

**АСИМПТОТИКА ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ОПРЕДЕЛЕННОМ СКАЧКЕ
ПРИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ
НА УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ**

Н. Д. Векслер, М. Э. Кутсер

(Таллин)

Рассматривается двумерная нестационарная задача о дифракции плоской акустической волны на замкнутой тонкой упругой круговой цилиндрической оболочке. Применяется метод двукратного интегрального преобразования (Лапласа по времени и Фурье по углу). Обратные преобразования выполняются приближенно путем применения метода перевала и нахождения вычетов в полюсах. Выводятся асимптотические формулы для поля давления за фронтами отраженной, излученных и дифрагированных волн и анализируется влияние упругости оболочки на волны этих трех типов. Состояние проблемы освещено в монографиях и статьях [1-24]. Примененный математический аппарат разработан Фридлендером [1,2,13].

1. Постановка задачи. В безграничной идеальной сжимаемой жидкости покоится замкнутая тонкая упругая круговая цилиндрическая оболочка. На эту оболочку, нормально к ее продольной оси, падает плоская акустическая волна

$$(1.1) \quad p_1(\xi, t) = p_0 g(t_\xi) H(t_\xi), \quad t_\xi = t + \xi$$

Рассмотрим следующую двумерную нестационарную задачу: найти поле давления в волне p_2 (p_2 — сумма отраженной, излученных и дифрагированных волн), вызванное действием волны p_1 , удовлетворяющее волновому уравнению, начальным и граничным условиям

$$(1.2) \quad \left(\nabla_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_2 = 0, \quad \nabla_0^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$r \geq 1, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad t \geq 0$$

$$p_2 = \frac{\partial}{\partial t} p_2 = u_j = \frac{\partial}{\partial t} u_j = 0 \quad (j=1, 2, 3), \quad t=0$$

$$q_r = -(p_1 + p_2), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_3 = -\frac{1}{\rho C^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_1 + p_2), \quad r=1, \quad p_2 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Предполагаем, что решение ограничено в области, где оно определено.

Время отсчитывается с момента соприкосновения падающей волны с поверхностью оболочки, происходящего в точке с координатами $r=1$, $\theta=0$.

Уравнения движения оболочки соответствуют линейной теории типа Тимошенко

$$(1.3) \quad L_{ij}u_j = q\delta_{i3} \quad (L_{ij} = L_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3)$$

$$L_{11} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \kappa^2, \quad L_{12} = \kappa^2, \quad L_{13} = (1 + \kappa^2) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$L_{22} = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \kappa^2, \quad L_{23} = -\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$L_{33} = - \left(\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + 1$$

В формулах (1.1) – (1.3) введены следующие обозначения:

$$\xi = \frac{X}{R_0}, \quad r = \frac{R}{R_0}, \quad t = \frac{CT}{R_0}, \quad u_1 = \frac{U_\theta}{R_0}, \quad u_3 = \frac{U_r}{R_0}$$

$$\kappa^2 = \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2, \quad \lambda^2 = \left(\frac{C}{C_1} \right)^2, \quad \mu^2 = \left(\frac{C_2}{C} \right)^2, \quad q = \frac{q_r \delta_1}{\rho C^2}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \delta \lambda^2, \quad \delta = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{R_0}{h}, \quad a^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{R_0} \right)^2,$$

$$C_1^2 = \frac{E}{\rho_1 (1 - \nu^2)}, \quad C_2^2 = \frac{Ek_T}{2\rho_1 (1 + \nu)}$$

Здесь R, θ — радиальная и угловая координаты, T — время, X — координата, направленная в сторону, противоположную направлению распространения падающей волны; ρ, C — плотность жидкости и скорость звука в жидкости; E, ν, ρ_1 — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки; $R_0, 2h$ — радиус и толщина оболочки; U_θ, U_r — тангенциальный и радиальный компоненты вектора смещения оболочки, u_2 — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки, C_1, C_2 — скорости распространения фронтов упругих волн в линейной теории тонких оболочек типа Тимошенко, k_T — численный коэффициент сдвига, p_0 — постоянная, имеющая размерность давления, g — произвольная ограниченная функция, определяющая закон изменения давления в падающей волне; H, δ_{ij} — единичная функция Хевисайда и символ Кронекера.

2. Формальное решение. Для отыскания решения задачи используем метод интегральных преобразований. По времени t проведем интегральное преобразование Лапласа, а по углу θ — интегральное преобразование Фурье. Представим формулы прямых и обратных преобразований

$$f^L(r, \theta, s) = \int_0^\infty f(r, \theta, t) e^{-st} dt, \quad f^{LF}(r, \omega, s) = \int_{-\infty}^\infty f^L(r, \theta, s) e^{-i\omega\theta} d\theta$$

$$f^L(r, \theta, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f^{LF}(r, \omega, s) e^{i\omega\theta} d\omega, \quad f(r, \theta, t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} f^L(r, \theta, s) e^{st} ds, \quad a_0 > 0$$

Здесь s — параметр преобразования Лапласа, ω — параметр преобразования Фурье.

Применяя по углу θ преобразование Фурье, будем полагать, что функция $f(r, \theta, t)$ определена не только в физической области $r \geq 1, -\pi \leq \theta \leq$

$\leq \pi, t \geq 0$, но и на римановой поверхности, листы которой заданы формулой

$$(2k - 1) \pi \leq \theta \leq (2k + 1) \pi \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Наперед известно, что на некоторых пространственно-временных характеристиках функция $f(r, \theta, t)$ терпит разрывы, поэтому будем рассматривать $f(r, \theta, t)$ как обобщенную функцию (распределение в смысле Шварца).

