

ТРЕХМЕРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В МНОГОКОМПОНЕНТНОМ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОМ ГАЗЕ

С. Н. Казейкин, Ю. Д. Шевелев

(Москва)

Приводится система уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя в многокомпонентном частично ионизованном газе с замороженными реакциями при условии квазинейтральности в отсутствие внешних электромагнитных полей и переноса энергии излучением. Рассматривается аналитический метод расчета, основанный на применении метода последовательных приближений. Изменение коэффициентов переноса поперек пограничного слоя учитывается с помощью аппроксимаций этих величин через их значения на внешней границе и на поверхности тела. В локально-автомодельном случае выписываются первые приближения коэффициентов поверхностного трения и теплообмена. Приводится пример расчета обтекания под углом атаки конуса со сферическим затуплением замороженным воздухом.

1. Рассмотрим трехмерное движение многокомпонентного частично ионизованного газа. При отсутствии внешних электромагнитных полей, пренебрегая эффектом термодиффузии, систему уравнений пространственного замороженного ламинарного пограничного слоя можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} w \right) + \sqrt{g} \frac{\partial \rho v}{\partial \zeta} = 0 \\
 & \frac{\rho u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial c_i}{\partial \xi} + \frac{\rho w}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial c_i}{\partial \eta} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} + \frac{\partial I_i}{\partial \zeta} = 0, \quad i = 1, \dots, N \\
 & \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{w}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} + A_1 u^2 + A_2 w^2 + A_3 u w = \\
 & = \frac{A_4}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \\
 & \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{w}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w}{\partial \eta} + v \frac{\partial w}{\partial \zeta} + B_1 u^2 + B_2 w^2 + B_3 u w = \\
 & = \frac{B_4}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \\
 & \frac{\rho u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\rho w}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial H}{\partial \eta} + \rho v \frac{\partial H}{\partial \zeta} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \left[\frac{\partial H}{\partial \zeta} + (\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{U^2}{2} - \sum_{k=1}^N h_k \left(\frac{\sigma}{\mu} I_k + \frac{\partial c_k}{\partial \zeta} \right) \right] \right\} \\
 & h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^\circ, \quad H = \sum_{k=1}^N c_k h_k + \frac{U^2}{2}
 \end{aligned}$$

Первое уравнение системы (1.1) — уравнение неразрывности, второе — уравнение диффузии, третье, четвертое и пятое — уравнения движения

смеси, шестое — уравнение энергии. Система (1.1) замыкается соотношениями Стефана — Максвелла и уравнением состояния газовой смеси

$$(1.2) \quad \rho \frac{\partial x_i}{\partial \zeta} = m \sum_{k=1}^N \frac{I_k}{m_k} \left[\frac{x_i}{D_{ik}} - \delta_{ik} \sum_{l=1}^N \frac{x_l}{D_{kl}} + \frac{x_i e_i}{L} \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{D_{kj}} (e_k - e_j) \right],$$

$$L = \sum_{k=1}^N x_k e_k^2, \quad i = 1, \dots, N$$

$$(1.3) \quad p = \frac{\rho RT}{m}, \quad m = \sum_{i=1}^N x_i m_i$$

Здесь ξ, η, ζ — ортогональная система координат, причем ось ζ направлена по нормали к поверхности тела, так что поверхность $\zeta = 0$ совпадает с поверхностью тела, а оси ξ и η направлены вдоль поверхности тела; g_{11} и g_{22} — компоненты метрического тензора, $g = g_{11}g_{22}$; N — число компонент смеси; u, v, w — компоненты вектора среднемассовой скорости V соответственно по осям ξ, η, ζ ; p, ρ, T — давление, плотность, абсолютная температура смеси; m — молекулярный вес смеси; c_i, x_i, m_i, e_i — массовая и молярная концентрации, молекулярный вес, электрический заряд i -го компонента; I_i — проекция массового диффузионного потока i -го компонента на ось ζ ; μ, σ — коэффициент вязкости и число Прандтля; D_{ij} — коэффициенты бинарной диффузии; h_i — энтальпия i -го компонента, c_{pi} — теплоемкость i -го компонента при постоянном давлении, h_i° — удельная теплота образования i -го компонента; H — обобщенная энтальпия смеси.

Коэффициенты A_i, B_i ($i = 1, \dots, 4$) определяются геометрией тела и внешним течением [1].

Систему уравнений (1.1) — (1.3) необходимо дополнить тождествами

$$(1.4) \quad \sum_{k=1}^N x_k = \sum_{k=1}^N c_k = 1, \quad \sum_{k=1}^N I_k = 0$$

Система уравнений (1.1) — (1.3) с учетом (1.4) представляет собой замкнутую систему $2N + 6$ независимых уравнений с неизвестными $p, \rho, u, v, w, H, c_1, \dots, c_N, I_1, \dots, I_N$.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя и на стенке

$$(1.5) \quad u \rightarrow u_e(\xi, \eta), \quad w \rightarrow w_e(\xi, \eta), \quad T \rightarrow T_e(\xi, \eta)$$

$$c_i(\xi, \eta) \rightarrow c_{ie} = \text{const} \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty$$

$$u = w = 0, \quad T = T_w(\xi, \eta) \quad (\text{на стенке})$$

Рассмотрим случай непроницаемой стенки, тогда для диффузионных потоков элементов смеси

$$(1.6) \quad I_j^* \rightarrow 0 \quad \text{при } \zeta \rightarrow 0$$

Считаем, что газ находится на стенке в состоянии химического равновесия.

В этом случае система уравнений нахождения равновесного состава, соотношения Стефана — Максвелла и условия для непроницаемой стенки

(1.6) дают достаточно условий для нахождения химического состава смеси c_i^w и диффузионных потоков компонентов.

Соотношения Стефана — Максвелла (1.2) учитывают возникающее при разделении зарядов электрическое поле. Величина его найдена из условия квазинейтральности газа.

