

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА
В КАНАЛЕ С ЗАМЫКАЮЩИМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ
ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ОТРАЖЕНИИ
ОТ СЕЧЕНИЯ ВЫХОДА АКУСТИЧЕСКИХ И ЭНТРОПИЙНЫХ ВОЛН**

В. Т. Гринь, А. Н. Крайко, Н. И. Тилляева

(Москва)

Исследуется устойчивость течения невязкого и нетеплопроводного газа в канале с замыкающим скачком уплотнения. Рассматривается случай, когда граничное условие на выходе из канала задается в виде линейной связи между нестационарным возмущением левого инварианта Римана, характеризующего отраженную акустическую волну, и возмущениями правого инварианта Римана и энтропийной функции, которые характеризуют волны, приходящие к сечению выхода со стороны канала. В результате исследования строится область устойчивости в плоскости коэффициентов отражения. Анализ основывается на методе « D -разбиения», который широко применяется в теории автоматического регулирования [1, 2], и на использовании условий устойчивости, полученных в [3] для случая, когда один из коэффициентов отражения равен нулю. Как и в [3], исследование выполнено в «квазицилиндрическом» приближении.

1. Квазицилиндрическое приближение, используемое ниже, впервые было предложено Г. Г. Черным еще в 1953 г. Так как, однако, окончательные соотношения этого приближения, приведенные, например, в [3], не дают достаточно четкого представления об условиях, ограничивающих его справедливость, то остановимся на этом вопросе подробнее.

Рассмотрим течение идеального газа в канале, площадь поперечного сечения которого F — известная функция продольной координаты x , отсчитываемой вдоль оси канала. В дальнейшем исследуется устойчивость стационарного течения, содержащего замыкающий скачок уплотнения, в котором скорость потока меняется от сверхзвуковой (слева от скачка) до дозвуковой. Начало отсчета x совместим со стационарным положением скачка, а за характерную длину примем расстояние от указанного сечения до выхода из канала. В силу этого сечению выхода отвечает $x = 1$. Приведение прочих параметров к безразмерному виду осуществим так же, как и в [3], однако в качестве характерных скорости и плотности возьмем соответствующие критические величины стационарного потока слева от скачка.

Линеаризация уравнений одномерного нестационарного течения осуществляется обычным путем, причем для давления p , плотности ρ и скорости u используются представления вида (t — время)

$$u(x, t) = U(x) [1 + u_n(x, t)]$$

Здесь большой буквой обозначается соответствующая стационарная величина, а индекс n приписан относительному нестационарному возмущению данного параметра.

Ограничиваясь течением совершенного газа с показателем адиабаты κ , после линеаризации уравнений придем к следующей системе:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} D^+R / Dt &= a_{11}R + a_{12}L + a_{13}S \\ D^-L / Dt &= a_{21}R + a_{22}L + a_{23}S, \quad DS / Dt = 0 \\ R &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{p_n}{\kappa M} \right), \quad L = \frac{1}{2} \left(u_n - \frac{p_n}{\kappa M} \right) \\ S &= p_n - \kappa \rho_n, \quad \frac{D^+}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U + A) \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{D^-}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (U - A) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Здесь R , L и S — нестационарные возмущения соответственно правого и левого инвариантов Римана и энтропийной функции; D^+ / Dt , D^- / Dt и D / Dt — операторы дифференцирования вдоль характеристик первого и второго семейств и траекторий частиц; A — стационарное значение скорости звука и $M = U / A$ — число Маха. Коэффициенты a_{ij} определяются формулами

$$(1.2) \quad \begin{aligned} a_{11} &= A \left[\frac{(\kappa - 1)M - 2}{(\kappa - 1)M^2 + 2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) \right] M' \\ a_{12} &= A \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) - \frac{(\kappa - 1)M + 2}{(\kappa - 1)M^2 + 2} \right] M' \\ a_{13} &= a_{23} = \frac{A}{2\kappa} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{-1} M' \\ a_{21} &= a_{11} + AM', \quad a_{22} = a_{12} - AM' \\ M' &= M [2 + (\kappa - 1)M^2] (\ln F)' / 2 (M^2 - 1) \end{aligned}$$

где штрихом обозначены полные производные по x .

