Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 534.2

КРАЕВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКИХ ВОЛН

В. В. Третьяков

(Москва)

На основе анализа собственных функций при решении автомодельных задач дифракции плоских волн для волнового уравнения приводится построение краевых интегралов в плоском и пространственном случаях. Построение этих интегралов проводится аналогично простроению интеграла Пуассона для уравнения Лапласа. В плоском случае результат удается обобщить для задачи дифракции широкого класса плоских волн на клине. Обобщение для пространства проведено для задач, аналогичных задаче дифракции плоской волны на движущемся со сверхзвуковой скоростью тонком треугольном крыле. Приводится пример построения в квадратурах решения задачи дифракции единичной волны на тонком треугольном крыле, движущемся со скоростью, превышающей скорость звука. Данное исследование в значительной мере опирается на идеи работ [1–6].

1. Будем рассматривать волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \tag{1.1}$$

При дифракции плоской волны вида

$$\Phi_n=(t-r\cos(\alpha+\theta))^n\quad(\theta=\operatorname{arctg}(y/x),\ r=\sqrt{x^2+y^2})$$

на клине решение также представляется однородной функцией относительно t и r размерности n. Связь между однородными решениями нулевой размерности и размерности n представлена соотношением (1.2) в работе [7].

Однородная функция нулевой размерности удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_0}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2}=0,\quad R=\frac{t}{r}-\sqrt{\frac{t_2}{r^2}-1}$$

для которого известен интеграл Пуассона

$$\Phi_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\psi)(1-R^2)\,d\psi}{1+R^2-2R\cos(\psi-\theta)},\quad \Phi_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\psi)\sqrt{t^2-r^2}\,d\psi}{t-r\cos(\psi-\theta)}$$

Тогда, используя соотношение (1.2) из работы [7], получаем краевой интеграл для однородного решения размерности n

$$\Phi_n=\frac{2^n(n!)^2}{2\pi(2n!)}\int_0^{2\pi}\frac{f_n(\psi)(t^2-r^2)^{n+1/2}\,d\psi}{[t-r\cos(\psi-\theta)]^{n+1}},\quad f_n(\theta)=\frac{\Phi_n}{t^n}\bigg|_{t=r}$$

Для произвольной плоской волны при граничном условии на окружности $r = t$

$$\Phi|_{r=t} = f(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta)\, t^n$$

внутри круга $r \leqslant t$ получаем

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{t^2-r^2}}{t-r\cos(\psi-\theta)}\left\{\int_0^1 f(\psi,\eta)\,d\lambda + 2\int_0^1 \eta f_\eta'(\psi,\eta)\,d\lambda\right\}d\psi \tag{1.2}$$

$$\eta = 2\frac{t^2-r^2}{t-r\cos(\psi-\theta)}\lambda(1-\lambda)$$

При построении интеграла (1.2) использовано соотношение

$$\int_0^1 [\lambda(1-\lambda)]^n\,d\lambda = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Интеграл (1.2) справедлив, когда Φ имеет период T по θ, равный 2π. Это имеет место, например, при изучении дифракции плоской волны на движущейся со сверхзвуковой скоростью пластинке. В случаях, когда $T = 2\pi k$ ($k \neq 1$ и является целым числом), результат получается сложнее. Ядро интеграла Пуассона в последнем случае равно

$$K_0(t, r, \theta, \psi) = \frac{1-R_1^2}{1+R_1^2-2R_1\cos(\psi_1-\theta_1)} \tag{1.3}$$

$$R_1 = R^{1/k} = \left(\frac{t}{r} - \sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2 - 1}\right), \quad \theta_1 = \frac{\theta}{k}, \quad \psi_1 = \frac{\psi}{k}$$

Учитывая (1.3), получим краевой интеграл в виде

$$\Phi = \frac{\sqrt{t^2-r^2}}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} d\psi_1 \oint \frac{F(\psi_1,\xi)\,K_0(t-1/\zeta, r, \theta, \psi)\,d\zeta}{\zeta\sqrt{(t-1/\zeta)^2-r^2}}$$

$$F(\psi_1,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}f_n(\psi_1)\,\xi^n = \int_0^1 f(\psi_1,\eta)\,d\lambda + 2\int_0^1 \eta f_\eta'(\psi_1,\eta)\,d\lambda$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad \xi = 2(t^2-r^2)\zeta, \ \eta = \xi\lambda(1-\lambda), \ \Phi|_{r=t} = f(\theta_1, t)$$

Здесь ζ — комплексная величина. Интеграл по замкнутому контуру берется по достаточно мало отличающейся от $\zeta = 0$ кривой, окружающей точку $\zeta = 0$.