После решения задачи можно найти распределение напряжения вязкого трения на поверхности тела и полный конвективный тепловой поток к стенке

$$(1.7) \quad \tau_{11} = \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}, \quad \tau_{22} = \mu \frac{\partial w}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}$$

$$(1.8) \quad -I_{qw} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{N_r} Q_k I_k \right) \Big|_{\zeta=0}$$

2. Введем вместо ζ автомодельную координату λ и перейдем к безразмерным функциям

$$(2.1) \quad \lambda = \sqrt{\frac{u_e}{\mu_e \rho_e \alpha}} \int_0^{\zeta} \rho d\zeta$$

$$u = u_e(\xi, \eta) E(\xi, \eta, \lambda), \quad w = \beta(\xi, \eta) u_e(\xi, \eta) (G + \varphi E)$$

$$\rho v = \sqrt{\frac{\mu_e \rho_e u_e}{\alpha}} \left[K - \frac{\alpha}{V g_{11}} E \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - \frac{\alpha \beta}{V g_{22}} (G + \varphi E) \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right]$$

$$H = H_w + (H_e - H_w) \theta, \quad \varphi = \frac{w_e}{\beta u_e}$$

$$c_k = c_k^w + (c_k^e - c_k^w) z_k, \quad I_i = \sqrt{\frac{u_e \rho_e \mu_e}{\alpha}} (c_i^e - c_i^w) X_i$$

где $\alpha = \alpha(\xi, \eta)$ и $\beta = \beta(\xi, \eta)$ — произвольные пока функции. После замены и соответствующих преобразований система (1.1) — (1.3) примет вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \lambda} &= -P_1^* E - P_2^* G - N_4 \frac{\partial E}{\partial \xi} - N_5 \frac{\partial G}{\partial \eta} - \varphi N_5 \frac{\partial E}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(l \frac{\partial E}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial E}{\partial \lambda} + N_1^* \left(E^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right) + \\ &+ N_2^* G^2 + N_3^* EG + N_4 E \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial E}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(l \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial G}{\partial \lambda} + M_1^* \left(E^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right) + \\ &+ M_2^* G^2 + M_3^* EG + N_4 E \frac{\partial G}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial G}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1-\sigma}{k(1-t_0)} \frac{l}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} [E^2 + \beta^2 (G + \varphi E)^2] + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^N h_i \frac{c_i^e - c_i^w}{H_e - H_w} \left(X_i + \frac{l}{\sigma} \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} \right) \right\} + \\ &+ \frac{1-\theta}{1-t_0} E \left(N_4 \frac{\partial t_0}{\partial \xi} + \varphi N_5 \frac{\partial t_0}{\partial \eta} \right) + \frac{1-\theta}{1-t_0} G N_5 \frac{\partial t_0}{\partial \eta} + \\ &+ N_4 E \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial X_i}{\partial \lambda} &= K \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} + Q_{1i}^* (1 - z_i) E + \\
&+ Q_{2i}^* G (1 - z_i) + N_4 E \frac{\partial z_i}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial z_i}{\partial \eta}, \quad i = 1, \dots, N \\
\frac{\partial z_i}{\partial \lambda} &= \sum_{j=1}^N \frac{X_j m}{l} \left\{ \frac{c_j}{m_j} \sum_{k=1}^N \left(\frac{m_j}{m_k} - 1 \right) c_k Sh_{jk} - \delta_{jk} \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k} Sh_{ik} + \right. \\
&+ \left. \frac{c_i (e_i - L_1)}{L_2} \sum_{q=1}^N \frac{c_q}{m_q} Sh_{jq} (e_j - e_q) \right\} \\
Q_{1i}^* &= \frac{\alpha}{V_{g11}} \frac{1}{c_i^e - c_i^w} \frac{\partial c_i^w}{\partial \xi} + \frac{\varphi \alpha \beta}{V_{g22}} \frac{1}{c_i^e - c_i^w} \frac{\partial c_i^w}{\partial \eta} \\
Q_{2i}^* &= \frac{\alpha \beta}{V_{g22}} \frac{1}{c_i^e - c_i^w} \frac{\partial c_i^w}{\partial \eta} \\
l &= \frac{\mu \rho}{\mu_e \rho_e}, \quad t_0 = \frac{H_w}{H_e}, \quad k = \frac{2H_e}{u_e^2}, \quad Sh_{ij} = \frac{\mu}{\rho D_{ij}} \\
L_1 &= \sum_{i=1}^N c_i e_i, \quad L_2 = \sum_{i=1}^N \frac{c_i e_i^2}{m_i}
\end{aligned}$$

Коэффициенты $N_1^*, N_2^*, N_3^*, N_4, N_5, M_1^*, M_2^*, M_3^*, P_1^*, P_2^*$ имеют такой же вид, как в случае сжимаемого пограничного слоя в однокомпонентном газе [1]. Они зависят только от параметров внешнего течения и геометрии тела.

Граничные условия для безразмерных переменных

$$(2.3) \quad E = G = K = \theta = z_i = 0 \quad \text{при } \lambda = 0$$

$$(2.4) \quad E \rightarrow 1, G \rightarrow 0, \theta \rightarrow 1, z_i \rightarrow 1 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

3. Проинтегрируем уравнения движения, энергии и диффузии системы (2.2) по координате λ от некоторого значения λ до бесконечности с учетом граничных условий (2.4). Система уравнений примет вид

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad -l \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= -K(E - 1) + (P_1^* + N_1^*) \theta_{11} + N_1^* \theta_1 + \\
&+ (P_2^* + N_3^*) \theta_{21} - P_2^* \theta_2 + N_1^* \theta_\rho + N_2^* \theta_{22} + N_4 \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \xi} + \\
&+ N_5 \frac{\partial \theta_{12}}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.2) \quad -l \frac{\partial G}{\partial \lambda} &= -KG + M_1^* (\theta_{11} + \theta_1 + \theta_\rho) + (P_2^* + M_2^*) \theta_{22} + \\
&+ (P_1^* + M_3^*) \theta_{21} + N_4 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial \theta_{22}}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.3) \quad -\frac{l}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} &= -K(\theta - 1) + (P_1^* - R_1^*) \theta_{31} + (P_2^* - R_2^*) \theta_{32} + \\
&+ N_4 \frac{\partial \theta_{31}}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial \theta_{32}}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{31}}{\partial \eta} - \\
&- \frac{1 - \sigma}{k(1 - t_0)} \frac{l}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} [E^2 + \beta^2 (G + \varphi E)^2] - \\
&- \sum_{i=1}^N h_i \frac{c_i^e - c_i^w}{H_e - H_w} \left(X_i + \frac{l}{\sigma} \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.4) \quad X_i &= -K(z_i - 1) + \\
&+ (P_1^* - Q_{1i}^*) S_{1i} + (P_2^* - Q_{2i}^*) S_{2i} + N_4 \frac{\partial S_{1i}}{\partial \xi} + \\
&+ N_5 \frac{\partial S_{2i}}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial S_{1i}}{\partial \eta} \\
R_1^* &= \frac{N_4}{1-t_0} \frac{\partial t_0}{\partial \xi} + \frac{\varphi N_5}{1-t_0} \frac{\partial t_0}{\partial \eta}, \quad R_2^* = \frac{N_5}{1-t_0} \frac{\partial t_0}{\partial \eta} \\
S_{1i} &= \int_{\lambda}^{\infty} (z_i - 1) E d\lambda, \quad S_{2i} = \int_{\lambda}^{\infty} (z_i - 1) G d\lambda, \quad \theta_p = \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho}\right) d\lambda
\end{aligned}$$

