

О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ЧАСТИЧНО ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Я. Л. Рудерман

(Москва)

Рассматривается переход несжимаемого ламинарного пограничного слоя с неподвижного участка обтекаемой поверхности на подвижный в случаях, когда существует установившийся режим обтекания. На поверхности, вследствие движения ее части, возникает разрыв граничных условий. Предполагается, что наличие особенности в граничных условиях не оказывает возмущающего влияния на пограничный слой первого приближения выше по потоку от линии разрыва. В такой постановке задача впервые рассматривалась Магером [1]. Им дано приближенное решение в простейшем случае обтекания пластины, когда невозмущенное течение является течением Блазиуса, а задняя секция пластины перемещается перпендикулярно основному потоку.

Цель данной работы — построение решения уравнений пограничного слоя в окрестности линии разрыва на подвижном участке поверхности в общем случае пространственного обтекания, причем выше указанной линии решение считается известным. Используемый метод может рассматриваться как обобщение метода продолжения [2] на случай пространственного пограничного слоя. Аналогичная схема решения предлагалась [3] для двумерных задач сжимаемого пограничного слоя.

1. Основные положения. В приближении теории пограничного слоя рассматривается ламинарное обтекание некоторой поверхности потоком вязкой несжимаемой жидкости. Поверхность состоит из подвижного и неподвижного сегментов, разделяемых линией, вдоль которой происходит скачкообразное изменение граничных условий. Выше линии разрыва располагается область невозмущенного течения — в данном случае пограничный слой на неподвижной части поверхности (он считается безотрывным).

Вводятся следующие предположения.

1°. Форма заднего сегмента и его движение таковы, что в неподвижной системе отсчета поверхность в целом может быть задана не зависящим от времени параметрическим уравнением $r = r(x, y)$, где r — радиус-вектор точки поверхности. Семейства кривых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ определяют неподвижную систему криволинейных координат на рассматриваемой поверхности. В случае ортогональной сетки координат не зависящая от времени параметризация поверхности позволяет сохранить без изменений обычную форму уравнений установившегося пограничного слоя [4]. В безразмерном виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (h_2 u)_x + (h_1 v)_y + (h_1 h_2 w)_z &= 0 \\ h_2 u u_x + h_1 v u_y + h_1 h_2 w u_z + v (u h_{1y} - v h_{2x}) &= -h_2 p_x + h_1 h_2 u_{zz} \\ h_2 u v_x + h_1 v v_y + h_1 h_2 w v_z + u (v h_{2x} - u h_{1y}) &= -h_1 p_y + h_1 h_2 v_{zz} \\ h_1 &= |r_x|, \quad h_2 = |r_y|, \quad R = UL/\nu \end{aligned}$$

Здесь $zR^{-1/2}$ — расстояние от поверхности по нормали к ней; $u, v, wR^{-1/2}$ — компоненты скорости в направлении x, y и z соответственно; p — давление — известная из решения задачи невязкого обтекания функция координат x, y ; R — число Рейнольдса. Все линейные размеры отнесены к некоторой характерной длине L , компоненты скорости — к характерной скорости U , давление — к ρU^2 .

2°. Задний сегмент — твердая недеформируемая поверхность, движущаяся плоскопараллельно, причем траектории ее точек не пересекают линию разрыва. Распределение скоростей в координатах x, y считается не зависящим от времени. Следовательно, с учетом предположения 1° задний сегмент представляет собой либо цилиндрическую поверхность бесконечного размаха, либо поверхность вращения. В первом случае имеет место равномерное поступательное движение вдоль образующей, во втором — равномерное вращение вокруг оси симметрии.

3°. По крайней мере в окрестности линии разрыва можно выбрать ортогональную систему координат x, y таким образом, чтобы траектории точек подвижного участка принадлежали семейству $x = \text{const}$. В силу 2° можно считать, что на линии разрыва $x = 0$, а области невозмущенного течения соответствует $x < 0$. Граничные условия для уравнений (1.1) в выбранной системе координат имеют вид

$$(1.2) \quad u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = w(x, y, 0) = 0 \quad \text{при } x < 0$$

$$(1.3) \quad u(x, y, 0) = w(x, y, 0) = 0; \quad v(x, y, 0) = v_b(x) \quad \text{при } x > 0$$

$$(1.4) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u(x, y, z) = u_e(x, y), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} v(x, y, z) = v_e(x, y)$$

Здесь v_b — скорость движения поверхности, а u_e, v_e — компоненты скорости внешнего невязкого течения. Принимается, что в окрестности линии разрыва функции h_1, h_2, p и v_b представимы степенными рядами (индекс минус берется при $x < 0$, индекс плюс — при $x > 0$)

$$(1.5) \quad h_1(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i^{\mp}(y) x^i, \quad h_2(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i^{\mp}(y) x^i$$

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{\mp}(y) x^i; \quad l_0^+ = l_0^- = l_0; \quad m_j^+ = m_j^- = m_j,$$

$$p_j^+ = p_j^- = p_j, \quad j = 0, 1$$

$$(1.6) \quad v_b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{bi} x^i$$

В силу выбора системы координат все коэффициенты l_i^+ и v_{bi} не зависят от y .