Используя теорему смещения, соотношение $\xi = 1 - r \cos \theta$ и интегральное представление

$$I_\omega(sr) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sr \cos \theta - i\omega\theta) d\theta$$

получим LF -преобразование падающей волны

$$(2.1) \quad p_1^{LF}(r, \omega, s) = -A_0(s) I_\omega'(sr), \quad A_0(s) = 2\pi p_0 g^L(s) e^{-s}$$

При нулевых начальных условиях LF -преобразование волнового уравнения (1.2) примет вид

$$(2.2) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - s^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2 r^2} \right) \right] p_2^{LF} = 0$$

Представим ограниченное при $r \rightarrow \infty$ решение уравнения (2.2) в виде

$$(2.3) \quad p_2^{LF}(r, \omega, s) = A_2(s) K_\omega(sr)$$

где $K_\omega(sr)$, $I_\omega(sr)$ — модифицированные функции Бесселя, $A_2(s)$ — неопределенный коэффициент.

Преобразования LF уравнений движения оболочки (1.3) и условий контакта при $r = 1$ составляют алгебраическую систему уравнений

$$(2.4) \quad \begin{aligned} a_{ij}^{LF} u_j^{LF} &= -\frac{\delta_1}{\rho C^2} (p_1^{LF} + p_2^{LF}) \Big|_{r=1} \delta_{iz}, \quad a_{ij}^{LF} = a_{ji}^{LF} \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ u_3^{LF} &= -\frac{1}{s^2 \rho C^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_1^{LF} + p_2^{LF}) \Big|_{r=1} \\ a_{11}^{LF} &= -(\omega^2 + s^2 \lambda^2 + \kappa^2), \quad a_{12}^{LF} = \kappa^2, \quad a_{13}^{LF} = i\omega(1 + \kappa^2) \\ a_{22}^{LF} &= -[a^2(\omega^2 + s^2 \lambda^2) + \kappa^2], \quad a_{23}^{LF} = -i\omega\kappa^2, \quad a_{33}^{LF} = \omega^2 \kappa^2 + \\ &+ s^2 \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

Подставим выражения (2.1), (2.3) в (2.4) и решим полученную систему уравнений. В результате для преобразования LF давления p_2 имеем

$$(2.5) \quad p_2^{LF}(r, \omega, s) = A_0(s) K_\omega(sr) \frac{D_3 I_\omega'(s) - \delta_1 s D_2 I_\omega(s)}{D_3 K_\omega'(s) - \delta_1 s D_2 K_\omega(s)}$$

$$D_3 = \det \| a_{ij}^{LF} \| \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad D_2 = \det \| a_{ij}^{LF} \| \quad (i, j = 1, 2)$$

Здесь и далее штрих означает производную по аргументу.

3. Разложения Ольвера и асимптотика LF -преобразований. В связи с тем, что выполнение обращения формального решения (2.5) при произвольных значениях параметров ω и s затруднительно, построим асимпто-

тику формального решения в предположении больших вещественных положительных значений параметра преобразования Лапласа s .

Модифицированные функции Бесселя и их первые производные заменим асимптотическими рядами Ольвера [25-27]. Подставляя эти ряды в (2.5) и полагая параметр s большим вещественным, найдем

$$(3.1) \quad p_2^{LF} \sim -A_0(s) (2\pi sr)^{-1/2} \kappa_1 \kappa_2 [1 - s^{-1}(\kappa_3 + \kappa_4) + O(s^{-2})] \times \\ \times \exp(s\kappa_5)$$

$$\kappa_1 = \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2 r^2}\right)^{-1/4}, \quad \kappa_2 = \frac{(s^2 + \omega^2)^{1/2} D_3 - \delta_1 s^2 D_2}{(s^2 + \omega^2)^{1/2} D_3 + \delta_1 s^2 D_2}$$

$$\kappa_3 = \frac{1}{12} \left[9 - 7 \frac{\omega^2}{s^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)^{-1} \right] \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)^{-1/2}$$

$$\kappa_4 = \frac{1}{24r} \left[3 - 5 \frac{\omega^2}{s^2 r^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2 r^2}\right)^{-1} \right] \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2 r^2}\right)^{-1/2}$$

$$\kappa_5 = -r \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2 r^2}\right)^{1/2} + 2 \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)^{1/2} + \frac{\omega}{s} \operatorname{arsh} \frac{\omega}{sr} - 2 \frac{\omega}{s} \operatorname{arsh} \frac{\omega}{s}$$

Ниже будет показано, что обращение LF -преобразования (3.1) соответствует прифронтальной асимптотике отраженной и излученных волн. Излученными волнами будем называть волны в жидкости, порожденные распространением волн в упругой оболочке.