Интегралы $\theta_1, \theta_2, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{31}, \theta_{32}$ имеют такой же вид, как и для сжимаемого однородного газа [2]. Исключим потоки X_i из уравнений, подставив выражения для безразмерных потоков (3.4) в уравнение энергии (3.3) и соотношения Стефана — Максвелла (2.2). Проинтегрируем полученную систему уравнений по λ от нуля до некоторого значения λ с учетом (2.3). Получим систему интегро-дифференциальных уравнений, решение которой вместе с граничными условиями (2.4) эквивалентно решению системы (2.2) с условиями (2.3), (2.4). Из уравнения неразрывности получилось выражение для K . Подставим его в остальные уравнения, исключив таким образом K из системы уравнений. Будем решать полученную систему уравнений методом последовательных приближений аналогично случаю сжимаемой однородной жидкости [2].

Предположим, что известно n -е приближение. Подставим его в уравнения системы, произведем соответствующее интегрирование и получим $(n+1)$ -е приближение. Для того чтобы полученное $(n+1)$ -е приближение удовлетворяло граничным условиям, введем управляющие функции $\delta^{(n)}(\xi, \eta)$, $b^{(n)}(\xi, \eta)$, $d^{(n)}(\xi, \eta)$, $y_i^{(n)}(\xi, \eta)$. Имеем

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad \zeta &= \lambda / \sqrt{\delta}, \quad E = E(\xi, \eta, \zeta), \quad G = bG(\xi, \eta, \zeta) \\
\theta - E &= d[\theta(\xi, \eta, \zeta) - E(\xi, \eta, \zeta)] \\
z_i - E &= y_i[z_i(\xi, \eta, \zeta) - E(\xi, \eta, \zeta)], \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

Здесь и ниже верхний индекс (n) для краткости опущен. Система уравнений для нахождения $(n+1)$ -го приближения имеет вид

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad -E^{(n+1)} &= \delta[A_1 + bB_1 + b^2C_1] + a_{11} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial \delta}{\partial \eta} + \\
&+ a_{14} \frac{\partial b}{\partial \eta} + \sqrt{\delta} A_{01}, \quad -G^{(n+1)} = \delta[A_2 + bB_2 + b^2C_2] + \\
&+ a_{21} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial \delta}{\partial \eta} + a_{23} \frac{\partial b}{\partial \xi} + a_{24} \frac{\partial b}{\partial \eta} + b\sqrt{\delta} A_{02} \\
z_i^{(n+1)} &= \delta \left[A_{3+i} + bB_{3+i} + \sum_{j=1}^N y_j C_{3+i, j} + b \sum_{j=1}^N y_j D_{3+i, j} \right] + \\
&+ a_{3+i, 1} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} + a_{3+i, 2} \frac{\partial \delta}{\partial \eta} + a_{3+i, 4} \frac{\partial b}{\partial \eta} + \sum_{j=1}^N a_{3+i, 5, j} \frac{\partial y_j}{\partial \xi} + \\
&+ \sum_{j=1}^N a_{3+i, 6, j} \frac{\partial y_j}{\partial \eta} + \sqrt{\delta} A_{0, 3+i}, \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta^{(n+1)} = & \delta \left[A_3 + bB_3 + dC_3 + bdD_3 + \sum_{i=1}^N E_{3i}y_i + b \sum_{i=1}^N G_{3i}y_i \right] + \\ & + \sum_{i=1}^N F_{3i}y_i + T_3 + a_{31} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} + a_{32} \frac{\partial \delta}{\partial \eta} + a_{34} \frac{\partial b}{\partial \eta} + a_{35} \frac{\partial d}{\partial \xi} + \\ & + a_{36} \frac{\partial d}{\partial \eta} + \sum_{i=1}^N a_{37,i} \frac{\partial y_i}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^N a_{38,i} \frac{\partial y_i}{\partial \eta} + \sqrt{\delta} A_{03} \end{aligned}$$

Коэффициенты A_1, B_1, \dots представляют собой двойные интегралы. Из уравнений системы (3.6) при $\zeta \rightarrow \infty$ с учетом (2.4) получается система уравнений в частных производных относительно δ, b, d и y_i . Коэффициенты $A_{1\infty}, B_{1\infty}, \dots$, получающиеся из коэффициентов A_1, B_1, \dots при $\zeta \rightarrow \infty$, будут выписаны ниже в нулевом приближении для локально-автомодельного случая. Если подставить вычисленные значения управляющих функций в уравнения (3.6), то полученное $(n+1)$ -е приближение будет удовлетворять граничным условиям (2.4). Этот процесс повторяется до достижения сходимости последовательности приближений с заданной точностью.

4. Рассмотрим локально-автомодельный случай [2,3]. Кроме того, введем эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии [4] и представим соотношения Стефана — Максвелла (1.2) в виде

$$(4.1) \quad I_k = -\rho D_k^* \frac{\partial c_k}{\partial \zeta}$$

Использование соотношений (4.1) вместо (1.2) упрощает уравнения диффузии и энергии.

Система уравнений для рассматриваемого случая в локально-автомодельном приближении без вдува имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (4.2) \quad -E^{(n+1)} &= \delta [A_1 + bB_1 + b^2C_1] \\ -G^{(n+1)} &= \delta [A_2 + bB_2 + b^2C_2] \\ z_i^{(n+1)} &= \delta [A_{3+i} + b B_{3+i} + y_i C_{3+i} + b y_i D_{3+i}] \\ \theta^{(n+1)} &= \delta [A_3 + bB_3 + dC_3 + bdD_3] + \sum_{i=1}^N F_{3i}y_i + T_3 \end{aligned}$$

Для нахождения управляющих функций получается система алгебраических уравнений. Чтобы вычислить коэффициенты этих уравнений, необходимо знать характер изменения поперек слоя величин D_i^* .