Рассматривается случай, когда линия $x = 0$ в каждой своей точке пересекается поверхностной линией тока невозмущенного течения. При $x = 0$ профили скорости считаются известными

$$(1.7) \quad u(0, y, z) = u_0(y, z), \quad v(0, y, z) = v_0(y, z)$$

Профили (1.7) берутся в качестве начальных данных для уравнений (1.1) при расчете пограничного слоя ниже линии разрыва. При малых z они могут быть представлены рядами

$$(1.8) \quad u_0(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(y)}{i!}, \quad v_0(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i(y)}{i!} \quad (a_1 > 0)$$

Из уравнений (1.1) можно получить следующие условия согласования профилей (1.7) с граничными условиями (1.2):

$$(1.9) \quad l_0 a_2 = p_1, \quad m_0 b_2 = p_{0y}, \quad a_3 = 0, \dots$$

В пограничном слое на подвижном участке поверхности вблизи линии разрыва можно выделить две области: внутреннюю — подслой, в котором, благодаря силам вязкости, распространяется влияние изменившихся граничных условий, и внешнюю, где течение реагирует на изменение граничных условий через взаимодействие с вязким подслоем. Во внутренней области вводится растянутая переменная

$$(1.10) \quad \mu = k(y) \frac{z}{\delta(x)}, \quad k(y) = \left(\frac{a_1}{3l_0} \right)^{1/2} > 0, \quad \delta(x) = x^m \quad (0 < m < 1)$$

Значение постоянной m будет определено ниже. Решение уравнений (1.1) с граничными условиями (1.3), (1.4) и начальными условиями (1.7) ищется в виде срачиваемых асимптотических рядов: во внешней области при $x \rightarrow 0$ и фиксированных y и z , во внутренней — при фиксированных y и μ .

2. Внутренняя задача. Главными членами внешних разложений для составляющих скорости u и v являются соответственно u_0 и v_0 , поведение которых при малых z задается формулами (1.8). Срачивание может быть обеспечено, если потребовать, чтобы внутренние разложения функций u и v имели вид

$$(2.1) \quad u \sim \delta \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n k^{2-n} F_n(y, \mu), \quad v \sim \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n k^{-n} G_n(y, \mu)$$

причем, как следствие (1.8), (1.10), при больших μ должны выполняться условия

$$(2.2) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{F_n(y, \mu)}{\mu^{n+1}} = \frac{3l_0 a_{n+1}}{(n+1)! a_1}, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{G_n(y, \mu)}{\mu^n} = \frac{b_n}{n!} \quad (b_0 \equiv 0)$$

Компоненту w представим рядом

$$(2.3) \quad w \sim \frac{\delta_1(x)}{3l_0} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n k^{1-n} H_n(y, \mu)$$

Если функции $\delta(x)$ и $\delta_1(x)$ определены, то подстановка разложений (2.1), (2.3) вместе с (1.5), (1.6) в уравнения (1.1) и граничные условия (1.3) приводит к последовательности задач для определения функций F_n , G_n , H_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Чтобы в уравнения нулевого приближения (относительно функций F_0 , G_0 , H_0) дали вклад как инерционные, так и вязкие

члены, положим

$$(2.4) \quad m = 1/3, \quad \delta_1(x) = \delta^{-1}(x)$$

Тогда в нулевом приближении задача сведется к решению системы уравнений с граничными условиями (штрих означает дифференцирование по μ)

$$F_0 - \mu F_0' + H_0' = 0, \quad 3l_0 F_0'' + (\mu F_0' - H_0) F_0' - F_0^2 = 0$$

$$3l_0 G_0'' + (\mu F_0 - H_0) G_0' = 0$$

$$F_0(y, 0) = H_0(y, 0) = 0, \quad G_0(y, 0) = v_{b0}, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{F_0(y, \mu)}{\mu} = 3l_0$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} G_0(y, \mu) = 0$$

Эта задача имеет решение

$$(2.5) \quad F_0 = 3l_0\mu, \quad G_0 = v_{b0} \left(1 - c \int_0^\mu \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) dt \right), \quad H_0 \equiv 0$$

$$c^{-1} = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) dt = \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{9}} \quad (c \approx 0.776458)$$

С помощью (2.5) уравнения n -го ($n > 0$) приближения приводятся к виду

$$(2.6) \quad \psi_n''' + \mu^2 \psi_n'' - (n+2)\mu \psi_n' + (n+2)\psi_n = Q_n$$

$$(2.7) \quad G_n'' + \mu^2 G_n' - n\mu G_n = R_n - \frac{n+2}{3l_0} G_0' \psi_n$$

$$(2.8) \quad H_n = \mu \psi_n' - (n+2)\psi_n + S_n$$

Функция ψ_n связана с F_n соотношением

$$(2.9) \quad \psi_n(y, \mu) = \int_0^\mu F_n(y, t) dt$$

Функции Q_n , R_n и S_n зависят от параметров предыдущих приближений от нулевого до $(n-1)$ -го включительно. Общие формулы для Q_n , R_n и S_n вследствие их громоздкости не приводятся, хотя получение их не представляет особого труда. Следует отметить, что уравнения (2.6) отличаются только правыми частями от уравнений, полученных в [2] при решении плоских задач продолжения.