2. Рассмотрим однородные решения уравнения (1.1) полуцелой размерности. Пусть $\Phi_\beta = r^\beta \varphi_\beta(t/r, \theta)$, тогда φ_β удовлетворяет уравнению

$$(w^2-1)\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial w^2} - (2\beta-1)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial w} + \beta^2\varphi_\beta + \frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial\theta^2} = 0, \quad w = \frac{t}{r} \tag{2.1}$$

Как и прежде, будем рассматривать решения уравнения (2.1) при заданных условиях на окружности $w = 1$ ($r = t$). Для построения решения рассмотрим собственные функции уравнения (2.1) при разделении переменных w и θ. Собственные функции, зависящие от θ, равны $\cos\mu\theta$ и $\sin\mu\theta$. Тогда для собственных функций, зависящих от w, получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(w^2-1)y_\beta'' - (2\beta-1)wy_\beta' + (\beta^2-\mu^2)y_\beta = 0 \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) имеет два важных свойства

(2.3) $$y_{\beta-1} = y_\beta', \quad y_\beta = wy_{\beta-1} - \frac{(w^2-1)}{2\beta-1} y'_{\beta-1}$$

Последнее соотношение (2.3) теряет смысл при $\beta = {}^1/_2$. Если $\beta = -{}^1/_2$ и $\mu = \nu + {}^1/_2$, то (2.2) — известное уравнение Лежандра.

Используя первое из соотношений (2.3), определяем решение (2.2) при $\beta = {}^1/_2$

$$y_{1/2} = (w^2 - 1)\left(C_1 \frac{dP_\nu(w)}{dw} + C_2 \frac{dQ_\nu(w)}{dw}\right)$$

($P_\nu(w)$, $Q(w)$ — функции Лежандра первого и второго рода соответственно).

Решение определяется внутри круга $r \leqslant t$, поэтому потребуем, чтобы $y_{1/2} = 1$ при $w = 1$ и величина $w^{-1/2} y_{1/2}$ принимала ограниченное значение при $w \to \infty$. Тогда

(2.4) $$y_{1/2} = -(w^2 - 1)\frac{dQ_\nu(w)}{dw}$$

Логарифмическая особенность $Q_\nu(w)$ при $w = 1$ устраняется в выражении (2.4) множителем $(w^2 - 1)$. Например, при $\nu = -{}^1/_2$

$$y_{1/2} = \sqrt{\frac{w+1}{2}}\, E\left(\sqrt{\frac{2}{w+1}}\right)$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода. Таким образом, решение уравнения (1.1) при $\beta = {}^1/_2$ в общем случае представляется в виде

$$\Phi_{1/2} = -\sqrt{r}(w^2-1)\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{A_0}{2} Q_{-1/2}(w) + \sum_{(\mu)} (A_\mu \cos\mu\theta + B_\mu \sin\mu\theta)\, Q_{\mu-1/2}(w)\right\}$$

Если $\Phi_{1/2}$ имеет период по θ, равный 2π, то $\mu = m$, где m — целое число. Для построения краевого интеграла воспользуемся интегральным представлением Лапласа для функций Лежандра [8] и выражениями для коэффициентов разложения в ряд Фурье

$$Q_\nu(w) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(w + \sqrt{w^2-1}\,\mathrm{ch}\,\lambda)^{\nu+1}}$$

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos m\psi\, d\psi, \quad B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin m\psi\, d\psi$$

$$f(\theta) = r^{-1/2}\Phi_{1/2}\Big|_{r=t}$$

Тогда

(2.5) $$\Phi_{1/2} = -\frac{\sqrt{r}(w^2-1)}{2\pi}\frac{\partial I}{\partial w}, \quad I = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{f(\psi)\,d\psi\,d\lambda\,(R_\lambda^2 - 1)}{\sqrt{R_\lambda}\,(1 + R_\lambda^2 - 2R_\lambda\cos(\psi-\theta))}$$

$$R_\lambda = w + \sqrt{w^2-1}\,\mathrm{ch}\,\lambda$$

Произведя в выражении (2.5) интегрирование по λ, получаем

$$\Phi_{1/2} = \frac{(t^2 - r^2)}{4\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{f(\psi)\,d\psi}{(t - r\cos(\psi-\theta))^{3/2}}$$

Если функция $\Phi_{1/2}$ имеет период по θ, равный $2\pi k$, то следует принять $\mu = m / k$, где k и m — целые числа.