Будем аппроксимировать изменение поперек пограничного слоя выражений Sh_i / l , где Sh_i — эффективные амбиполярные числа Шмидта, через их значения на внешней границе пограничного слоя и на стенке

$$(4.3) \quad Sh_i / l = Sh_i^e + (Sh_i^w / l_w - Sh_i^e) Z_{-1}^{\alpha_s}$$

Правила вычисления эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии на границах через коэффициенты бинарной диффузии приведены в [4].

Здесь и далее используются функции $Z_m(\zeta)$ вида (A_m — находятся из условия $Z_m(0) = 1$)

$$Z_{-1}(\zeta) = e^{-\zeta^2}, \quad Z_m(\zeta) = \frac{A_m}{m!} \int_{\infty}^{\zeta} (\zeta - t)^m e^{-t^2} dt, \quad m = 0, 1, \dots$$

Если рассмотреть решение в окрестности критической точки при разных значениях показателя α_s и сравнить с имеющимися численными расчетами для критической точки [5-7], то можно выбрать значение α_s , при котором результаты совпадали бы. Наилучшее совпадение дает $\alpha_s = 1.1$.

Изменение коэффициентов $1/l$, ρ_e/ρ , σ/l зададим аналогично (4.3). Значения коэффициентов переноса на границах вычисляли в первом приближении по формулам Гиршфельдера. Необходимые значения интегралов столкновений для электронейтральных пар брали из экспериментальных данных [8], для заряженных частиц — из работы [9], а для пар ион — атом — из работы [7].

Вычислим безразмерный тепловой поток на стенку и коэффициенты трения на стенке, задав нулевое приближение в виде

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= 1 - Z_0(\zeta), \quad G^{(0)} = b^{(0)}(\xi, \eta)[Z_0(\zeta) - Z_{-1}(\zeta)] \\ \theta^{(0)} &= 1 - Z_0(\zeta) + d^{(0)}[Z_0(\zeta) - Z_{-1}(\zeta)] \\ z_i^{(0)} &= 1 - Z_0(\zeta) + y_i^{(0)}[Z_0(\zeta) - Z_{-1}(\zeta)] \end{aligned}$$

Коэффициенты системы для нахождения управляющих функций в нулевом приближении

$$\begin{aligned} A_{1\infty}^{(0)} &= -0.25 P_1^* + 0.0453 N_1^* + \Delta_1(0.031 N_1^* - 0.161 P_1^*) - \\ &- (0.455 + 0.357 \Delta_1) N_1^* \rho_e / \rho_w \\ B_{1\infty}^{(0)} &= 0.104 P_2^* - 0.194 N_2^* + \Delta_1(0.0721 P_2^* - 0.134 N_2^*) \\ C_{1\infty}^{(0)} &= N_2^*(0.048 + 0.0382 \Delta_1) \\ A_{2\infty}^{(0)} &= M_1^*[0.0454 + 0.0311 \Delta_1 - (0.455 + 0.357 \Delta_1) \rho_e / \rho_w] \\ B_{2\infty}^{(0)} &= -0.311 P_1^* - 0.194 M_3^* - \Delta_1(0.169 P_1^* + 0.134 M_3^*) \\ C_{2\infty}^{(0)} &= 0.1 P_2^* + 0.048 M_2^* + \Delta_1(0.0579 P_2^* + 0.0382 M_2^*) \\ A_{3\infty}^{(b)} &= P_1^*(0.0891 \sigma_e + 0.161 \Delta_2), \quad B_{3\infty}^{(0)} = P_2^*(-0.0315 \sigma_e - \\ &- 0.0721 \Delta_2) \\ C_{3\infty}^{(0)} &= P_1^*(0.141 \sigma_e + 0.169 \Delta_2), \quad D_{3\infty}^{(0)} = P_2^*(-0.0419 \sigma_e - \\ &- 0.0579 \Delta_2) \\ T_{3\infty}^{(0)} &= \frac{1 - \sigma_w}{k(1 - t_0)}(1 + \beta^2 \varphi^2) + \sum_{i=1}^N \frac{c_i^e - c_i^w}{H_e - H_w} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} h_i^w \left(1 - \frac{\sigma_w}{Sh_i^w} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} h_i^e \left(1 - \frac{\sigma_e}{Sh_i^e} \right) \right] \\ F_{3i\infty}^{(0)} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \frac{c_i^e - c_i^w}{H_e - H_w} \left[h_i^e \left(1 - \frac{\sigma_e}{Sh_i^e} \right) - h_i^w \left(1 - \frac{\sigma_w}{Sh_i^w} \right) \right] \\ A_{3+i,\infty}^{(0)} &= Sh_i^e(0.25 P_1^* - 0.159 Q_{1i}^*) + \Delta_3(0.161 P_1^* - 0.122 Q_{1i}^*) \\ B_{3+i,\infty}^{(0)} &= -(0.104 Sh_i^e + 0.0721 \Delta_3) P_2^* \end{aligned}$$

$$C_{3+i,\infty}^{(0)} = \text{Sh}_i^e (0.311 P_1^* - 0.194 Q_{1i}^*) + \Delta_3 (0.169 P_1^* - 0.134 Q_{1i}^*)$$

$$D_{3+i,\infty}^{(0)} = \text{Sh}_i^e (0.048 Q_{2i}^* - 0.1 P_2^*) - \Delta_3 (0.0579 P_2^* - 0.0382 Q_{2i}^*)$$

$$\Delta_1 = 1 / l_w - 1, \quad \Delta_2 = \sigma_w / l_w, \quad \Delta_3 = \text{Sh}_i^w / l_w - \text{Sh}_i^e$$