Граничные условия при $\mu \rightarrow \infty$ для уравнений (2.6), (2.7) задаются формулами (2.2). Кроме того, в соответствии с (1.3), (1.6), (2.9)

$$(2.10) \quad \psi_n(y, 0) = \psi_n'(y, 0) = 0, \quad G_n(y, 0) = \begin{cases} k^n v_{bi}, & n = 3i \\ 0, & n \neq 3i \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

В силу однотипности внутренних задач все они могут быть решены тем же путем, каким ниже будут решены задачи первого и второго приближения, однако объем вычислительной работы в высших приближениях резко возрастает.

В задаче первого приближения с использованием первого из условий (1.9) можно получить

$$(2.11) \quad Q_1 = \frac{3l_0 a_2}{a_1} - \frac{3m_1 v_{b0}^2}{m_0 a_1} \varphi_0'^2, \quad R_1 \equiv 0, \quad \varphi_0(\mu) = \frac{1}{v_{b0}} \int_0^\mu G_0(t) dt$$

Всякое решение уравнений первого приближения, удовлетворяющее условию (2.2), при $\mu \rightarrow \infty$ имеет следующее поведение:

$$(2.12) \quad \psi_1 = \frac{3l_0 a_2}{a_1} \frac{\mu^3}{6} + A_1 \mu + o(\mu^{-N}), \quad G_1 = b_1 \mu + o(\mu^{-N})$$

Коэффициент A_1 (y) не определяется условием на бесконечности; $o(\mu^{-N})$ означает добавок, убывающий быстрее любой отрицательной степени μ ,

В соответствии с формулами (2.11), (2.12) представим $\psi_1(y, \mu)$ в виде

$$(2.13) \quad \psi_1(y, \mu) = \frac{3l_0 a_2}{a_1} \psi_{10}(\mu) - \frac{3m_1 v_{b0}^2}{m_0 a_1} \psi_{11}(\mu)$$

Функции ψ_{10} и ψ_{11} удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$(2.14) \quad \psi_{10}''' + \mu^2 \psi_{10}'' - 3\mu \psi_{10}' + 3\psi_{10} = 1; \quad \psi_{10}(0) = \psi_{10}'(0) = 0$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\psi_{10}(\mu)}{\mu^3} = \frac{1}{6}$$

$$(2.15) \quad \psi_{11}''' + \mu^2 \psi_{11}'' - 3\mu \psi_{11}' + 3\psi_{11} = \varphi_0'^2;$$

$$\psi_{11}(0) = \psi_{11}'(0) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\psi_{11}(\mu)}{\mu^3} = 0$$

Решение задачи (2.14)

$$(2.16) \quad \psi_{10} = \frac{\mu^3}{6}$$

а решение задачи (2.15) находится численно.

При больших μ

$$(2.17) \quad \psi_{11} = A_{11} \mu + o(\mu^{-N})$$

Значение постоянной A_{11} определяется заданными граничными условиями в нуле и заранее неизвестно, поэтому удобнее воспользоваться вспомогательным решением $\chi(\mu)$ уравнения (2.15), удовлетворяющим условиям

$$(2.18) \quad \chi(0) = 0; \quad \chi(\mu) = \mu + o(\mu^{-N}), \quad \mu \rightarrow \infty$$

Функция ψ_{11} связана с χ соотношением

$$\psi_{11}(\mu) = \chi(\mu) - \chi'(0)\mu, \quad A_{11} = 1 - \chi'(0)$$

Для численного определения $\chi(\mu)$ можно перейти к краевой задаче для уравнения (2.15) на конечном отрезке интегрирования, выбранном таким образом, что на правом его конце функцию χ и ее первую производную можно задать с достаточной точностью при помощи асимптотической формулы (2.18), отбросив члены $o(\mu^{-N})$. Как показали априорные оценки и пробные расчеты, для этой и для всех последующих задач численного интегрирования достаточно взять отрезок $[0,6]$. Функция $\psi_{11}' \times 10$ пред-