Как видно из (1.1), траектории акустических волн, распространяющихся соответственно вниз и вверх по потоку (R - и L -волн), и энтропийных волн (S -волн) даются уравнениями

$$dx / dt = U + A, \quad dx / dt = U - A, \quad dx / dt = U$$

В согласии с этим времена распространения указанных волн от скачка до выхода из канала (или в обратном направлении) равны

$$\tau_R = \int_0^1 \frac{dx}{U + A}, \quad \tau_L = \int_0^1 \frac{dx}{A - U}, \quad \tau_S = \int_0^1 \frac{dx}{U}$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае ($0 < U < A$) имеет место неравенство: $\tau_L > \tau_R$. Если поток перед скачком (а следовательно, и за ним) близок к звуковому ($A \approx U \approx 1$) и $|M'| \ll 1$ всюду на участке $0 \leq x \leq 1$, то $\tau_L \gg 1$, а τ_S и τ_R — величины порядка единицы. В силу формул (1.2) все коэффициенты a_{ij} пропорциональны M' . Поэтому, если максимальная величина $|M'|$ такова, что произведение $|M'| \tau_L \ll 1$, то, как видно из (1.1), относительные приращения инвариантов R и L

при движении R - и L -волн по каналу также будут много меньше единицы. Кроме того, в этом случае относительные изменения величин U , $U + A$ и $U - A$ тоже малы. Последнее обстоятельство позволяет заменить указанные величины их значениями при $x \rightarrow +0$, т. е. справа от замыкающего скачка (величинам при $x \rightarrow +0$ будем приписывать индекс «плюс»). В результате приходим к уравнениям квазицилиндрического приближения

$$(1.3) \quad R(x, t) = R(\xi), \quad L(x, t) = L(\eta), \quad S(x, t) = S(\zeta) \\ \xi = x - (U_+ + A_+)t, \quad \eta = x - (U_+ - A_+)t, \quad \zeta = x - U_+t \\ \tau_R = 1 / (U_+ + A_+), \quad \tau_L = 1 / (A_+ - U_+), \quad \tau_S = 1 / U_+$$

Здесь ξ , η и ζ — характеристические переменные, сохраняющие постоянство на соответствующих характеристиках. Условие справедливости соотношений (1.3) формулируется в виде неравенства

$$(1.4) \quad \tau_L \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ j=1, 2, 3}} |a_{2j}| \ll 1$$

Напомним, что коэффициенты a_{ij} пропорциональны M' , причем коэффициенты пропорциональности — величины порядка единицы. Заметим также, что согласно (1.3), (1.4) и последней формуле (1.2), при стремлении M к единице для справедливости квазицилиндрического приближения производная $(\ln F)'$ должна убывать, как $(1 - M)^2$.

Уравнения (1.3) позволяют связать параметры возмущенного потока в сечении стационарного положения скачка (при $x = 0$) и на выходе из канала при ($x = 1$), где ставятся граничные условия. Граничные условия при $x = 0$ получаются в результате линеаризации соотношений на скачке и имеют вид

$$(1.5) \quad R_+ = \varphi L_+ - \psi Y x_s, \quad S_+ = \varphi' L_+ - \psi' Y x_s \\ x_s \dot{=} \mu L_+ - \beta Y x_s \\ \varphi = \frac{(1 - 2M_+)M_-^2 + 1}{(1 + 2M_+)M_-^2 + 1}, \quad \psi = \frac{[(K - 1)N + E]M_+}{(1 + 2M_+)N + M_+^2} \\ \varphi' = M_+(1 - \varphi)(1 - N)\kappa / N, \quad \psi' = [E - M_+(1 - N)\psi]\kappa / N \\ \mu = \frac{1 - M_+ - (1 + M_+)\varphi}{(U_- - U_+)M_+}, \quad \beta = U_- - \frac{(1 + M_+)\psi}{(U_- - U_+)M_+} \\ K = \frac{U_-}{U_+}, \quad N = M_+^2 M_-^2, \quad E = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M_+^2 - M_-^2) \\ Y = (d \ln F / dx)_{x=0}$$