После того, как найдены $\delta^{(0)}$, $b^{(0)}$, $d^{(0)}$ и $y_i^{(0)}$, можно определить безразмерные компоненты коэффициента трения на стенке, градиент энтальпии и градиенты концентраций

$$(4.4) \quad -l_w \frac{\partial E}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left\{ N_1^* \left[0.845 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) - 0.798 \right] - \right. \\ \left. - 0.234 P_1^* + b^{(0)} (0.311 P_2^* - 0.209 N_3^*) + 0.709 N_2^* b^{(0)^2} \right\}$$

$$(4.5) \quad -l_w \frac{\partial G}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left\{ M_1^* \left[0.845 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) - 0.798 - \right. \right. \\ \left. \left. - 0.209 (P_1^* + M_3^*) b^{(0)} + 0.0709 (P_2^* + M_2^*) b^{(0)^2} \right\}$$

$$(4.6) \quad -\frac{l_w}{\text{Sh}_i^w} \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left\{ - (P_1^* - Q_{1i}^*) (0.234 + 0.209 y_i^{(0)}) + \right. \\ \left. + (P_2^* - Q_{2i}^*) (0.113 + 0.0709 y_i^{(0)}) b^{(0)} \right\}$$

$$(4.7) \quad -\frac{l_w}{\sigma_w} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left\{ - (P_1^* - R_1^*) (0.234 + 0.209 d^{(0)}) + \right. \\ \left. + (P_2^* - R_2^*) (0.113 + 0.0709 d^{(0)}) b^{(0)} \right\} + \\ + \frac{l_w}{\sigma_w} \sum_{k=1}^4 \frac{h_k^w (c_k^e - c_k^w)}{H_e - H_w} \left(1 - \frac{\sigma_w}{\text{Sh}_k^w} \right) \frac{\partial z_k}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$$

5. Рассмотрим обтекание воздухом с замороженными химическими реакциями тупого конуса со сферическим затуплением под углом атаки.

В качестве модели воздуха рассмотрим четырехкомпонентный газ, состоящий из молекул, ионов, атомов и электронов. Обозначим их соответственно M, I, A, E . На стенке будут происходить две равновесные химические реакции $M \rightleftharpoons 2A, I \rightleftharpoons A - E$. Такая модель дает возможность рассматривать обтекание тел воздухом при температуре за ударной волной до $15\,000^\circ - 16\,000^\circ$.

Для расчета использовались данные о распределении давления и скорости в совершенном газе по поверхности конуса [10].

Из уравнений (1.1) следует, что

$$H_e = H_\infty = \text{const}, \quad c_i^e = \text{const}, \quad i = 1, \dots, N$$

Концентрации компонентов обтекаемого газа находим по условиям в критической точке, считая, что в ней газ находится в состоянии химического равновесия. Тогда температуру на внешней границе пограничного слоя можно определить, зная H_e, U_e и c_i^e из уравнения

$$\sum_{i=1}^4 c_i^e h_i(T) = H_e - \frac{U_e^2}{2}$$

Введем безразмерные продольную и поперечную составляющие локального коэффициента трения, число Нуссельта и число Рейнольдса

$$C_{f1} = \mu_w \frac{\partial u}{\partial \zeta} \Big|_w \rho_e^{-1} u_e^{-2}, \quad C_{f2} = \mu_w \frac{\partial w}{\partial \zeta} \Big|_w \rho_e^{-1} u_e^{-2}$$

$$\text{Nu} = \frac{(-I_q) \alpha c_p^e}{\lambda_e (H_e - H_w)}, \quad \text{Re} = \frac{u_e \alpha \rho_e}{\mu_e}$$

При больших скоростях полета ($M_\infty \geq 20$), учитывая малость вторичного течения, и для холодной стенки, пренебрегая членами порядка ρ_e / ρ_w , получим приближенные формулы

$$\begin{aligned} C_{f1} \sqrt{\text{Re}} &= \sqrt{\delta^{(0)}} (0.234 P_1^* - 0.047 N_1^*) \\ C_{f2} \sqrt{\text{Re}} &= C_{f1} \sqrt{\text{Re}} \operatorname{tg} \gamma = \frac{w_e}{u_e} C_{f1} \sqrt{\text{Re}} \\ \frac{1}{\sigma_e} \frac{\text{Nu}}{\sqrt{\text{Re}}} &= P_1^* \sqrt{\delta^{(0)}} (0.234 + 0.209 d^{(0)}) \\ \frac{l_w}{\text{Sh}_i^w} \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} \Big|_w &= P_1^* \sqrt{\delta^{(0)}} (0.234 + 0.209 y_i^{(0)}) \end{aligned}$$

Здесь γ — угол, образованный линиями тока внешнего течения с координатной линией $\eta = \text{const}$.

Полный конвективный поток на стенку (1.8) равен

$$(5.1) \quad I_q = - (H_e - H_w) \sqrt{\mu_e \rho_e} \sqrt{\frac{u_e}{\alpha}} \sqrt{\delta^{(0)}} P_1^* (0.234 + 0.209 d^{(0)})$$

где

$$(5.2) \quad \delta^{(0)} = [0.089 P_1^* - 0.0143 N_1^* + (0.161 P_1^* - 0.031 N_1^*) / l_w]^{-1}$$

$$y_i^{(0)} = \frac{1 - \delta^{(0)} P_1^* (0.089 \text{Sh}_i^e + 0.161 \text{Sh}_i^w / l_w)}{\delta^{(0)} P_1^* (0.142 \text{Sh}_i^e + 0.169 \text{Sh}_i^w / l_w)}$$

$$a^{(0)} = \frac{1 - (1 - \sigma_w) (1 + \beta^2 \varphi^2) / [k (1 - t_0)] - L_3 - P_1^* \delta^{(0)} (0.0891 \sigma_e + 0.161 \sigma_w / l_w)}{P_1^* \delta^{(0)} (0.141 \sigma_e + 0.169 \sigma_w / l_w)}$$

$$\begin{aligned} L_3 = \sum_{i=1}^N \frac{c_i^e - c_i^w}{H_e - H_w} &\left[\frac{\sqrt{2} - 1}{2} h_i^e \left(1 - \frac{\sigma_e}{\text{Sh}_i^e} \right) (\sqrt{2} + y_i) + \right. \\ &\left. + h_i^w \left(1 - \frac{\sigma_w}{\text{Sh}_i^w} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - y_i^{(0)} \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Если систему координат выбрать так, что координата ξ направлена по образующей конуса и отсчитывается от передней точки, а координата η — угол между меридиональной плоскостью, проходящей через данную точку и наветренной линией растекания, то коэффициенты N_1^* и P_1^* имеют вид

$$(5.3) \quad N_1^* = \frac{\alpha}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} + \frac{\alpha \beta \varphi}{\sqrt{g_{22}} u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \eta} - \frac{\varphi^2 \alpha \beta^2}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi}$$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} P_1^* = 0.5 + \frac{\alpha}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi} &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} + \frac{\alpha \beta \varphi}{2 \sqrt{g_{22}} u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \eta} + \right. \\ &\left. + \frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\alpha \varphi}{\sqrt{g_{22}}} \right) + P_3 \end{aligned}$$