4. Представления Лангера и асимптотика LF -преобразований дифрагированных волн при $s \rightarrow \infty$. В переходной области, когда

$$(4.1) \quad \omega \sim i [s + \alpha s^{1/2} + O(s^{-1/2})], \quad |\alpha| \sim 1$$

модифицированные функции Бесселя и их первые производные заменим асимптотическими представлениями Лангера [2, 28]. Используя эти представления и выражение для вронскиана модифицированных функций Бесселя, можно показать, что при больших вещественных значениях параметра s преобразование LF (2.5) примет вид

$$(4.2) \quad p_2^{LF}(r, \omega, s) \sim \frac{A_0(s) K_\omega(sr) I_\omega'(s)}{D_3 K_\omega'(s) - \delta_1 s D_2 K_\omega(s)} [1 + O(s^{-1/2})]$$

В дальнейшем покажем, что обращение LF -преобразования (4.2) соответствует прифронтальной асимптотике дифрагированных волн. Дифрагированными волнами будем называть волны в жидкости, вызванные огибанием падающей волной упругой оболочки.

5. Выполнение обратного преобразования Фурье. 5.1. Отраженная и излученные волны. Обратное преобразование Фурье LF -преобразования (3.1) запишем в виде

$$(5.1) \quad p_2^L(r, \theta, s) \sim A_3(s) I(s), \quad A_3(s) = p_0 g^L(s) e^{-s} (2\pi sr)^{-1/2}$$

$$I(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) \exp[sk(\omega)] d\omega$$

$$K(\omega) = \kappa_1 \kappa_2 [1 - s^{-1}(\kappa_3 + \kappa_4) + O(s^{-2})], \quad k(\omega) = \kappa_5 + \\ + i\omega\theta s^{-1}$$

Подынтегральная функция имеет простые полюсы, определяемые корнями знаменателя κ_2 (3.1). При больших вещественных положительных

значениях параметра s координаты полюсов можно представить в виде асимптотических разложений по обратным степеням

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \omega_1 &\sim \pm i\lambda s [1 + r_1 s^{-2} + t_1 s^{-3} + O(s^{-4})], & r_1 &= \frac{1}{2\lambda^2} \\ t_1 &= -\frac{\delta_1}{2\lambda^4 \sqrt{1-\lambda^2}} \\ \omega_2 &\sim \pm i\lambda s [1 + r_2 s^{-2} + t_2 s^{-3} + O(s^{-4})], & r_2 &= r_1 \frac{\kappa^2}{a^2(1-\kappa^2)} \\ t_2 &= t_1 \frac{\kappa^4}{a^2(1-\kappa^2)^2} \\ \omega_3 &\sim \pm \frac{i\lambda s}{\kappa} [1 + r_3 s^{-1} + O(s^{-2})], & r_3 &= r_1 \frac{\delta_1 \kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \lambda^2}} \end{aligned}$$

Эти полюсы определяют относительные скорости распространения фронтов упругих волн в оболочке: λ^{-1} для безмоментной (ω_1) и изгибной волн (ω_2), $\kappa\lambda^{-1}$ — для сдвиговой волны (ω_3), а также критические углы появления излученных волн:

$$\theta_{1*} = \theta_{2*} = 2 \arcsin \lambda - \arcsin \frac{\lambda}{r}, \quad \theta_{3*} = 2 \arcsin \frac{\lambda}{\kappa} - \arcsin \frac{\lambda}{\kappa r}$$

В зависимости от угла наблюдения θ будем различать три зоны:

$$1) \quad 0 < \theta \leq \theta_{1*}, \quad 2) \quad \theta_{1*} < \theta \leq \theta_{3*}, \quad 3) \quad \theta_{3*} < \theta$$

В освещенной области $0 < |\theta| < \pi/2$ L -преобразование отраженной волны, приближенно определяемое из (5.1) методом перевала, существует во всех трех зонах. Когда возрастающий угол наблюдения θ превысит θ_{1*} , то к L -преобразованию отраженной волны следует добавить L -преобразования, соответствующие излученным волнам, вызываемым безмоментной и изгибной волнами, распространяющимися в оболочке. Затем, когда угол наблюдения превысит θ_{3*} , следует прибавить и L -преобразование излученной волны, порождаемой волной сдвига, распространяющейся в оболочке. L -преобразования всех излученных волн находятся путем вычисления вычетов в полюсах подынтегральной функции (5.1).