ставлена на фиг. 1 (кривая 1); $A_{11} = -0.081838$. Из (2.13), (2.16), (2.17) следует, что в (2.12)

$$(2.19) \quad A_1 = -\frac{3m_1 v_{b0}^2}{m_0 a_1} A_{11}$$

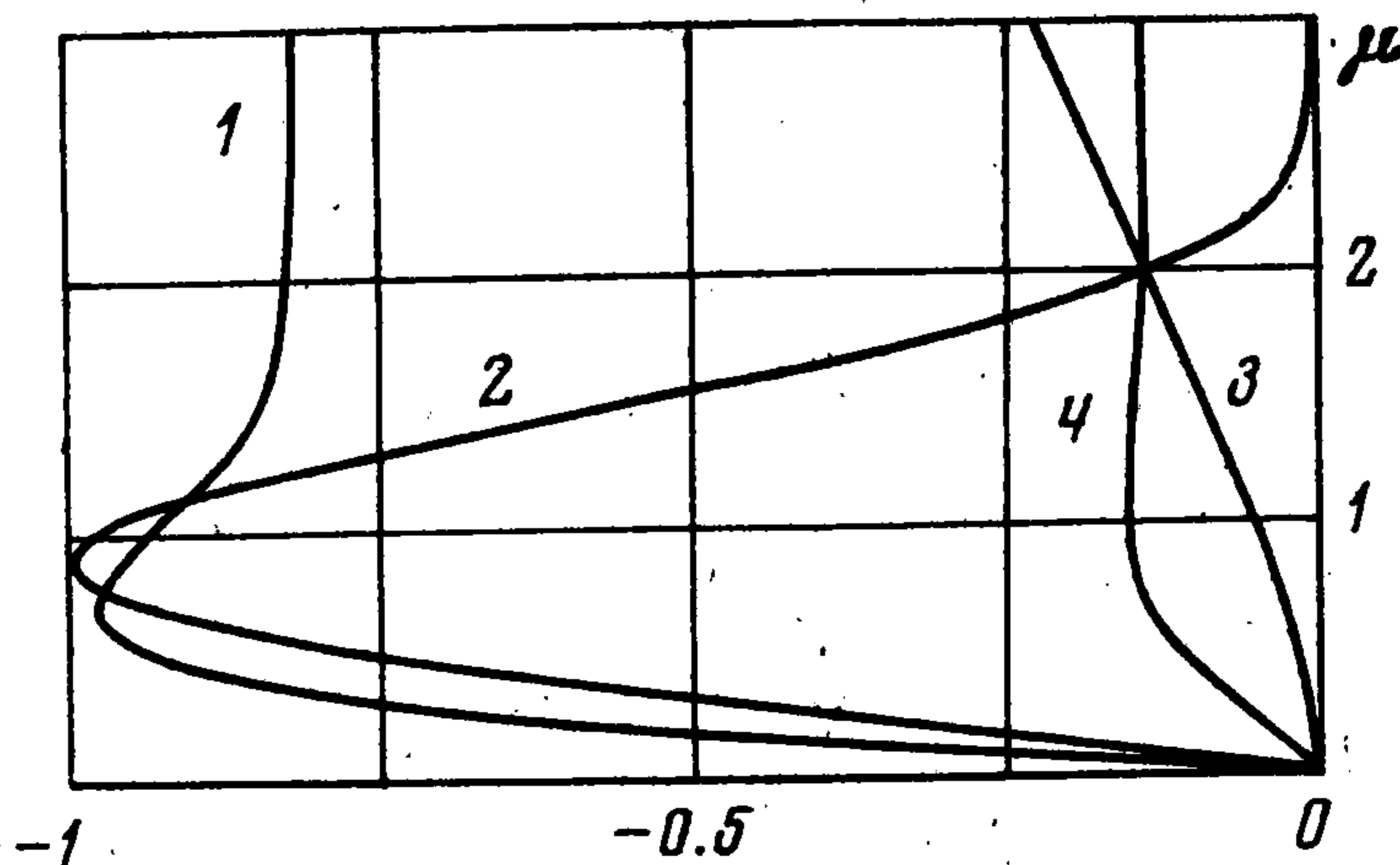
Используя (2.11), (2.13), преобразуем правую часть уравнения (2.7) при $n = 1$

$$(2.20) \quad R_1 - \frac{1}{l_0} G_0' \psi_1 = -\frac{3a_2 v_{b0}}{a_1} \varphi_0'' \psi_{10} + \frac{3m_1 v_{b0}^3}{l_0 m_0 a_1} \varphi_0'' \psi_{11}$$

Решение рассматриваемого уравнения представим в виде

$$(2.21) \quad G_1(y, \mu) = b_1 G_{10}(\mu) - \frac{3a_2 v_{b0}}{a_1} G_{11}(\mu) + \frac{3m_1 v_{b0}^3}{l_0 m_0 a_1} G_{12}(\mu)$$