Здесь $x = x_s(t)$ — траектория скачка, точкой обозначено дифференцирование по t , индекс «минус» приписан параметрам перед скачком. При получении (1.5), как и в [3], предполагается, что со стороны набегающего потока возмущения на замыкающий скачок не приходят. Некоторое отличие в выражениях для коэффициентов (1.5) по сравнению с [3] есть следствие несколько иной формы записи.

На выходе из канала скорость дозвуковая. Поэтому приходящие сюда R - и S -волны могут отражаться в виде L -волн. В соответствии с этим гра-

ничное условие при $x = 1$ запишем в виде

$$(1.6) \quad L = \chi R + \chi' S$$

где χ и χ' — коэффициенты отражения, которые считаются заданными.

2. Формулировка задачи об устойчивости течения в канале, которое описывается уравнениями (1.3) при граничных условиях (1.5) и (1.6), не отличается от данной в [3]. При этом согласно (1.3) и (1.5) полное представление об эволюции течения дает анализ поведения двух функций времени — $x_s(t)$ и $L_+(t)$. Последние определяются системой двух дифференциально-разностных уравнений

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_s'(t) &= \mu L_+(t) - \beta Y x_s(t) \\ L_+(t) &= \varphi_0 L_+(t - \tau) + \varphi_0' L_+(t - \tau') - \\ &\quad - \psi_0 Y x_s(t - \tau) - \psi_0' Y x_s(t - \tau') \\ \varphi_0 &= \chi \varphi, \quad \varphi_0' = \chi' \varphi', \quad \psi_0 = \chi \psi, \quad \psi_0' = \chi' \psi' \\ \tau &= \tau_L + \tau_R, \quad \tau' = \tau_L + \tau_S \end{aligned}$$

Первое из уравнений (2.1) — это третье уравнение из (1.5), переписанное с указанием аргументов, а второе получается из (1.3), (1.5) и (1.6) с учетом отражения различных волн от скачка и от сечения выхода из канала (ср. с [3]).

При $t \rightarrow \infty$ поведение решения системы (2.1) определяется расположением в комплексной плоскости λ корней характеристического уравнения этой системы, которое имеет вид [4]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} H(\lambda) &\equiv (\lambda + \beta Y) (1 - \varphi_0 e^{-\tau \lambda} - \varphi_0' e^{-\tau' \lambda}) + \\ &\quad + \mu Y (\psi_0 e^{-\tau \lambda} + \psi_0' e^{-\tau' \lambda}) = 0 \end{aligned}$$

Чтобы все решения (2.1) были при $t \rightarrow \infty$ ограниченными (т. е. чтобы исходное стационарное течение было устойчиво), достаточно выполнения двух условий [4]: во-первых, действительные части всех корней (2.2) должны быть неположительными и, во-вторых, каждый корень (2.2) с нулевой действительной частью должен быть простым. Первое условие является и необходимым. Расположение корней характеристического уравнения зависит от величины коэффициентов этого уравнения, которые однозначно определяются значениями κ , Y , U_- , и коэффициентов отражения χ и χ' . В случае фиксированного газа (т. е. фиксированного показателя адиабаты κ) и заданной формы канала (а следовательно, и Y) анализ устойчивости сводится к построению поверхности, которая в пространстве $U_- \chi \chi'$ ограничивает область устойчивости. Пересечение указанной поверхности с произвольной плоскостью $U_- = \text{const}$, где $1 < U_- < U_{\max} = \sqrt{(\kappa + 1) / (\kappa - 1)}$, дает границу области устойчивости в плоскости $\chi \chi'$.