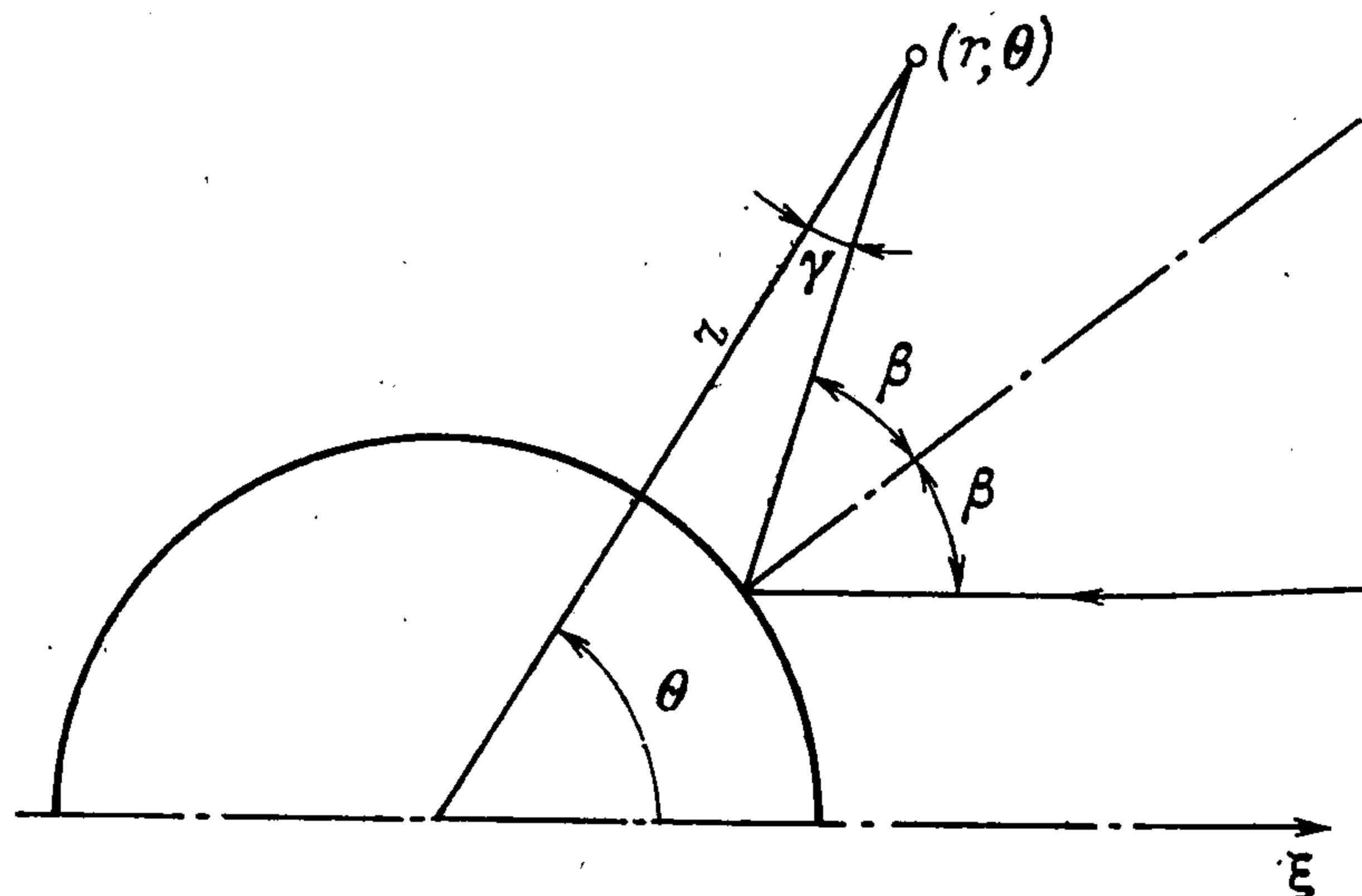
Метод перевала позволяет представить значение интеграла в (5.1) в виде ряда по обратным степеням большого параметра s

$$(5.3) \quad I(s) \sim (2\pi)^{1/2} [sk^{\text{II}}(\omega)]^{-1/2} K(\omega) \exp[sk(\omega)] \left[1 + s^{-1} \sum_{j=1}^4 \Phi_j(\omega) + O(s^{-2}) \right] \Big|_{\omega=\omega_*}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\omega) &= \frac{1}{2} \frac{k^{\text{III}}(\omega) K^{\text{I}}(\omega)}{k^{\text{II}}(\omega) K(\omega)}, & \Phi_2(\omega) &= \frac{1}{8} \frac{k^{\text{IV}}(\omega)}{k^{\text{II}}(\omega)} \\ \Phi_3(\omega) &= \frac{5}{24} \frac{[k^{\text{III}}(\omega)]^2}{[k^{\text{II}}(\omega)]^3}, & \Phi_4(\omega) &= -\frac{1}{2} \frac{K^{\text{II}}(\omega)}{k^{\text{II}}(\omega) K(\omega)} \end{aligned}$$

Координата точки перевала $\omega = \omega_*$ определяется уравнением $k'(\omega) = 0$ и имеет вид

$$(5.4) \quad \omega_* = is \sin \beta, \quad \omega_* = is \sin \gamma, \quad \theta + \gamma - 2\beta = 0$$



Фиг. 1

Геометрическая интерпретация углов θ , β , γ представлена на фиг. 1 (β — угол падения, θ — угол наблюдения).

Подставляя формулы (5.3), (5.4) в (5.1), после несложных выкладок получим

$$(5.5) \quad p_2^L(r, \theta, s) \sim p_* g^L(s) e^{-sa_*} \left[1 - \frac{m}{s + \frac{1}{2}m} + ns^{-1} + O(s^{-2}) \right]$$

$$p_* = p_0 \left(2r \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} - 1 \right)^{1/2}, \quad a_* = 1 - 2 \cos \beta + r \cos \gamma$$

$$m = \delta [(1 - \mu^2 \sin^2 \beta) \cos \beta]^{-1}, \quad n = \sum_{j=1}^5 \varphi_j(\omega_*)$$

$$\varphi_j(\omega_*) = \varphi_0(\omega_*) \psi_j(\omega_*) \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

$$\varphi_0(\omega_*) = \left[2 \left(\frac{2}{\cos \beta} - \frac{1}{r \cos \gamma} \right) \right]^{-2}, \quad \psi_1(\omega) = \frac{\sin \gamma}{r \cos^2 \gamma} \left(2 \frac{\sin \beta}{\cos^3 \beta} - \frac{\sin \gamma}{r^2 \cos^3 \gamma} \right)$$

$$\psi_2(\omega_*) = \frac{1}{2} \left(2 \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \beta}{\cos^3 \beta} - \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \gamma}{r^3 \cos^3 \gamma} \right)$$