где функции G_{10} , G_{11} , G_{12} с учетом (2.20) удовлетворяют уравне-



Фиг. 1

ниям с граничными условиями, соответствующими (2.10), (2.2)

$$(2.22) \quad G_{10}'' + \mu^2 G_{10}' - \mu G_{10} = 0; \quad G_{10}(0) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{G_{10}(\mu)}{\mu} = 1$$

$$(2.23) \quad G_{1i}'' + \mu^2 G_{1i}' - \mu G_{1i} = \varphi_0'' \psi_{1, i-1}; \quad G_{1i}(0) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{G_{1i}(\mu)}{\mu} = 0$$

($i = 1, 2$)

Решение задачи (2.22)

$$(2.24) \quad G_{10} = \mu$$

Так как ψ_{10} и ψ_{11} уже найдены, то G_{11} определяется из (2.23) в простых квадратурах

$$G_{11} = \mu \left[\frac{1}{30} - c \int_0^{\mu} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^6}{30} \right) \exp \left(-\frac{t^3}{3} \right) dt \right] + \frac{c}{30} \mu^5 \exp \left(-\frac{\mu^3}{3} \right)$$

а G_{12} — численным интегрированием уравнения (2.25) на отрезке $[0, 6]$, причем условие на бесконечности заменяется условием при $\mu = 6$, где G_{12} практически обращается в нуль. Функция $G_{12} \times 10^2$ представлена на фиг. 1 (кривая 2).

Во втором приближении с помощью (2.13), (2.16), (2.21), (2.24) получим

$$(2.25) \quad Q_2 = -\frac{6m_1 b_1 v_{b0}}{m_0 a_1} \mu \varphi_0' + \frac{l_0 v_{b0}}{m_0 a_1} \frac{da_1}{dy} (2\mu \varphi_0' + \varphi_0) + \\ + \frac{3m_1^2 v_{b0}^4}{l_0 m_0^2 a_1^2} (2\psi_{11}'^2 - 3\psi_{11}\psi_{11}'' - 6\varphi_0' G_{12}) - \\ - \frac{3m_1 a_2 v_{b0}^2}{m_0 a_1^2} \left(2\mu^2 \psi_{11}' - 3\mu \psi_{11} - \frac{\mu^3}{2} \psi_{11}'' - 6\varphi_0' G_{11} \right)$$

Всякое решение уравнения (2.6) при $n = 2$ с правой частью (2.25), удовлетворяющее условию (2.2) (где в силу (1.9) $a_3 = 0$), имеет следующее асимптотическое поведение при больших μ :

$$(2.26) \quad \psi_2(y, \mu) = -\frac{3m_1 a_2 v_{b0}^2}{m_0 a_1^2} \frac{A_{11} \mu^2}{2} + A_2 \mu + \frac{l_0 v_{b0}}{m_0 a_1} \frac{da_1}{dy} \frac{L_0}{4} + \\ + \frac{3m_1^2 v_{b0}^4}{l_0 m_0^2 a_1^2} \frac{A_{11}^2}{2} + o(\mu^{-N}), \quad L_0 = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \varphi_0(\mu) \approx 0.729011'$$

Коэффициент $A_2(y)$ не определяется условием при $\mu \rightarrow \infty$. Представим функцию $\psi_2(y, \mu)$ в виде

$$(2.27) \quad \psi_2(y, \mu) = -\frac{6m_1 b_1 v_{b0}}{m_0 a_1} \psi_{21}(\mu) + \frac{l_0 v_{b1}}{m_0 a_1} \frac{da_0}{dy} \psi_{22}(\mu) - \\ - \frac{3m_1 a_2 v_{b0}^2}{m_0 a_1^2} \psi_{23}(\mu) + \frac{3m_1^2 v_{b0}^4}{l_0 m_0^2 a_1^2} \psi_{24}(\mu)$$

По аналогии с первым приближением $\psi_{2i}(\mu)$ удовлетворяют уравнениям типа (2.6) при $n = 2$ с однородными условиями в нуле: $\psi_{2i}(0) = \psi_{2i}'(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Соответствующие члены (2.25) определяют правые части этих уравнений, а соответствующие члены (2.26) — поведение решения при больших μ . Тогда

$$(2.28) \quad A_2(y) = -\frac{6m_1 b_1 v_{b0}}{m_0 a_1} A_{21} + \frac{l_0 v_{b0}}{m_0 a_1} \frac{da_1}{dy} A_{22} - \\ - \frac{3m_1 a_2 v_{b0}^2}{m_0 a_1^2} A_{23} + \frac{3m_1^2 v_{b0}^4}{l_0 m_0^2 a_1^2} A_{24}$$

где A_{2i} — постоянные коэффициенты при членах порядка μ в асимптотических формулах для ψ_{2i} ($i = 1, 2, 3, 4$) при $\mu \rightarrow \infty$.