При произвольных фиксированных κ , Y и U_- эта граница строилась следующим образом.

Так как число n корней уравнения (2.2) с положительными действительными частями зависит от значений χ и χ' , то разным областям плоскости $\chi \chi'$ отвечает различное n . Если $D(n)$ — соответствующая область плоскости $\chi \chi'$, то область устойчивости совпадает с $D(0)$. Используемый в данной работе метод (метод « D -разбиения») включает построение линий

(«кривых Найквиста»), которые в плоскости $\chi\chi'$ отделяют области $D(n)$ и $D(n+1)$.

При непрерывной зависимости корней λ от параметров χ и χ' уравнение указанных кривых дается соотношением $\operatorname{Re} \lambda = 0$, а их построение осуществляется следующим образом [1, 2]. Подставим в (2.2) $\lambda = i\omega$, где ω — действительное число, и запишем $H(i\omega)$ в форме: $H(i\omega) = F(\omega) + iG(\omega)$. Приравняв нулю функции $F(\omega)$ и $G(\omega)$ и найдя из получившихся в результате этого линейных относительно χ и χ' уравнений коэффициенты отражения как функции ω , придем к параметрическому представлению искомых кривых: $\chi = \chi(\omega)$, $\chi' = \chi'(\omega)$, причем функции, стоящие справа, известны, а ω меняется от 0 до ∞ . Если $\Delta(\omega)$ — определитель коэффициентов при χ и χ' , а $A(\omega)$ и $A'(\omega)$ — определители, получающиеся из $\Delta(\omega)$ заменой одного из столбцов столбцом свободных членов, то

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \chi(\omega) &= A(\omega) / \Delta(\omega), & \chi'(\omega) &= A'(\omega) / \Delta(\omega) \\ \Delta(\omega) &= (Y^2 Q Q' + \omega^2 \varphi \varphi') \sin \alpha \omega + Y \omega (Q \varphi' - Q' \varphi) \cos \alpha \omega \\ A(\omega) &= (\omega^2 \varphi' - Y^2 \beta Q') \sin \tau' \omega - Y \omega (Q' + \beta \varphi') \cos \tau' \omega \\ A'(\omega) &= (Y^2 \beta Q - \omega^2 \varphi) \sin \tau \omega + Y \omega (Q + \beta \varphi) \cos \tau \omega \\ Q &= \mu \psi - \beta \varphi, & Q' &= \mu \psi' - \beta \varphi', & \alpha &= \tau' - \tau \end{aligned}$$

При $\omega = 0$ определители Δ , A и A' обращаются в нуль, и вместо (2.3) получаем «особую прямую» [1, 2]

$$(2.4) \quad \chi Q + \chi' Q' + \beta = 0$$

которая также является кривой Найквиста.

Численное построение кривых Найквиста невозможно реализовать во всем диапазоне «частот» $0 < \omega < \infty$. Поэтому необходимо знать область устойчивости «упрощенного» характеристического уравнения

$$(2.5) \quad \chi \varphi e^{-\tau \lambda} + \chi' \varphi' e^{-\tau' \lambda} = 1$$

которое получается из (2.2) при $|\lambda| \gg 1$.

Покажем, что в качестве области устойчивости уравнения (2.5) следует брать ромб

$$(2.6) \quad |\chi \varphi \pm \chi' \varphi'| < 1$$

Прежде всего из (2.5) следует, что $\operatorname{Re} \lambda < 0$ на диагоналях ромба (2.6), т. е. при $|\chi \varphi| < 1$, $\chi' = 0$ и при $|\chi' \varphi'| < 1$, $\chi = 0$. На остальных частях осей χ и χ' , напротив, $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Далее можно показать, что кривые Найквиста характеристического уравнения (2.5) при любых τ и τ' не попадают в указанный ромб. Из сказанного ясно, что область устойчивости уравнения (2.5) во всяком случае не меньше ромба (2.6). В то же время для рациональных τ'/τ можно привести примеры, которые показывают, что в соответствующих случаях область устойчивости больше ромба (2.6). Например, при $\tau'/\tau = 1$ такой областью является вся полоса $|\chi \varphi + \chi' \varphi'| < 1$, включающая данный ромб. В противоположность этому для иррациональных τ'/τ область устойчивости совпадает с ромбом (2.6). Докажем это, причем, как и в [5], будем использовать теорему Кронекера [6].