Тогда

(2.6) $$\Phi_{1/2} = -\frac{\sqrt{r}\,(w^2-1)}{2\pi}\frac{\partial I_1}{\partial w}, \quad I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{f(\psi_1)\,d\psi_1\,d\lambda\,(\rho^2-1)}{\sqrt{R_\lambda}\,(1+\rho^2 - 2\rho\cos(\psi_1-\theta_1))}$$

$$\theta_1 = \theta / k, \quad \rho = (R_\lambda)^{1/k}$$

Для удобства вычислений интеграл I_1 в формуле (2.6) при $k=2$ можно представить в другом виде

$$I_1=\int\limits_0^{2\pi}2\sqrt{R}f(\psi_1)\,d\psi_1\int\limits_0^1\frac{\xi\,d\xi\,(1-\xi R)}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-R^2\xi^2)}\,(1+\xi^2R-2\xi\sqrt{R}\cos(\psi_1-\theta_1))}$$

$$R=w-\sqrt{W^2-1}$$

Видно, что ядро в интеграле I_1 представляется через полные эллиптические интегралы.

Используя второе из соотношений (2.3), получим

$$y_{n+1/2}=\frac{(-1)^n(w^2-1)^{n+1}}{2^n n!}\frac{d^n}{dw^n}\left(\frac{y_{1/2}}{w^2-1}\right)$$

что позволяет провести обобщение для произвольной плоской волны, аналогичное представленному в п. 1.

3. Рассмотрим волновое уравнение в пространстве

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \tag{3.1}$$

В. А. Боровиков [6] показал, что для решений уравнения (3.1), представляемых однородными относительно t и $q=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ функциями размерности $-1/2$, задача их определения сводится к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Данные результаты позволяют расширить этот вывод на случай однородных решений уравнения (3.1) любой полуцелой размерности [1].

Если $\Phi_{n-1/2}$ — однородное относительно t и q решение уравнения (3.1) размерности $n-1/2$, $\Phi_{-1/2}$ — однородное решение того же уравнения размерности $-1/2$ и $t^{-n+1/2}\Phi_{n-1/2}|_{q=t}=t^{1/2}\Phi_{-1/2}|_{q=t}$, то

$$\Phi_{n-1/2}=\frac{(-1)^n2^n n!(t^2-q^2)^{n+1/2}}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\Phi_{-1/2}}{\sqrt{t^2-q^2}}\right) \tag{3.2}$$

Для однородных относительно t и q решений уравнения (3.1) целой размерности получается аналогичное соотношение

$$\Phi_n=\frac{(-1)^n(t^2-q^2)^{n+1}}{2^n n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\Phi_0}{t^2-q^2}\right) \tag{3.3}$$

Здесь Φ_0 и Φ_n — однородные относительно t и q решения уравнения (3.1) размерности 0 и n соответственно.

Учитывая результат В. А. Боровикова [6], можем записать краевой интеграл для однородного размерности $-1/2$ решения уравнения (3.1)

$$\Phi_{-1/2}=\frac{1}{4\pi\sqrt{2}}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{F(\omega_1,\theta_1)\sin\omega_1\,d\omega_1\,d\theta_1\sqrt{t^2-q^2}}{(t-q\cos\gamma)^{3/2}}$$

$$\cos\gamma=\cos\omega\cos\omega_1+\sin\omega\sin\omega_1\cos(\theta_1-\theta),\quad F(\omega,\theta)=$$
$$=\sqrt{t}\,\Phi_{-1/2}|_{t=q}$$

[1] *Третьяков В. В.* К вопросу о сведении в автомодельном случае решения волнового уравнения в пространстве к решению уравнения Лапласа. Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума по распространению упругих и упругопластических волн. Кишинев, 1968.