Для функций ψ_{21} и ψ_{22} существуют простые квадратурные формулы

$$\psi_{21} = \frac{\mu}{8} \left[\left(\frac{\mu^3}{3} + 1 \right) \varphi_0' + c \int_0^\mu \frac{t^3}{3} \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) dt - 1 \right] \\ \psi_{22} = \frac{1}{4} (\varphi_0 - \mu) + 3\psi_{21}$$

Функции ψ_{23} и ψ_{24} определялись численно тем же способом, что и ψ_{11} . На фиг. 1 представлены функции ψ_{23}' (кривая 3) и $\psi_{24}' \times 10$ (кривая 4); $A_{21} = -1/12$, $A_{22} = -1/2$, $A_{23} = 0.024772$, $A_{24} = -0.014183$.

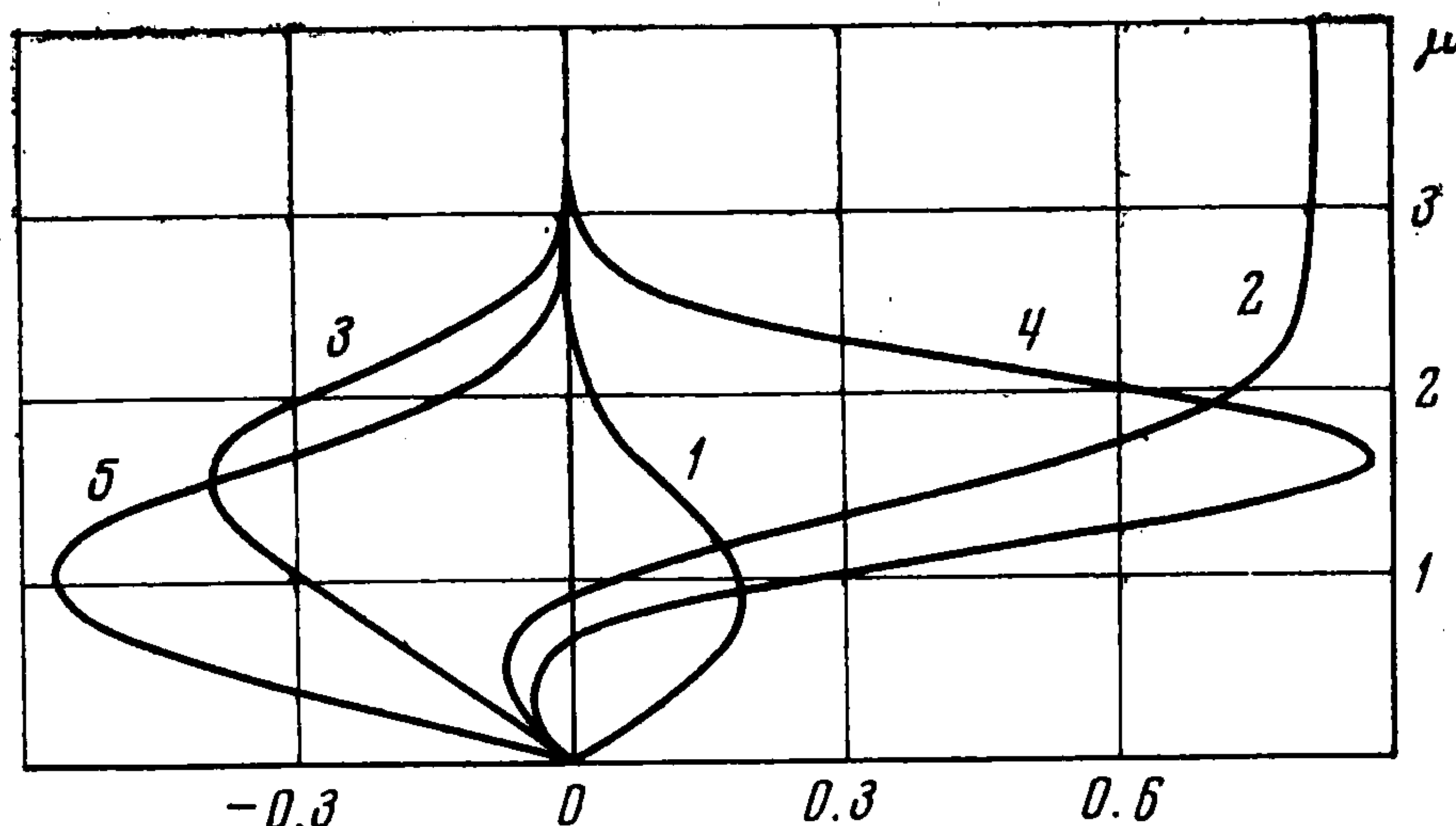
В уравнении (2.7) при $n = 2$ с использованием (1.9)

$$(2.29) \quad R_2 = b_2 + \frac{v_{b0}^2}{3m_0a_1} \frac{da_1}{dy} \varphi_0 \varphi_0'' + \frac{1}{3l_0} (G_1 \psi_1' - 3\psi_1 G_1')$$