Итак, пусть τ'/τ иррационально. Перепишем (2.5) в форме

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \zeta_1 &= (1 - b \zeta_2) / a, & a &= |\chi \varphi| e^{-\tau \sigma}, & b &= |\chi' \varphi'| e^{-\tau' \sigma}, & \zeta_1 &= e^{-i \theta_1} \\ \zeta_2 &= e^{-i \theta_2}, & \theta_1 &= \tau \omega - \arg(\chi \varphi) + 2\pi n, & \theta_2 &= \tau' \omega - \arg(\chi' \varphi') + \\ & & & + 2\pi m & (\sigma = \operatorname{Re} \lambda, \omega = \operatorname{Im} \lambda) \end{aligned}$$

где n и m — целые числа или нуль.

Требуется найти корни уравнения (2.7), т. е. пары значений σ и ω , которые удовлетворяют этому уравнению или двум эквивалентным ему действительным соотношениям

$$(2.8) \quad 1 = R(\sigma, \nu) \equiv |1 - 2b\nu + b^2| / a \\ \theta_1 = \arg [(1 - b\zeta_2) / a] \quad (\nu = \cos \theta_2)$$

Возьмем произвольное ν из интервала $-1 \leq \nu \leq 1$ и найдем отвечающие ему $\theta_{2\nu}$ и $\zeta_{2\nu}$, а затем из (2.8) — σ_ν и $\theta_{1\nu}$. При этом будут удовлетворены все вытекающие из (2.5) соотношения, кроме двух последних равенств из (2.7). При иррациональном τ' / τ эти равенства также могут быть удовлетворены с какой угодно степенью точности за счет выбора ω , n и m . Данное утверждение следует из теоремы Кронекера [6], в силу которой для любого сколь угодно малого δ неравенства

$$(2.9) \quad |\tau\omega - \theta_1^\circ + 2\pi n| < \delta, \quad |\tau'\omega - \theta_2^\circ + 2\pi m| < \delta \\ \theta_1^\circ = \theta_{1\nu} + \arg(\chi\varphi), \quad \theta_2^\circ = \theta_{2\nu} + \arg(\chi'\varphi')$$

при иррациональном τ' / τ имеют совместные действительные решения. Подчеркнем, что для рациональных τ' / τ неравенствам (2.9) при произвольном ν в общем случае удовлетворить нельзя.

Возьмем теперь некоторое ω_ν , удовлетворяющее указанным неравенствам, и для него введем $\varepsilon_{i\nu}$, такие, что

$$(2.10) \quad \varepsilon_{1\nu} = \tau\omega_\nu - \theta_1^\circ + 2\pi n, \quad \varepsilon_{2\nu} = \tau'\omega_\nu - \theta_2^\circ + 2\pi m$$

где n и m — целые числа, обеспечивающие вместе с выбором ω выполнение неравенств (2.9). Согласно этому $|\varepsilon_{i\nu}| < \delta$. Множество корней σ_ν и ω_ν за счет произвола в выборе ν в (2.8) может быть только шире множества корней (2.7).