$$\psi_3(\omega_*) = -\frac{5}{6} \left(2 \frac{\sin \beta}{\cos^3 \beta} - \frac{\sin \gamma}{r^2 \cos^3 \gamma} \right)^2 \left(\frac{2}{\cos \beta} - \frac{1}{r \cos \gamma} \right)^{-1}$$

$$\psi_4(\omega_*) = -\frac{1 + \frac{5}{2} \operatorname{tg}^2 \beta}{r^2 \cos^2 \beta} \left(\frac{2}{\cos \beta} - \frac{1}{r \cos \gamma} \right)$$

$$\psi_5(\omega_*) = -\frac{1}{12 \cos \beta} (9 + 7 \operatorname{tg}^2 \beta) - \frac{1}{24r \cos \gamma} (3 + 5 \operatorname{tg}^2 \gamma)$$

Применяя теорему Коши о вычетах в полюсах, найдем L -преобразования излученных волн. Подставляя в (3.1) координаты полюсов ω_j ($j = 1, 2, 3$) (5.2), имеем

$$\operatorname{Res} [p_2^L(r, \theta, s); \omega_j] = A_0(s) (2\pi s)^{-1/2} \kappa_1 \beta_1 \beta_2^{-1} [1 - s^{-1} (\kappa_3 + \kappa_4) + O(s^{-2})] e^{sk(\omega)} \Big|_{\omega = \omega_j}$$

$$\beta_1 = (s^2 + \omega^2)^{1/2} D_3 - \delta_1 s^2 D_2, \quad \beta_2 = i \frac{\partial}{\partial \omega} [(s^2 + \omega^2)^{1/2} D_3 + \delta_1 s^2 D_2]$$

Пренебрегая членами порядка a^2 и s^{-2} по сравнению с единицей, после несложных выкладок получим L -преобразования излученных волн

$$(5.6) \quad p_2^L(r, \theta, s) = \sum_{j=1}^3 P_j g^L(s) e^{s a_j} [m_j s^{-(\sigma_j+1/2)} + n_j s^{-(\sigma_j+3/2)} + O(s^{-(\sigma_j+5/2)})]$$

$$P_1 = P_2 = (2\pi)^{1/2} (r^2 - \lambda^2)^{-1/4} p_0, \quad P_3 = (2\pi\kappa)^{1/2} (\kappa^2 r^2 - \lambda^2)^{-1/4} p_0$$

$$m_1 = -\frac{\delta_1}{\lambda^3 \sqrt{1-\lambda^2}}, \quad m_2 = -\frac{\kappa^4 \delta_1}{a^2 \lambda^3 (1-\kappa^2)^2 \sqrt{1-\lambda^2}}$$

$$m_3 = \frac{\delta_1}{\lambda \sqrt{\kappa^2 - \lambda^2}}, \quad n_3 = -\frac{\kappa^2}{2a^2 \lambda^2 (\kappa^2 - 1)}$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0, \quad a_1 = -l_1 - \frac{1}{2} z_1 \lambda^{-1} s^{-2}$$

$$a_2 = -l_2 - \frac{1}{2} \kappa^2 z_2 \lambda^{-1} a^{-2} (1 - \kappa^2)^{-1} s^{-2}$$

$$a_3 = -l_3 - \frac{1}{2} \delta_1 z_3 \lambda^{-1} (\kappa^2 - \lambda^2)^{-1/2} s^{-1}$$

$$l_1 = l_2 = 1 + \lambda z_1 + \sqrt{r^2 - \lambda^2} - 2 \sqrt{1 - \lambda^2}$$

$$l_3 = 1 + \frac{\lambda}{\kappa} z_3 + \sqrt{r^2 - \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2} - 2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2}$$

$$z_1 = z_2 = |\theta_k| + \arcsin \frac{\lambda}{r} - 2 \arcsin \lambda$$

$$z_3 = |\theta_k| + \arcsin \frac{\lambda}{r\kappa} - 2 \arcsin \frac{\lambda}{\kappa}$$

$$\theta_k = \theta + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Коэффициенты n_1 и n_2 следует положить равными нулю вследствие недостающей точности асимптотических разложений корней ω_1 и ω_2 .

Индекс k означает число оборотов, совершенных соответствующей излученной волной.

5.2. Дифрагированные волны. Обратное преобразование Фурье LF -преобразования (4.2) представим в виде

$$(5.7) \quad p_2^L(r, \theta, s) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(s) K_\omega(sr) \frac{I_\omega'(s) \exp(i\omega\theta)}{D_3 K_\omega'(s) - \delta_1 s D_2 K_\omega(s)} [1 + O(s^{-2/3})] d\omega$$

Подынтегральная функция (5.7) имеет простые полюсы $\omega = \omega_k$, определяемые корнями знаменателя. Подставляя в (5.7) асимптотические представления Лангера [2, 28] и полагая параметр s большим вещественным, имеем

$$(5.8) \quad \omega_k \sim \pm i [s + \alpha_k s^{1/3} + O(s^{-1/3})]$$

причем α_k находится из уравнения

$$(5.9) \quad \text{Ai}'(x) = 0, \quad x = -2^{1/3} \alpha$$

Здесь $\text{Ai}(x)$ — функция Эйри; корни $x = \alpha_k'$ уравнения (5.9) табулированы [25].