Здесь ω и θ — сферические угловые координаты. Принимая во внимание (3.2), будем иметь

$$\Phi_{n-1/2} = \frac{2n+1}{4\pi\cdot 2^{n+1/2}} \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{F_{n-1/2}(\omega_1, \theta_1)\sin\omega_1 d\omega_1 d\theta_1 (t^2-q^2)^{n+1/2}}{(t-q\cos\gamma)^{n+3/2}}$$

Для однородного решения нулевой размерности имеем представление в виде ряда по собственным функциям

$$\Phi_0 = -\sum_{m=0}^{\infty} (w^2-1)\, Y_m(\omega, \theta)\frac{dQ_m(w)}{dw}, \quad w = \frac{t}{q}$$

Здесь $Q_m(w)$ — функция Лежандра второго рода целого порядка, $Y_m(\omega, \theta)$ — сферическая гармоника целого порядка.

Используя интегральное представление Лапласа для функций Лежандра, а также формулу Лапласа (см., например [9])

$$Y_m(\omega, \theta) = \frac{2m+1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\omega_1, \theta_1)\, P_m(\cos\gamma)\sin\omega_1 d\omega_1 d\theta_1$$

где $P_m(\cos\gamma)$ — полином Лежандра степени m, $F(\omega, \theta) = \Phi_0 |_{t=q}$, и равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)\, P_m(\cos\gamma)}{R_\lambda^{m+1}} = \frac{R_\lambda^2-1}{(1+R_\lambda^2-2R_\lambda\cos\gamma)^{3/2}}$$

получим после суммирования и интегрирования по λ следующий краевой интеграл:

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{F(\omega_1, \theta_1)\sin\omega_1 d\omega_1 d\theta_1 (t^2-q^2)}{[t-q\cos\gamma]^2} \tag{3.4}$$

и, учитывая соотношение (3.3)

$$\Phi_n = \frac{(n+1)}{4\pi\cdot 2^n}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{F(\omega_1, \theta_1)\sin\omega_1 d\omega_1 d\theta_1 (t^2-q^2)^{n+1}}{(t-q\cos\gamma)^{n+2}} \tag{3.5}$$

Если на поверхности шара $q = t$ задана

$$\Phi|_{q=t} = f(\omega, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\omega, \theta)\, t^n$$

то, учитывая интеграл (3.5), получим

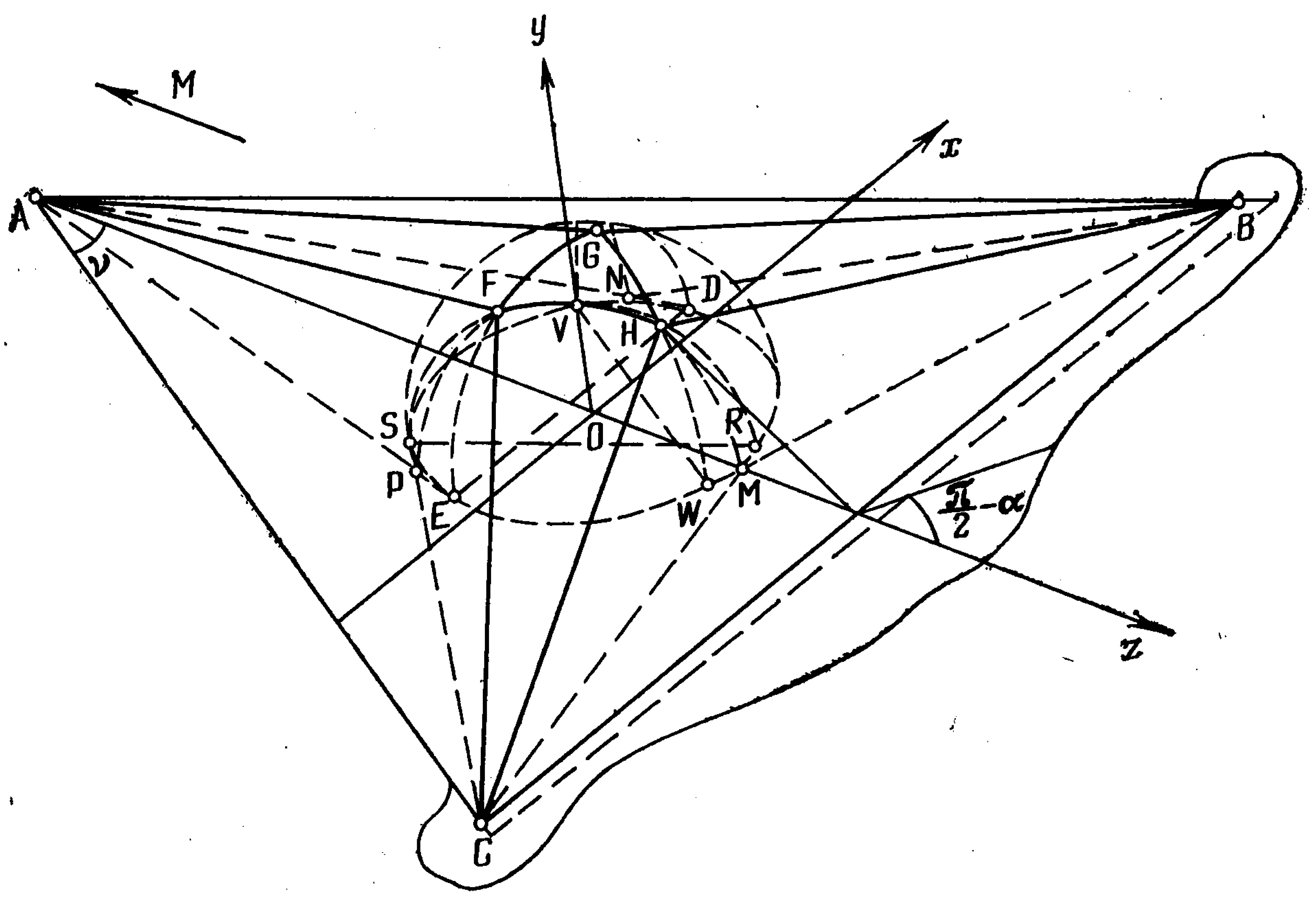
$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\omega_1 d\omega_1 d\theta_1 (t^2-q^2)}{(t-q\cos\gamma)^2}\frac{d}{d\xi}(\xi f(\omega_1, \theta_1, \xi))$$