Докажем, что на самом деле σ_ν и ω_ν , определенные согласно описанной выше процедуре, как угодно близки к действительной и мнимой частям некоторого корня (2.5) или (2.7), и, следовательно, неравенство $\sigma_\nu^* \leq 0$ при $-1 \leq \nu \leq 1$ эквивалентно условию неположительности действительных частей всех корней характеристического уравнения (2.5) или (2.7). Для доказательства этого представим корни (2.5) в виде

$$(2.11) \quad \lambda = \sigma_\nu + \Delta\sigma + i(\omega_\nu + \Delta\omega)$$

Подставив (2.11) в (2.5), проведя разложения по $\Delta\sigma$ и $\Delta\omega$ в предположении их малости и учитывая, что σ_ν и ω_ν удовлетворяют неравенствам (2.8) и (2.10), придем к двум линейным уравнениям для определения $\Delta\sigma$ и $\Delta\omega$. В правых частях этих уравнений стоят линейные комбинации $\varepsilon_{i\nu}$. Отсюда следует, что $|\Delta\sigma| < k_1\delta$ и $|\Delta\omega| < k_2\delta$, где k_i — некоторые константы ($k_i < \infty$). Таким образом, справедливость утверждения доказана.

Получим условия, при которых все σ_ν , а следовательно, в силу доказанного выше, — действительные части всех корней уравнения (2.5), неположительны. Для этого рассмотрим функцию $R(\sigma, \nu)$ из (2.8). Нетрудно показать, что $\partial R / \partial \nu < 0$. Поэтому при $-1 \leq \nu \leq 1$ кривые $R(\sigma, \nu)$ лежат в верхней полуплоскости внутри полосы, ограниченной кривыми $R(\sigma, 1)$ и $R(\sigma, -1)$, причем первая из них для всех σ расположена под второй и обращается в нуль при $\sigma = \sigma_0 = (\ln |\chi'\varphi'|) / \tau$. С ростом σ на обеих ветвях этой кривой R монотонно возрастает. При $|\sigma| \rightarrow \infty$ для всех кривых $R = R(\sigma, \nu) \rightarrow \infty$. В силу доказанного выше корням характеристического уравнения отвечают все точки, принадлежащие пересечению указанной полосы с прямой $R = 1$. Все реализующиеся при этом ситуации изображены на фиг. 1, где сплошной линией показано положение оси OR в случае устойчивого течения, а пунктиром — в случае неустойчивого. Согласно этому условия устойчивости (неположительности σ_ν) состоят в одновременном выполнении двух неравенств

$$\tau'\sigma_0 \equiv \ln |\chi'\varphi'| < 0, \quad R(0, 1) \equiv (1 - |\chi'\varphi'|) / |\chi\varphi| \geq 0$$

которые эквивалентны (2.6).

Подведем итог. Граница области устойчивости для упрощенного характеристического уравнения (2.5) имеет структуру, нерегулярную по τ' / τ или, что то же, по U_- . При иррациональных τ' / τ область устойчивости совпадает с ромбом (2.6). Если отношение $\tau' / \tau = p / q$ рационально (p / q — несократимая дробь), то в зависимости от значений p и q те или иные участки границы области устойчивости в общем случае не совпадают со сторонами этого ромба, располагаясь вне его. Не вдаваясь в дальнейшее обсуждение данной ситуации, отметим, что во всех таких случаях область устойчивости естественно (с учетом постановки любой реальной задачи и возможности «неконтролируемого» изменения ее определяющих параметров) брать минимальной. В исследуемом случае это дает ромб (2.6).

Построение кривых Найквиста вместе с результатами, справедливыми при $|\lambda| \gg 1$, не дает полной информации о расположении области $D(0)$, т. е. области устойчивости исходного характеристического уравнения (2.2).

Такую информацию дают условия устойчивости, полученные в [3] для случаев, когда от сечения $x = 1$ отражается лишь одна из приходящих к нему волн. Если, например, $\chi' = 0$, то эти условия состоят в одновременном выполнении неравенств

$$(2.12) \quad |\varphi_0| < 1, \quad p < 1 - \varphi_0, \quad p < -q < \sqrt{\alpha^2 (1 - \varphi_0^2) + p^2}$$