Из (2.27), (2.29) можно получить правую часть этого уравнения, вид которой, как и в предыдущих случаях, определяет вид решения

$$(2.30) \quad G_2(y, \mu) = b_2 G_{20}(\mu) + \frac{v_{b0}^2}{3m_0a_1} \frac{da_1}{dy} G_{21}(\mu) + \frac{m_1 b_1 v_{b0}^2}{l_0 m_0 a_1} G_{22}(\mu) - \\ - \frac{a_2^2 v_{b0}}{a_1^2} G_{23}(\mu) + \frac{m_1 a_2 v_{b0}^3}{l_0 m_0 a_1^2} G_{24}(\mu) - \frac{m_1^2 v_{b0}^5}{l_0^2 m_0^2 a_1^2} G_{25}(\mu)$$

Функции G_{2i} удовлетворяют уравнениям типа (2.7) при $n = 2$ с соответствующими правыми частями и граничным условиям в нуле $G_{2i}(0) =$



Фиг. 2

$= 0$ ($i = 0, 1 \dots 5$). Условия при $\mu \rightarrow \infty$ можно получить из асимптотической формулы

$$(2.31) \quad G_2(y, \mu) = b_2 \frac{\mu^2}{2} - \frac{m_1 b_1 v_{b0}^2}{l_0 m_0 a_1} A_{11} + o(\mu^{-N})$$

Решением задачи для G_{20} является $G_{20} = \mu^2/2$.

Результаты численного интегрирования остальных функций приведены на фиг. 2 (кривым 1—5 соответствуют значения функций G_{21} , $G_{22} \times 10$, $G_{23} \times 10$, $G_{24} \times 10^2$, $G_{25} \times 10^2$). Использованный здесь и выше численный метод решения краевых задач представляет собой метод стрельбы [5]. Расчеты проводились на БЭСМ-4. С помощью (2.8), где $S_1 = S_2 \equiv 0$, легко найти функции H_1 и H_2 .

Таким образом, формулы (2.13), (2.21), (2.27), (2.30) дают решения внутренних задач первого и второго приближений в виде линейных комбинаций некоторых «универсальных» функций переменной μ , не зависящих от начальных и граничных условий, а также от формы поверхности и способа ее параметризации. Знание этих функций позволяет в любой конкретной задаче рассматриваемого типа с определенной точностью описать течение в вязком подслое вблизи линии разрыва.

В соответствии с (2.13), (2.27), если $m_1 = da_1/dy \equiv 0$, то в первом и втором приближении влияние разрыва граничных условий на профиль

скорости в направлении x отсутствует. Указанное влияние будет отсутствовать также в высших приближениях, если задний сегмент — цилиндрическая поверхность, а начальные (1.7) и граничные (1.4) условия не зависят от y , так как в этом случае первые два уравнения (1.1) решаются независимо от третьего.

Как следствие (2.5), (2.13), (2.16) на подвижной части поверхности при малых x выполняется соотношение

$$u_z(x, y, 0) = a_1 - \delta \frac{3m_1 k^2 v_{b0}^2}{m_0 a_1} \psi_{11}''(0) + o(\delta), \quad \psi_{11}''(0) = -0.375839$$

Отсюда следует, что поток вблизи стенки разгоняется в направлении x , если задний сегмент представляет собой расширяющуюся поверхность вращения ($m_1 > 0$), и подтормаживается в случае сужающейся поверхности вращения ($m_1 < 0$). Отмеченный факт — естественное следствие влияния центробежных сил на вовлеченные во вращение частицы жидкости.

3. Внешняя задача. Вид внешних разложений функций u , v и w определяется поведением коэффициентов соответствующих внутренних разложений при больших μ . Асимптотические формулы (2.12), (2.26), (2.31) позволяют установить, что во внешней области при малых δ

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u &= u_0(y, z) + \delta^2 u_2(y, z) + \delta^3 u_3(y, z) + o(\delta^3) \\ v &= v_0(y, z) + \delta^2 v_2(y, z) + \delta^3 v_3(y, z) + o(\delta^3) \\ w &= \frac{1}{\delta} w_2(y, z) + w_3(y, z) + o(1) \end{aligned}$$

Подставляя разложения (3.1) в исходные уравнения (1.1) и приравнявая члены одного порядка по δ , получим уравнения для определения функций u_2 , v_2 , w_2 и u_3 , v_3 , w_3 . Они просто интегрируются

$$\begin{aligned} u_2 &= c_2 u_{0z}, \quad v_2 = c_2 v_{0z}, \quad w_2 = -\frac{2c_2}{3l_0} u_0 \\ u_3 &= c_3 u_{0z} + \frac{1}{m_0 u_0} (l_0 m_0 u_{0zz} - l_0 v_0 u_{0y} + m_1 v_0^2 - m_0 p_1) - \\ &\quad - \frac{u_{0z}}{m_0} \int_0^z \theta(y, t) dt \\ v_3 &= c_3 v_{0z} + \frac{1}{m_0 u_0} (l_0 m_0 v_{0zz} - l_0 v_0 v_{0y} - m_1 u_0 v_0 - l_0 p_{0y}) - \\ &\quad - \frac{v_{0z}}{m_0} \int_0^z \theta(y, t) dt \\ w_3 &= -\frac{c_3}{l_0} u_0 + \frac{u_0}{l_0 m_0} \int_0^z \theta(y, t) dt \end{aligned}$$

$$\theta(y, z) = \frac{1}{u_0^2} [l_0 (v_0 u_{0y} - u_0 v_{0y}) - m_1 (u_0^2 + v_0^2) + m_0 p_1 - l_0 m_0 u_{0zz}]$$