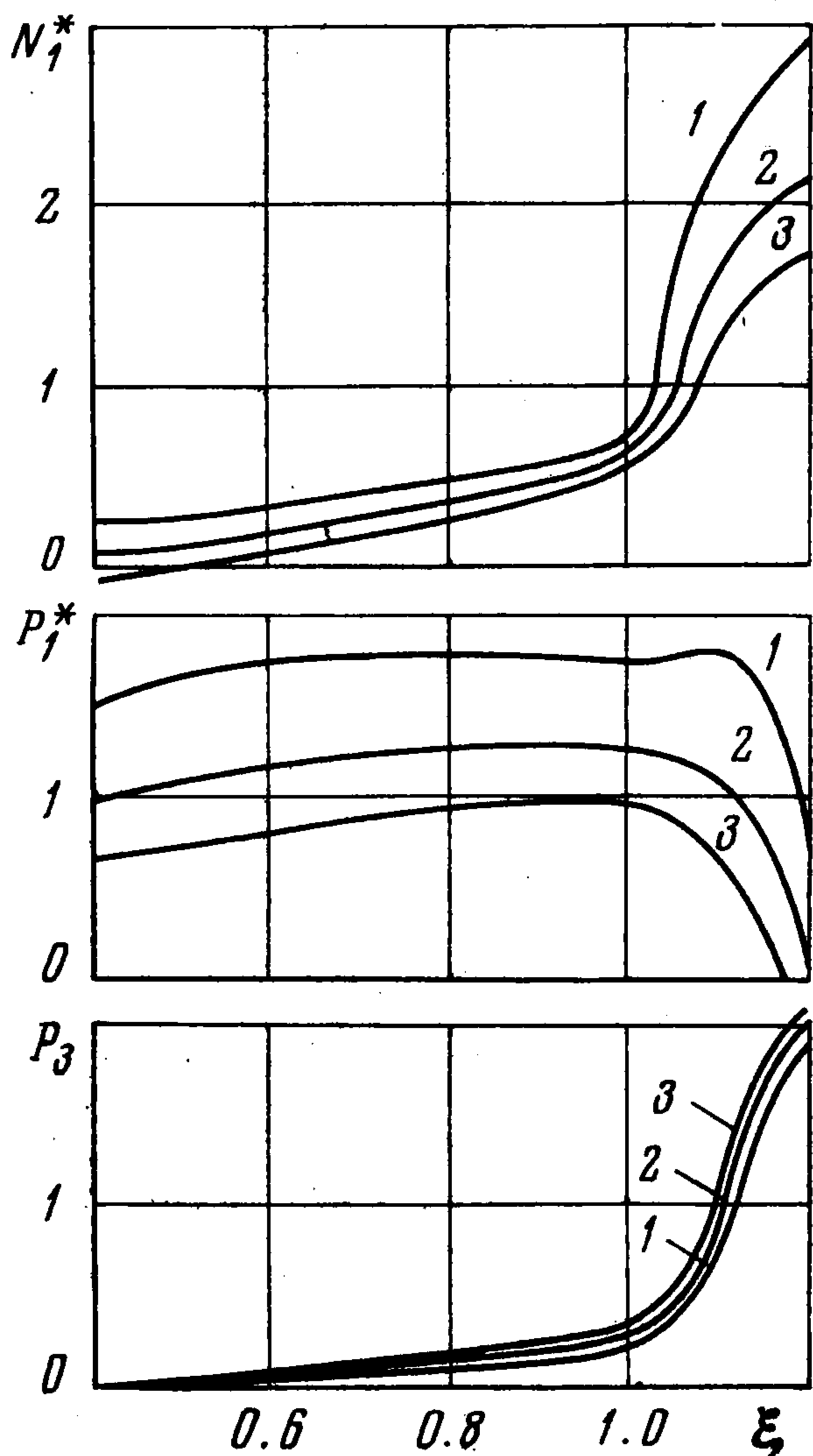
$$P_3 = \frac{\alpha}{2 \mu_e \rho_e} \frac{\partial \mu_e \rho_e}{\partial \xi} + \frac{\alpha \beta \varphi}{2 \mu_e \rho_e \sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \mu_e \rho_e}{\partial \eta}$$

Графики N_1^* и P_1^* приведены на фиг. 1. На всех фигурах цифрами 1, 2, 3 помечены результаты вдоль образующих конуса, соответствующих $\eta = \pi / 20$, $\eta = \pi / 2$ и $\eta = \pi$.