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{t^2-q^2}{t-q\cos\gamma}$$

Краевой интеграл в случае осевой симметрии получается, если в выражении (3.4) положить $F(\omega_1, \theta_1) = F(\omega_1)$ и проинтегрировать по θ_1. Этот интеграл имеет вид

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{F(\omega_1)\sin\omega_1 d\omega_1 (t-q\cos\omega\cos\omega_1)(t^2-q^2)}{[(t-q\cos\omega\cos\omega_1)^2-q^2\sin^2\omega\sin^2\omega_1]^{3/2}}$$

Следует заметить, что полученные здесь результаты правомерны только в случае, когда потенциал имеет период по θ, равный 2π. В сравнении с плоской задачей это соответствует случаю, когда не требуется проводить конформного преобразования.



Фиг. 1

4. Для иллюстрации полученных результатов приведем решение задачи о дифракции единичной волны на движущемся с постоянной сверхзвуковой скоростью треугольном крыле.

Пусть треугольное крыло с углом стреловидности при вершине, равном $\pi/2 - \nu$, движется симметричным образом в отрицательном направлении оси z декартовой системы координат с постоянной сверхзвуковой скоростью ($M > 1$). Ось y направлена по нормали к крылу. Угловые сферические координаты выберем таким образом, чтобы

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \omega = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

Пусть на крыло падает единичная плоская волна (H — единичная функция)

$$\Phi = H(t - q\cos\omega\cos\alpha + q\sin\omega\sin\theta\sin\alpha)$$
$$q = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \alpha = \text{const}$$

Схема картины дифракции представлена на фиг. 1. Только внутри дифрагированной полусферы с центром в точке O течение будет пространственным, а в остальных областях решение можно найти с помощью уравнений, описывающих плоское движение.

Так, например, в областях $ABNG$ и $ACPF$ решение выражается постоянной и равно

$$\Phi = 1 + L, \quad L = \frac{M\operatorname{tg}\nu\sin\alpha}{\sqrt{(M^2-1)\operatorname{tg}^2\nu - 1}}$$

В области $CBHM$ величина Φ тоже постоянна и равна двум.

Внутри полуконусов с вершинами в точках A, B и C решение определяется путем сведения трехмерного волнового уравнения к двумерному заменой переменных z_1 и

t одной $\tau = (\zeta_0 t - z_1) / \sqrt{\zeta_0^2 - 1}$, где ζ_0 — постоянная, характеризующая скорость движения вершины полуконуса вдоль его оси.