Как следует из (5.8), дифрагированные волны приближенно распространяются со скоростью звука в жидкости. С точностью соотношения (5.8) упругость оболочки не влияет на координаты полюсов ω_k .

Интеграл (5.7) вычислим по теореме Коши о вычетах в полюсах. Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \omega} K_{\omega}'(s) \sim -i\pi s^{-1} \frac{2^{3/2}}{3} f(\alpha) \exp\left(\frac{1}{2} i\pi \omega\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k} = -i s^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_k}$$

асимптотические представления Лангера [2, 28], формулы (5.8) и (5.9), после несложных выкладок получим

$$(5.10) \quad p_2^L(r, \theta, s) \sim \sum_{k=1}^n p_0 g^L(s) \gamma_1 \exp(\gamma_2 s - \gamma_3 s^{-1/2}) [s^{-1/2} - \delta_2 s^{-1/2} + O(s^{-2/3})]$$

$$\delta_2 = \frac{\delta}{8\alpha_k} \frac{1}{1 - \mu^2}, \quad \gamma_1 = [2^{7/6} \pi^{1/2} (r^2 - 1)^{1/4} \alpha_k \text{Ai}^2(-2^{-1/2} \alpha_k)]^{-1}$$

$$\gamma_2 = -|\theta| + \frac{\pi}{2} - 1 - (r^2 - 1)^{1/2} + \arccos \frac{1}{r}$$

$$\gamma_3 = \alpha_k \left(|\theta| - \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{r} \right)$$

Отметим, что значения функций Эйри $\text{Ai}(x)$, соответствующие корням уравнения $\text{Ai}'(x) = 0$, табулированы [25].

6. Выполнение обратного преобразования Лапласа. 6.1. Отраженная волна. Используя теоремы о свертывании и сдвиге, по L -преобразованию (5.5) находим оригинал

$$(6.1) \quad p_2(r, \theta, t) \sim p_* \left[g(\tau_*) - m e^{-1/2 m \tau_*} \int_0^{\tau_*} e^{1/2 m x} g(x) dx + \right. \\ \left. + n \int_0^{\tau_*} g(x) dx \right] H(\tau_*), \quad \tau_* = t - a_* \quad (\tau_* \ll 1)$$

Влияние упругости оболочки на отраженную волну явным образом представлено вторым слагаемым этого выражения.

Третье слагаемое указывает на изменение формы отраженной волны (по сравнению с падающей), связанное с выпуклостью недеформируемого отражателя.

6.2. Излученные волны. Применяя теоремы о свертывании и сдвиге, по L -преобразованию (5.6) находим оригинал

$$(6.2) \quad p_2(r, \theta, t) = \sum_{j=1}^3 P_j \left\{ m_j \int_0^{\tau_j} g(x) v_{j0}(\tau_j - x) dx + \right. \\ \left. + n_j \int_0^{\tau_j} g(x) v_{j1}(\tau_j - x) dx \right\} H(\tau_j)$$

$$v_{10} = \left(\frac{z_1}{2\lambda} \right)^{-3/4} \tau_1^{3/4} J_{3/2} \left[2 \left(\frac{z_1}{2\lambda} \tau_1 \right)^{1/2} \right]$$

$$v_{20} = \left(\frac{\kappa^2 z_2}{2a^2 \lambda (1 - \kappa^2)} \right)^{-3/4} \tau_2^{3/4} J_{3/2} \left[2 \left(\frac{\kappa^2 z_2}{2a^2 \lambda (1 - \kappa^2)} \tau_2 \right)^{1/2} \right]$$

$$v_{11} = v_{21} = 0$$

$$v_{3\mu} = \frac{4^{\mu} \mu!}{(2\mu)! \sqrt{\pi}} \tau_3^{-1/2 + \mu} \exp \left[-\frac{\delta_{1z_3}}{2\lambda \sqrt{\kappa^2 - \lambda^2}} \right], \quad \mu = 0, 1$$

$$\tau_j = t - l_j \quad (j = 1, 2, 3, \tau_j \ll 1)$$

Интенсивность разрыва на фронте излученных волн $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$ на два порядка слабее по сравнению с разрывом на фронте $\tau_3 = 0$.

Упругие свойства оболочки оказывают влияние на каждую из излученных периферических волн.

6.3. Дифрагированные волны. Применяя теоремы о свертывании и сдвиге, по L -преобразованию (5.10) находим оригинал

$$(6.3) \quad p_2(r, \theta, t) \sim \sum_{k=1}^n p_0 \gamma_1 \left[\int_0^{\tau_k} g(x) u_{1/6}(\tau_0 - x) dx - \right. \\ \left. - \delta_2 \int_0^{\tau_k} g(x) u_{1/2}(\tau_0 - x) dx \right] H(\tau_k) \\ u_l(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} s^{-l} \exp(\tau_0 s - \gamma_3 s^{1/3}) ds, \quad l = 1/6, 1/2 \\ \tau_0 = t + \gamma_2 = t - 1 - |\theta| + \frac{\pi}{2} - (r^2 - 1)^{1/2} + \arccos \frac{1}{r} \\ \tau_k = \tau_0 + 2\pi(k-1), \quad \tau_k \ll 1$$

Следуя Фридлиндеру, интегралы $u(\tau_0)$, ($l = 1/6, 1/2$) найдем приближенно методом перевала. Координата точки перевала находится из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau_0 s - \gamma_3 s^{1/3}) = 0$$