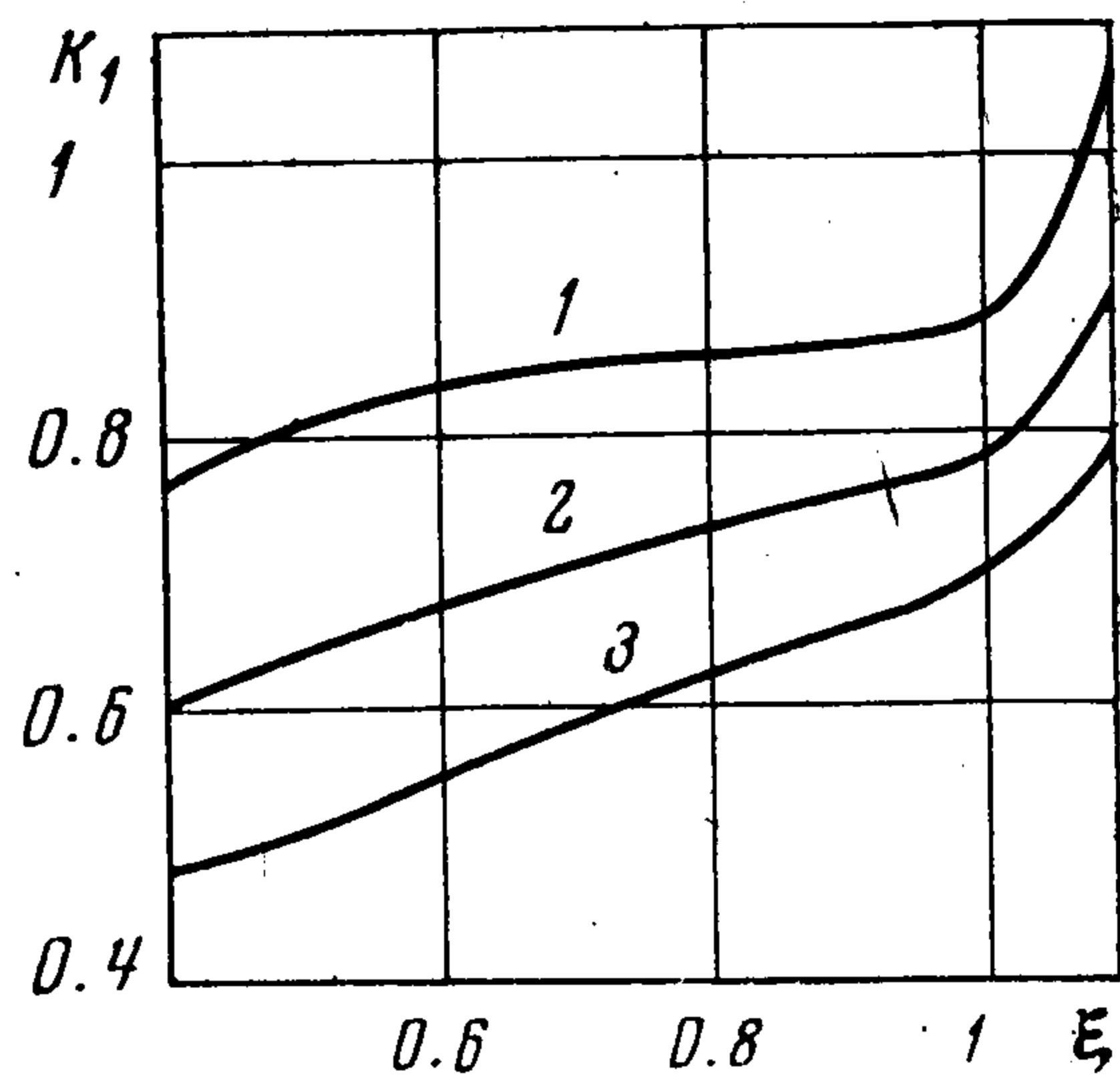
Как видно из формулы (5.1) и второй формулы (5.2), величина теплового потока определяется коэффициентом P_1^* . Второе слагаемое в (5.4) зависит от геометрии тела,

выражение в скобках — от параметров внешнего обтекания тела, а коэффициент P_3 учитывает изменение величины $\mu_e \rho_e$. При удалении от критической точки величина P_3 начинает определять значение P_1^* (фиг. 1), т. е. учет переменности свойств газа оказывает сильное влияние на безразмерный коэффициент трения и тепловой поток.

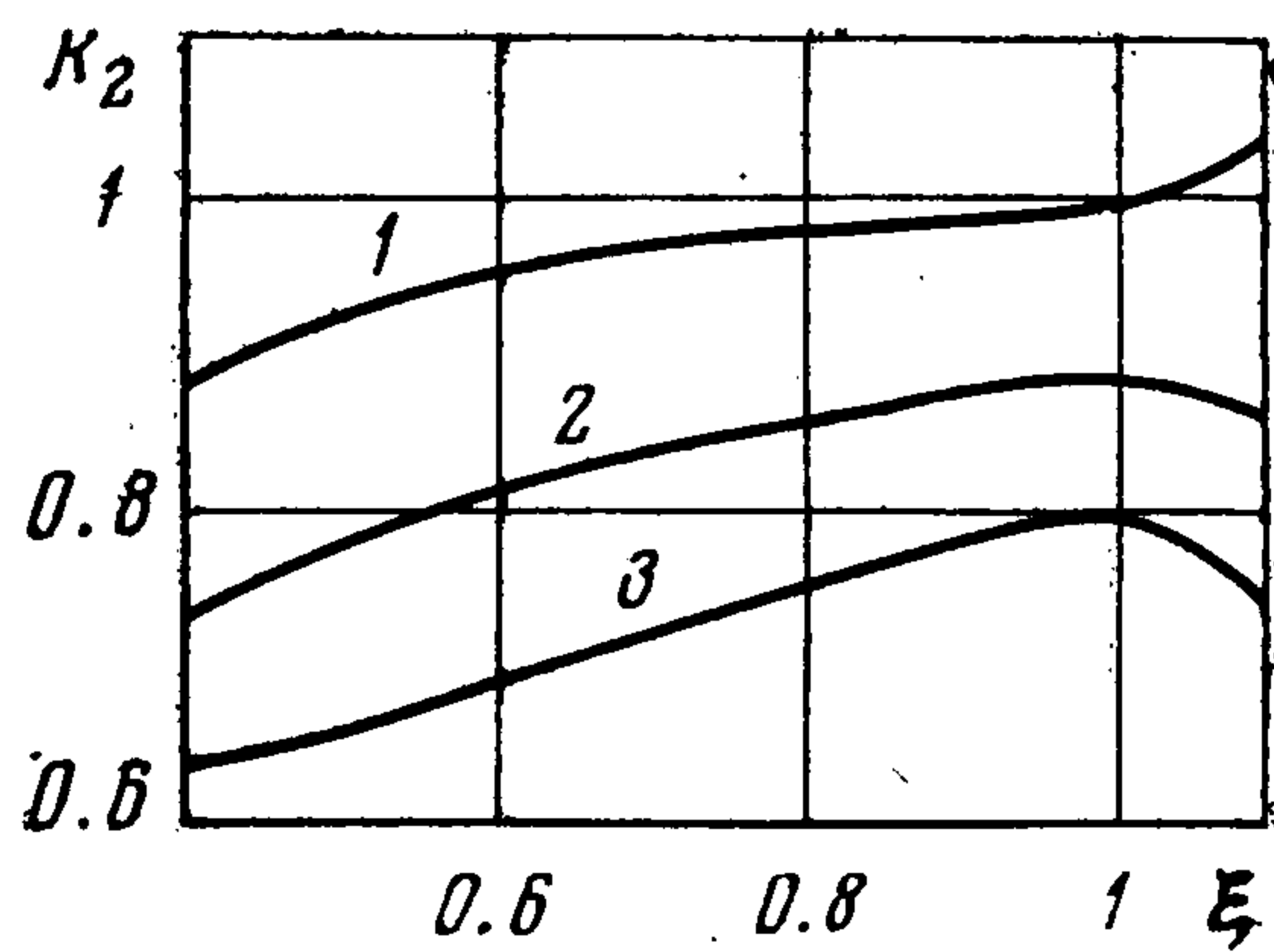
Следует отметить, что в выражение для теплового потока на стенку (5.1) явно не входят диффузионные потоки, но диффузионный перенос энергии в замороженном слое учитывается при вычислении $d^{(0)}$. Величина теплопередачи к стенке при обтекании тела замороженным газом определяется перепадом полной энтальпии, изменени-