Здесь $c_2(y)$ и $c_3(y)$ — произвольные функции, определяемые в процессе сращивания внешних и внутренних разложений.

Хотя знаменатель функции θ имеет порядок z^2 при $z \rightarrow 0$, особенность в нуле отсутствует, так как в силу граничных условий (1.2) и условий согласования (1.9) числитель имеет тот же порядок малости.

В целях сращивания перейдем во внешнем разложении (3.1) к внутренним переменным. С помощью (1.8), (1.9) получим

$$(3.2) \quad u \sim \delta \left(\frac{a_1}{k} \mu + \dots \right) + \delta^2 \left(\frac{a_2}{k^2} \frac{\mu^2}{2} + c_2 a_1 + \dots \right) + \\ + \delta^3 \left(\frac{a_2 c_2}{k} \mu + c_3 a_1 + \dots \right) + \dots$$

Сравнивая представление (3.2) с асимптотическими формулами (2.12), (2.26), можно проверить, что сращивание обеспечивается, если

$$(3.3) \quad c_2 = kA_1/a_1, \quad c_3 = A_2/a_1$$

Коэффициенты A_1 и A_2 задаются формулами (2.19), (2.28). Простой проверкой можно убедиться, что при выполнении (3.3) условия сращивания разложений для функций v и w также удовлетворяются с рассматриваемой точностью.

Влияние вязкого подслоя на течение во внешней области, вообще говоря, приводит к резкому изменению толщины пограничного слоя. В [6] получено общее уравнение, которому удовлетворяет эффективная толщина вытеснения $R^{-1/2} \Delta(x, y)$ в общем случае трехмерного пограничного слоя. В используемых здесь обозначениях

$$(3.4) \quad [h_2 u_e (\Delta - \Delta_1)]_x + [h_1 v_e (\Delta - \Delta_2)]_y = 0 \\ \Delta_1(x, y) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dz, \quad \Delta_2(x, y) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v}{v_e} \right) dz$$

На заднем сегменте с помощью рядов (2.1), (3.1) можно получить разложения функций Δ_1 и Δ_2 при малых x , поэтому решение уравнения (3.4) удобно искать также в виде асимптотического ряда. Ограничиваясь двумя первыми членами, имеем

$$(3.5) \quad \Delta(x, y) = D_0(y) + \delta^2 D_2(y) + o(\delta^2), \quad D_2 = -c_2 = \frac{3m_1 k v_{b0}^2}{m_0 a_1^2} A_{11}$$

где $D_0(y)$ — толщина вытеснения невозмущенного пограничного слоя на линии разрыва. Так как $A_{11} < 0$, то в силу (3.5) при $m_1 > 0$ толщина вытеснения падает по сравнению с толщиной невозмущенного пограничного слоя. Причина этого — центробежные силы, которые, как уже отмечалось, разгоняют поток вдоль x , тем самым способствуя безотрывному обтеканию. При $m_1 < 0$ указанные силы вызывают противоположный эффект, и толщина пограничного слоя возрастает.

Следует также отметить, что коэффициенты внешних разложений u_3, v_3, w_3 содержат слагаемые, вид которых не зависит от решения во внутренней области (такие слагаемые появляются и в последующих членах с интервалом δ^3). Одновременно в асимптотических формулах при $\mu \rightarrow \infty$ для функций F_n и G_n , начиная с $n = 3$, можно

выделить члены, не зависящие от граничных условий на поверхности тела и отличные от определяемых условиями (2.2). Появление этих членов в асимптотических формулах связано с влиянием решения во внешней области на решение в подслое. Они обеспечивают сращивание с указанными выше независимыми слагаемыми во внешних разложениях.

Поступила 31 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mager A.* Thick laminar boundary layer under sudden lateral perturbation. 50 Jahre Grenzschichtforschung. Berlin, Acad.-Verlag, 1956.
2. *Goldstein S.* Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, vol. 26, pt 1.
3. *Нейланд В. Я.* О решении уравнений ламинарного пограничного слоя при произвольных начальных условиях. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
4. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
5. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. т. 1, М., «Наука», 1973.
6. *Moore F. K.* Displacement effect of a three-dimensional boundary layer. NASA Rept, 1953, No. 1124.