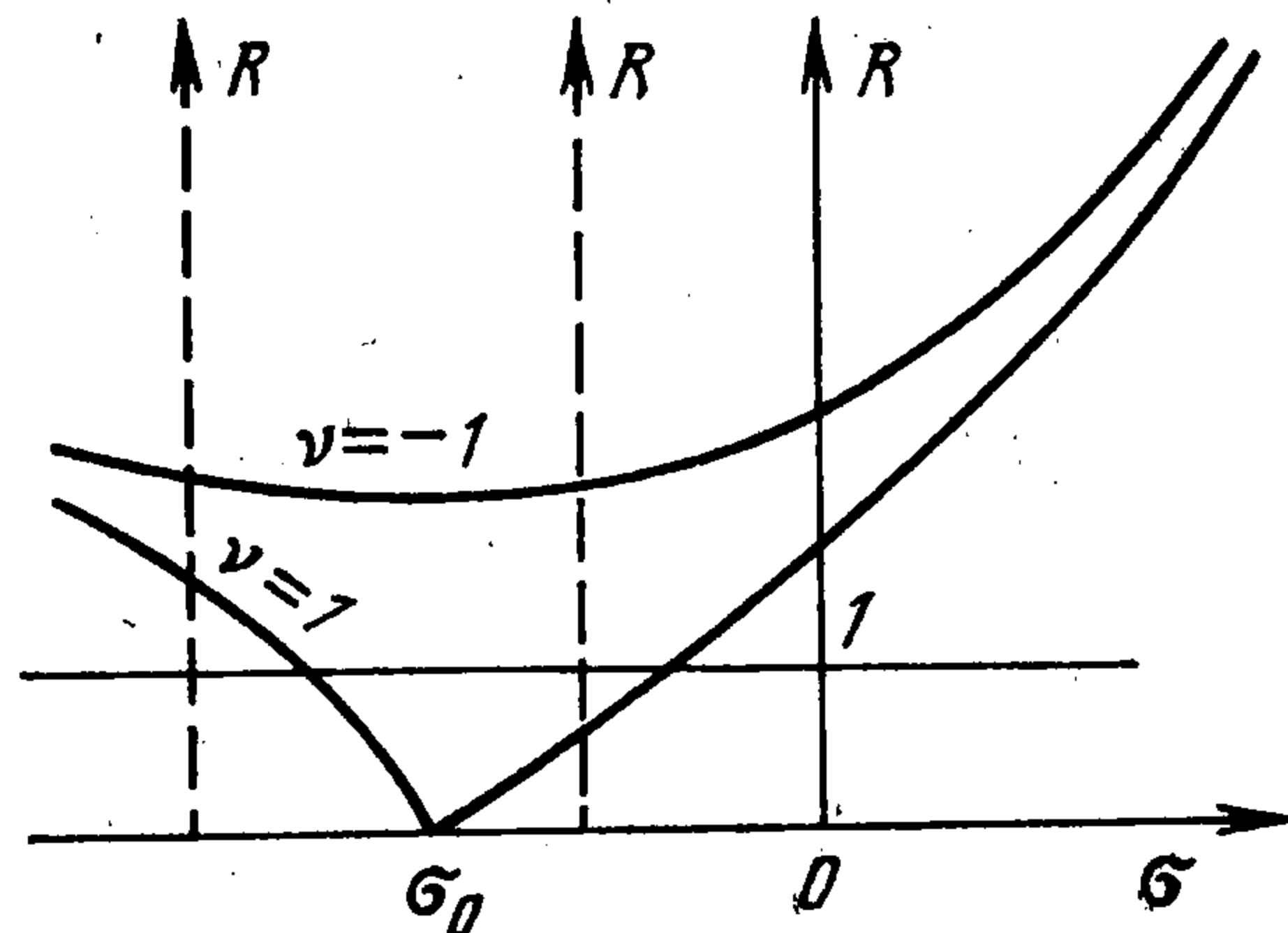
$$(p = -\tau\beta Y, \quad q = \tau Y (\beta\varphi_0 - \mu\psi_0))$$

Здесь при $p \neq 0$ под α понимается корень уравнения $\sin \alpha / (\cos \alpha - \varphi_0) = \alpha / p$, а при $p = 0$ полагается $\alpha = \arccos \varphi_0$. В обоих случаях берется значение α из интервала $0 < \alpha < \pi$.