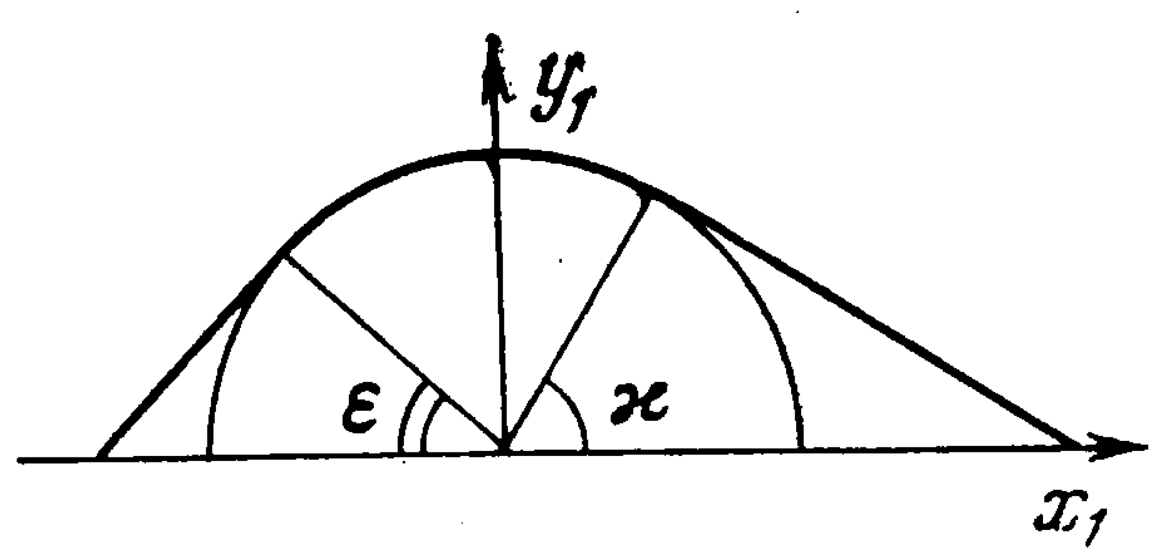
Эта замена приводит уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

к виду

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial \tau^2} = 0$$

Правомерность подобной замены станет ясна, если ввести подвижную систему координат с центром в вершине полуконуса. Тогда картина течения становится стационарной и видно, что зависимости от четвертой переменной нет.



Фиг. 2

Применительно к полуконусам с вершинами в точке B (верхние знаки) и C (нижние знаки) координаты x_1, y_1, z_1 и величина ζ_0 определяются как

$$\zeta_0 = 1 / (\cos\alpha \cos\beta), \qquad y_1 = y$$

$$z_1 = z \cos\beta \pm x \sin\beta, \quad x_1 = x\cos\beta \mp z \sin\beta$$

$$\cos\beta = [1 + (M\cos\alpha + 1)^2 \operatorname{tg}^2 \nu]^{-1/2}$$

Применительно к полуконусу с вершиной в точке A $\zeta_0 = M$, $y_1 = y$, $z_1 = -z$, $x_1 = x$.

Теперь следует определить углы в плоскостях, перпендикулярных к осям полуконусов, которые разграничивают различные условия на поверхности полуконусов (см. фиг. 2). Имеем (буквы в скобках означают положение вершины соответствующего полуконуса)

$$\sin\varkappa = \frac{\sin\alpha\cos\delta}{L\cos\beta}, \quad \sin\varepsilon = \frac{\sin\delta}{\cos\beta} (B)$$

$$\sin\varkappa = \sin\delta / \cos\beta, \quad \sin\varepsilon = \sin\alpha\cos\delta / (L\cos\beta) \quad (C)$$

$$\sin\varepsilon = \sin\varkappa = M\sin\alpha / (L\sqrt{M^2 - 1}) \quad (A)$$

$$\cos\delta = [(M\cos\alpha + 1)^2 \operatorname{tg}^2\nu + \sin^2\alpha]^{-1/2}$$

