоторое оптимальное распределение толщины h_* и некоторое оптимальное значение фундаментальной частоты Ω_{0*} , которая оказывается убывающей функцией α .

Действительно, пусть (Ω_{0*}^2, U, h) — оптимальное решение при некотором значении параметра α и пусть $(\Omega_{0*}^2 + d\Omega_{0*}^2, U + \delta U, h + \delta h)$ — оптимальное решение при значении параметра $\alpha + d\alpha$. Тогда из условия (3.2) вытекает

$$d\Omega_{0*}^2 [\alpha I_2(U) + I_3(h, U)] + d\alpha [\Omega_{0*}^2 I_2(U)] + \\ + \iint_G [L_1(h, U) - \Omega_{0*}^2 (hU + \alpha L_2 U)] \delta U dx dy + \\ + \iint_G \left\{ m h^{m-1} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] - \right. \\ \left. - \Omega_{0*}^2 U^2 \right\} \delta h dx dy = 0$$

Функции h и $h + \delta h$ должны удовлетворять изопериметрическому условию (3.1), поэтому

$$\iint_G \delta h dx dy = 0$$

А так как функции U и h удовлетворяют условию оптимальности (3.3) и уравнению (1.4), то

$$\frac{d\Omega_{0*}^2}{d\alpha} = -\Omega_{0*}^2 \frac{I_2(U)}{\alpha I_2(U) + I_3(h, U)}$$

Было показано, что оператор L_2 положителен, поэтому интегралы $I_2(U)$ и $I_3(h, U)$ положительны. Следовательно, $d\Omega_{0*}^2/d\alpha < 0$ и функция Ω_{0*}^2 — строго убывающая функция α .

6. Рассмотрим случай линейной зависимости изгибной жесткости D от управляющей функции h , отвечающий трехслойным пластинкам. Под h будем понимать толщину внешних несущих слоев. Обозначим $\lambda = \alpha\Omega^2$. Тогда краевая задача на собственные значения примет вид

$$L_1(h, U) = \lambda (hU/\alpha + L_2U)$$

Рассмотрим плоскую задачу для длинной прямоугольной пластинки, шарнирно закрепленной вдоль длинных краев, которые параллельны оси y . Будем предполагать, что толщина пластинки не меняется в направлении y , т. е. $h = h(x)$, и все рассмотрения проведем в плоскости xz , так как производные по y от искомым функций равны нулю. В данной задаче будем считать фиксированным не объем пластинки, а площадь поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной оси y .

Для данной задачи запишем уравнение колебаний пластинки

$$(6.1) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(h \frac{d^2 U}{dx^2} \right) = \lambda \left(\frac{hU}{\alpha} + L_2 U \right)$$

Как показано в работе [1], выражение для L_2 имеет вид

$$L_2 U = \int_{-1}^1 K(t, x) U(t) dt, \quad K(t, x) = \frac{1}{\pi} \ln \left[\frac{1+r(t, x)}{1-r(t, x)} \right]$$

$$r(t, x) = \left[\frac{(1-x)(1+t)}{(1-t)(1+x)} \right]^{1/2}$$

Граничные условия и условия оптимальности примут вид

$$(6.2) \quad U(-1) = U(1) = 0, \quad \left(h \frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=-1} = \left(h \frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=1} = 0$$

$$(6.3) \quad \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)^2 - \frac{\lambda}{\alpha} U^2 = c^2$$

Рассмотрим предельный случай $\alpha \rightarrow \infty$, соответствующий тонким пластинкам, или жидкости бесконечной плотности. Тогда уравнение (6.1) и условие оптимальности (6.3) примут вид

$$(6.4) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(h \frac{d^2 U}{dx^2} \right) = \lambda \int_{-1}^1 K(t, x) U(t) dt$$

$$(6.5) \quad (d^2 U/dx^2)^2 = c^2$$

Учитывая симметрию задачи относительно точки $x = 0$, будем искать решение на интервале $[-1, 0]$, выставив в точке $x = 0$ граничные условия

$$(6.6) \quad \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(h \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=0} = 0$$

Последнее условие означает отсутствие перерезывающей силы в центре. Отметим, что функция $h(x)$ нигде на интервале $[-1, 1]$ не обращается в нуль.

Действительно, пусть $h(x_1) = 0$, тогда выберем в качестве U кусочно-линейную функцию

$$U = \begin{cases} (1+x)(1-x_1), & -1 \leq x \leq x_1 \\ (1+x_1)(1-x), & x_1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