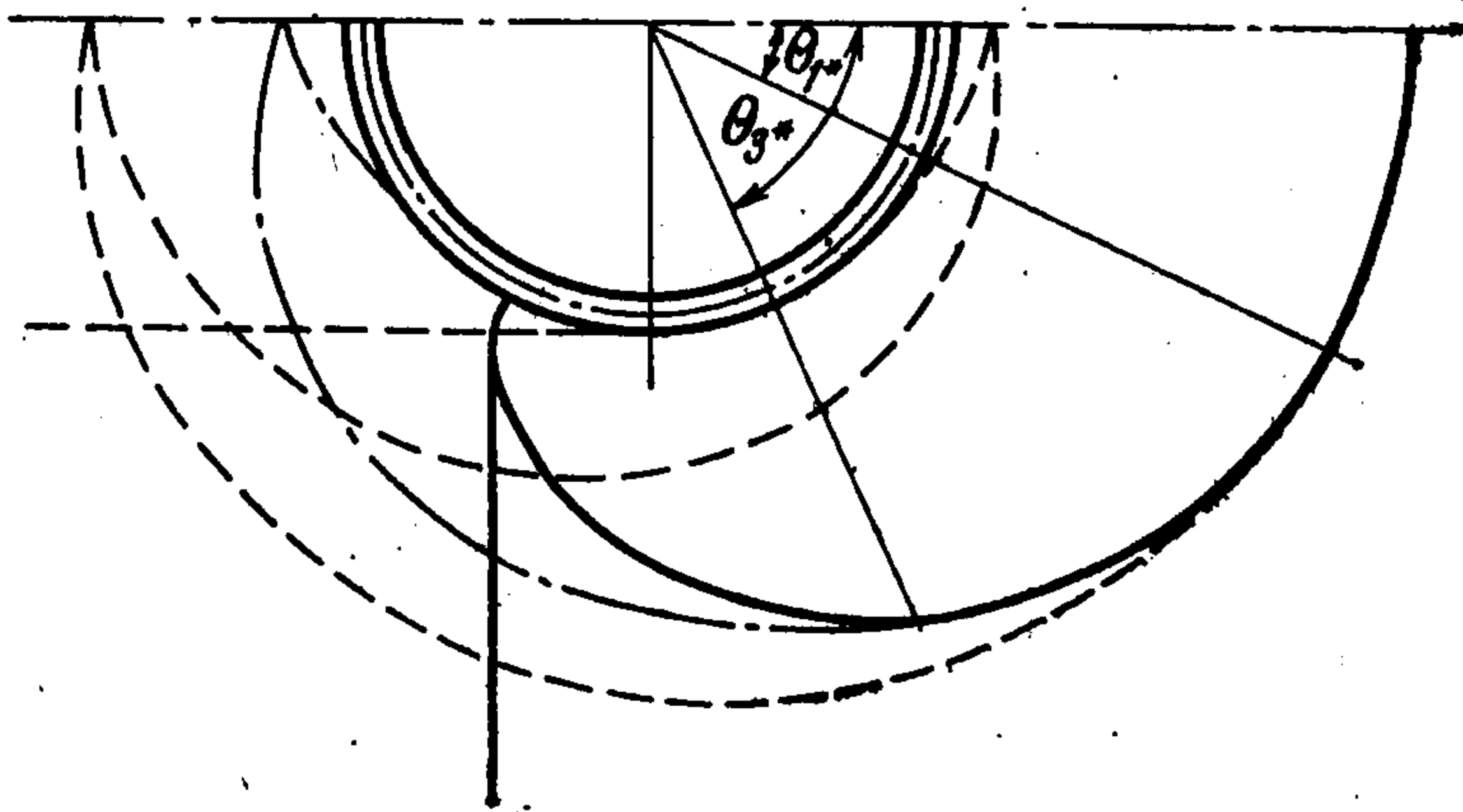
и имеет значение $s_0 = (\gamma_3/3\tau_0)^{3/2}$. Подставляя значение s_0 в стандартную формулу метода перевала, приближенно имеем

$$(6.4) \quad u_l(\tau_0) = \frac{3^\alpha}{2\sqrt{\pi}} \gamma_3^{1-\alpha} \tau_0^{\alpha-1} \exp(-\gamma_4), \quad \alpha = \frac{6l-1}{4}, \quad \gamma_4 = \frac{2}{3^{3/2}} \frac{\gamma_3^{3/2}}{\tau_0^{1/3}}$$

Отметим, что в формуле (6.3) член с множителем δ_2 в явном виде отражает влияние упругости оболочки на дифрагированные волны.

Расположение фронтов волн в жидкости в фиксированный момент времени схематически показано на фиг. 2 (ввиду симметрии показана лишь нижняя часть всей картины).

Выше методом двукратных интегральных преобразований найдено асимптотическое решение задачи в окрестностях фронтов волн давления. Независимые переменные r, θ, t могут принимать произвольные значения, но составленные из них комбинации, определяющие расстояния от фронтов волн, непременно должны быть малы.



Фиг. 2

Для каждого типа волн найдены: уравнение линии фронта, интенсивность разрыва давления или его первых производных на фронте, формула изменения амплитуды давления при удалении от фронта, зависимость изменения амплитуды давления по фронту. При малых расстояниях от фронтов волн, амплитуды давления всех трех типов волн (отраженной, излученных, дифрагированных) зависят от упругих свойств оболочки. Наиболее ярко влияние упругости сказывается на излученной волне, порожденной сдвиговой волной, распространяющейся по оболочке со скоростью C_2 .