Определим граничные условия на поверхности полуконусов. Имеем

$$0 \leqslant \theta_1 < \varkappa : \Phi = 1 + L; \quad \varkappa < \theta_1 < \pi - \varepsilon : \Phi = 1; \quad \pi - \varepsilon < \theta_1 \leqslant \pi : \Phi = 2 \quad (B)$$

$$0 \leqslant \theta_1 < \varkappa : \Phi = 2, \quad \varkappa < \theta_1 < \pi - \varepsilon : \Phi = 1, \quad \pi - \varepsilon < \theta_1 \leqslant \pi : \Phi = 1 + L \ (C)$$

$$0 \leqslant \theta_1 < \varkappa, \ \pi - \varkappa < \theta_1 \leqslant \pi : \Phi = 1 + L; \ \varkappa < \theta_1 < \pi - \varkappa : \Phi = 1 \ (A)$$

Для всех полуконусов на поверхности крыла имеем $\partial\Phi/\partial y = 0$. Последнее условие позволяет симметрично продолжить граничные условия на поверхности полуконусов на всю поверхность конусов и применить интеграл Пуассона. Поскольку граничные условия на поверхностях конусов выражаются набором постоянных величин, то достаточно привести решение для одного конуса (например для конуса с вершиной в точке B), так как решения для остальных конусов получаются аналогично. Это решение имеет вид

$$\Phi = 1 + \frac{L}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1+R_1}{1-R_1}\operatorname{tg}\frac{\varkappa - \theta_1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+R_1}{1-R_1}\operatorname{tg}\frac{\varkappa + \theta_1}{2}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1+R_1}{1-R_1}\operatorname{tg}\frac{\pi + \varepsilon - \theta_1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1+R_1}{1-R_1}\operatorname{tg}\frac{\pi - \varepsilon - \theta_1}{2}\right)\right]$$

$$R_1 = \frac{\tau}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \sqrt{\frac{\tau^2}{x_1^2 + y_1^2} - 1}, \quad \theta_1 = \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}$$

Для облегчения дальнейшего изложения обозначим решения внутри конусов с вершинами в точках A, B и C соответственно через

$$\Phi = 1 + \Phi_1, \quad \Phi = 1 + \Phi_2, \quad \Phi = 1 + \Phi_3$$

Заметим, что есть три области, примыкающие к полусфере, где полуконусы пересекаются. В этих областях решение не будет простой суммой решений для двух полуконусов (если потребовать непрерывного изменения решения на границе этих областей).

Например, в области $VNDG$ следует определить решение как

$$\Phi = 1 + \Phi_1 + \Phi_2 - L$$

поскольку это решение удовлетворяет граничным условиям и волновому уравнению. Аналогично, в области $FSPE$ решение равно

$$\Phi = 1 + \Phi_1 + \Phi_3 - L$$

а в области $HRMW$

$$\Phi = 1 + \Phi_2 + \Phi_3 - 1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

После определения решения во всех областях, примыкающих к сфере, решение внутри сферы определяется с помощью соотношения (3.4). При этом, благодаря условию $\partial\Phi/\partial y = 0$ на поверхности крыла, граничные условия на поверхности сферы должны быть симметричны относительно плоскости $y = 0$.

Приведенное решение служит для описания течения при $y > 0$. Решение для нижней стороны крыла можно получить, используя следующее равенство: $\Phi_- = -\Phi_+ + 2$, где Φ_+ — решение при $y > 0$, а Φ_- — решение при $y < 0$.

Следует заметить, что представленные здесь результаты справедливы только в случаях, когда дифрагированная полусфера не выходит своим основанием за пределы передних кромок крыла. В других случаях требуется проведение специальных исследований, отличных от результатов этой работы.

Поступила 3 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые вопросы распространения колебаний. В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2. М., ОНТИ, 1937.
2. *Соболев С. Л.* Общая теория дифракции волн на римановых поверхностях. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1935, т. 9.
3. *Фалькович С. В., Хаскинд М. Д.* Колебания крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1947, т. 11, вып. 3.
4. *Гуревич М. И.* О подъемной силе стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
5. *Гуревич М. И.* К вопросу о тонком треугольном крыле, движущемся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1947, т. 11, вып. 3.
6. *Боровиков В. А.* О сведении некоторых трехмерных задач дифракции к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 3.
7. *Третьяков В. В.* Новые аналитические решения волнового уравнения и задача дифракции. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
8. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. т. 1. М. — Л., Гостехиздат, 1951.
9. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1954.