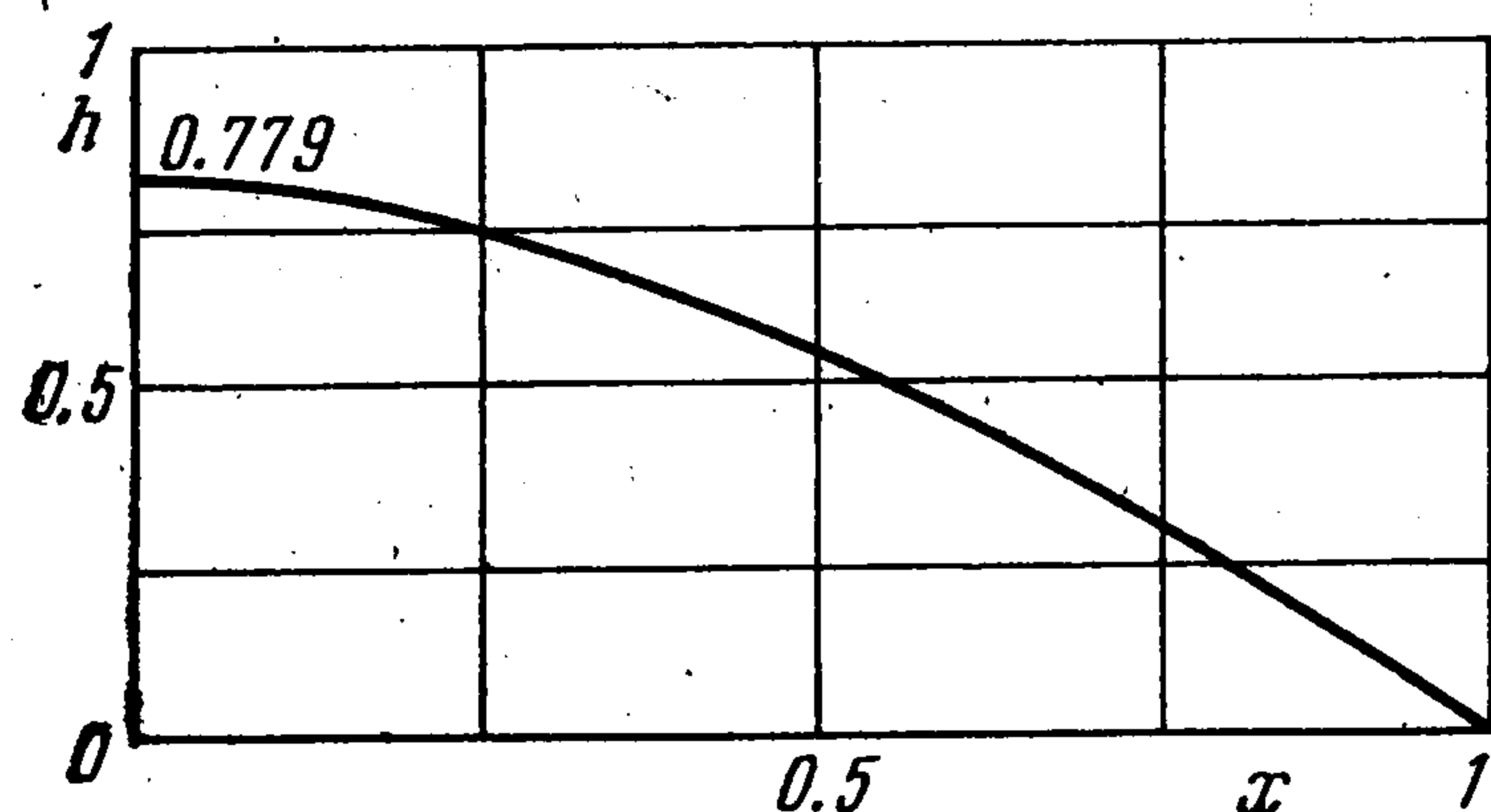
Эта функция удовлетворяет краевым условиям, а релеевское отношение независимо от выбора функции h равно нулю, следовательно, такая функция h не является оптимальной.

Как уже отмечалось, в случае линейной зависимости D от h условие оптимальности не содержит функцию h . Решим уравнение (6.5) относительно U при граничных условиях (6.2). Имеем

$$U = \frac{1}{2}c(x^2 - 1)$$

Подставляя это выражение в уравнение (6.4), получим

$$\frac{d^2}{dx^2} h = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 K(t, x)(t^2 - 1) dt$$



Фиг. 2

Вторые граничные условия (6.2) и (6.6) превращаются в краевые условия для h : $h(1) = dh(0)/dx = 0$. Решение краевой задачи для h имеет вид

$$h = \frac{\lambda}{2} g(x), \quad g(x) \equiv \int_{-1}^x \int_0^\eta \int_{-1}^1 K(t, \xi)(t^2 - 1) dt d\xi d\eta$$

Используя найденное выражение для функции h и изопериметрическое условие, найдем, что

$$\lambda = \left[\int_0^1 g(x) dx \right]^{-1} \approx 2.269$$

График оптимального распределения толщин представлен на фиг. 2. (ввиду симметрии показана лишь область $x > 0$).

Покажем, что в случае линейной зависимости D от h ($\alpha \rightarrow \infty$) необходимое условие оптимальности является также и достаточным. Действительно, пусть h^* , U^* — решения, удовлетворяющие условию оптимальности, h — некоторое произвольное распределение толщины и U — со-

ответствующая ему функция прогибов. Тогда

$$\Delta\lambda = \lambda(h^*) - \lambda(h) = \frac{I_1(h^*, U^*)}{I_2(U^*)} - \frac{I_1(h, U)}{I_2(U)}$$

Покажем, что $\Delta\lambda \geq 0$. Для этого, учитывая условие оптимальности (3.3), изопериметрическое условие (3.1) и свойства функций h^* , U^* и h , U , проведем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{I_1(h^*, U^*)}{I_2(U^*)} - \frac{I_1(h, U)}{I_2(U)} \geq \frac{I_1(h^*, U^*)}{I_1(U^*)} - \frac{I_1(h, U^*)}{I_2(U^*)} = \\ &= \frac{1}{I_2(U^*)} \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} (h^* - h) dx dy = \frac{1}{I_2(U^*)} \iint_G c^2 (h^* - h) dx dy = 0 \end{aligned}$$

Поступила 18 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В., Миронов А. А. Оптимизация частот колебаний упругих пластинок в идеальной жидкости. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
3. Olhoff N. Optimal design of vibrating rectangular plates. Internat. J. Solids and Structures, 1974, vol. 10, No. 1.