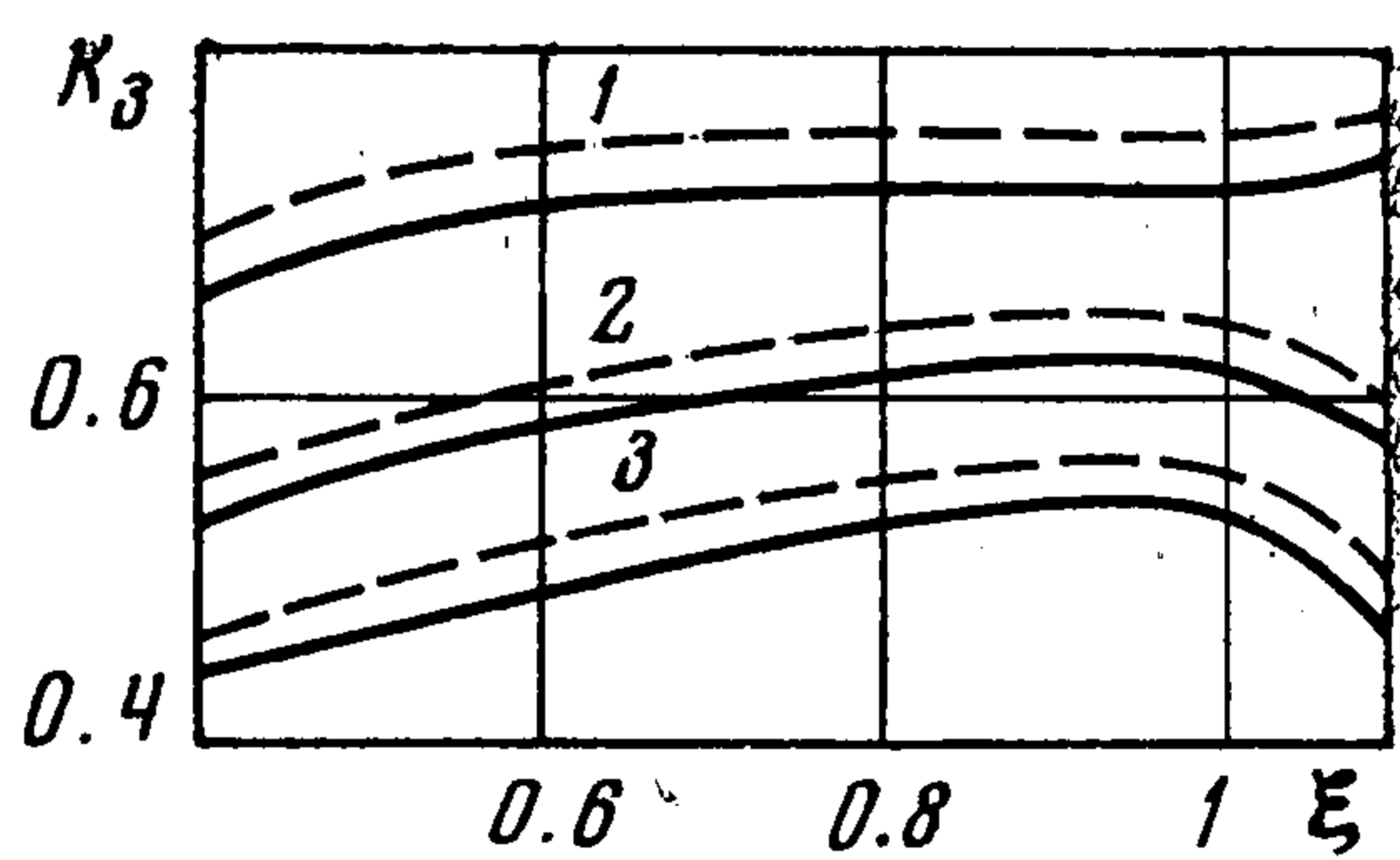
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ем параметра $\mu_e \rho_e$, изменением скорости внешнего течения вдоль поверхности тела и геометрией тела.

На фиг. 2 и 3 изображено изменение величин $k_1 = C_{f1} \sqrt{Re}$ и $k_2 = (1 / \sigma_e) Nu / \sqrt{Re}$ вдоль образующих конуса, на фиг. 4 — градиенты безразмерных концентраций $k_i = (l_w / Sh_i^w)(\partial z_i / \partial \lambda)_w$ для молекул и ионов (пунктиром).

Влияние рассматриваемой модели замороженного газа сказывается на интегральных величинах числовых коэффициентов в (5.1) — (5.3) и на значениях управляющих функций $\delta^{(0)}$, $d^{(0)}$, $y_i^{(0)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шевелев Ю. Д.* Разностные методы расчета пространственного ламинарного пограничного слоя. В сб.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, вып. 1. Течения в пограничном слое. Изд-во МГУ, 1971.
2. *Шахов Н. Н., Шевелев Ю. Д.* Метод последовательных приближений для задач трехмерного ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
3. *Тирский Г. А., Шевелев Ю. Д.* О методе последовательных приближений для задач трехмерного ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
4. *Суслов О. Н., Тирский Г. А.* Определение, свойства и вычисление эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном ионизованном пограничном слое. ПМТФ, 1970, № 4.
5. *Суслов О. Н.* Расчет конвективного теплового потока в окрестности критической точки при обтекании тела частично ионизованным воздухом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
6. *Фэй, Риддел.* Теоретический анализ теплообмена в лобовой точке. В сб.: Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
7. *Фэй Дж. А., Кемп Н.* Теория теплоотдачи в точке торможения в частично ионизованном двухатомном газе. Механика. Сб. перев., 1964, № 1.
8. *Беляев Ю. Н., Камышев Н. В., Леонас В. Б.* Особенности рассеяния быстрых пучков атомов O и N на молекулах NO и CO . Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 6.
9. *Соколова И. А.* Расчет сечений соударений заряженных частиц в ионизованном газе. В сб.: Аэрогазодинамика, Новосибирск, «Наука», 1973.
10. Численное исследование современных задач газовой динамики (под ред. О. М. Белоцерковского). М., «Наука», 1974.