Исходя из полученных асимптотических разложений, опишем подход выявления свойств оболочки по системе «наведенных» ею волн.

Пусть источник и приемник акустических волн размещены в одной точке ($\theta = 0$). Как известно, по отраженной волне можно определить: дальность до оболочки — по задержке отраженной волны; радиус оболочки — по чисто геометрическому уменьшению амплитуды отраженной волны в сравнении с посланной. Из формулы (6.1) видно, что дополнительно к этому можно найти относительное волновое сопротивление оболочки ζ_0 по различию законов изменения давления по времени в отраженной и посланной волнах

$$\zeta_0 = \frac{\rho_1 C_I}{\rho C}, \quad C_I = \left[\frac{E(1-\nu)}{\rho_1(1+\nu)(1-2\nu)} \right]^{1/2}$$

Если дополнительно к имеющимся в точке ($\theta = 0$) источнику и приемнику звука разместить в некоторой другой фиксированной точке (при $\theta > \theta_{3*}$) датчик давления, то с его помощью, как это следует из (6.2), можно определить скорость распространения сдвиговых волн в оболочке C_2 по задержке излученной волны, вызванной волной сдвига, бегущей по оболочке со скоростью C_2 .

Поступила 1 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Friedlander F. G. Diffraction of pulses by a circular cylinder. *Communs on Pure and Appl. Math.*, 1954, vol. 7, No. 4.
3. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1970, № 2.
4. Мнёв Е. Н., Перцев А. К. Гидроупругость оболочек. Л., «Судостроение», 1970.
5. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.
6. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
7. Junger M. C., Feit D. *Sound, structures and their interaction*. Cambridge (Mass.) — London, MIT Press, England, 1972.
8. Neubauer W. G., Uginčius P., Uberall H. Theory of creeping waves in acoustics and their experimental demonstration. *Z. Naturforsch.* 1969, Bd. 24a, Hf. 5.
9. Horton C. W. Sr. A review of reverberation, scattering, and echo structure. *J. Acoust. Soc. America*, 1972, vol. 51, No. 3.
10. Горшков А. Г. Взаимодействие слабых нестационарных волн давления с упругими оболочками. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 3.
11. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres. *J. Acoust. Soc. America*, 1951, vol. 23, No. 4.
12. Junger M. C. Sound scattering by thin elastic shells. *J. Acoust. Soc. America*, 1952, vol. 24, No. 4.
13. Payton R. G. Transient interaction of an acoustic wave with a circular cylindrical elastic shell. *J. Acoust. Soc. America*, 1960, vol. 32, No. 6.

14. *Peralta L. A., Raynor S.* Initial response of a fluid-filled, elastic, circular, cylindrical shell to a shock wave in acoustic medium. *J. Acoust. Soc. America*, 1964, vol. 36, No. 3.
15. *Milenkovic V., Raynor S.* Reflection of a plane acoustic step wave from an elastic spherical membrane. *J. Acoust. Soc. America*, 1966, vol. 39, No. 3.
16. *Лиходаева Е. А., Шендеров Е. Л.* Периферические волны, возникающие при дифракции плоской звуковой волны на тонкой цилиндрической оболочке. *Акуст. ж.*, 1971, т. 17, вып. 1.
17. *Белоозеров Н. Н., Долгова И. И.* Дифракция цилиндрической волны на слабоотражающей цилиндрической оболочке. *Акуст. ж.*, 1970, т. 16, вып. 3.
18. *Лобысев В. Л., Яковлев Ю. С.* Метод асимптотически эквивалентных функций и его приложение к решению некоторых задач механики сплошных сред. В кн. *Проблемы механики твердого деформируемого тела*. Л., «Судостроение», 1970.
19. *Кубенко В. Д.* Смещение в цилиндрической оболочке при действии цилиндрической волны в акустической среде. *Изв. АН СССР, МТТ*, 1972, № 6.
20. *Geers T. L.* Excitation of an elastic cylindrical shell by a transient acoustic wave. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, No. 3.
21. *Geers T. L.* Scattering of a transient acoustic wave by an elastic cylindrical shell. *J. Acoust. Soc. America*, 1972, vol. 51, No. 5.
22. *Huang H.* An exact analysis of the transient interaction of acoustic plane waves with a cylindrical elastic shell. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1970, vol. 37, No. 4.
23. *Huang H., Wang Y. F.* Early-time interaction of spherical acoustic waves and a cylindrical elastic shell. *J. Acoust. Soc. America*, 1971, vol. 50, No. 3.
24. *Huang H., Lu Y. P., Wang Y. F.* Transient interaction of spherical acoustic waves, a cylindrical elastic shell, and its internal multidegree of freedom mechanical systems. *J. Acoust. Soc. America*, 1974, vol. 56, No. 1.
25. *Handbook of mathematical functions* (ed. by M. Abramovitz and A. Stegun) Washington, Gov. print. off., 1964.
26. *Olver F. W. J.* The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. *Phil. Trans. Ser. A*. 1955, vol. 247, No. 930.
27. *Olver F. W. J.* The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. *Phil. Trans. Ser. A*. 1955, vol. 247, No. 930.
28. *Langer R. E.* On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. *Trans. America Math. Soc.*, 1931, vol. 33.