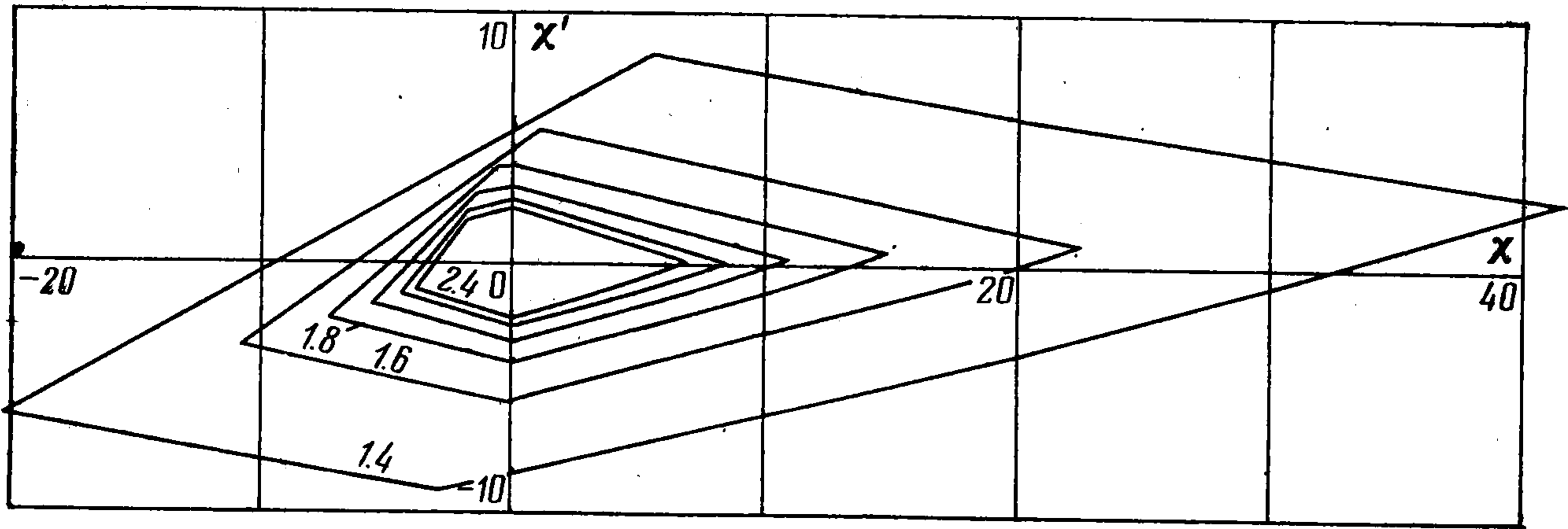
Условия (2.12) и их аналог для $\chi = 0$ позволяют для любого Y построить области устойчивости уравнения (2.2) в плоскостях $U-\chi$ и $U-\chi'$, как это сделано в [3] (по недосмотру авторов штрихпунктирные кривые на фиг. 2 и 3 из [3] изображены неверно, что, однако, не повлияло на остальные результаты указанной работы). После этого построение границ области устойчивости в плоскости $\chi\chi'$ сводится к нахождению минимальной области, которая не пересекается кривыми Найквиста (2.3) и (2.4), лежит внутри ромба (2.6) и включает отрезки осей χ и χ' , которые, согласно (2.12) или аналогичным неравенствам для $\chi = 0$, отвечают устойчивым режимам.

3. В качестве примеров построения областей устойчивости с использованием описанного выше подхода были выполнены расчеты течения газа в расширяющемся канале при $\kappa = 1.4$. Некоторые из полученных результатов представлены на фиг. 2 и 3.

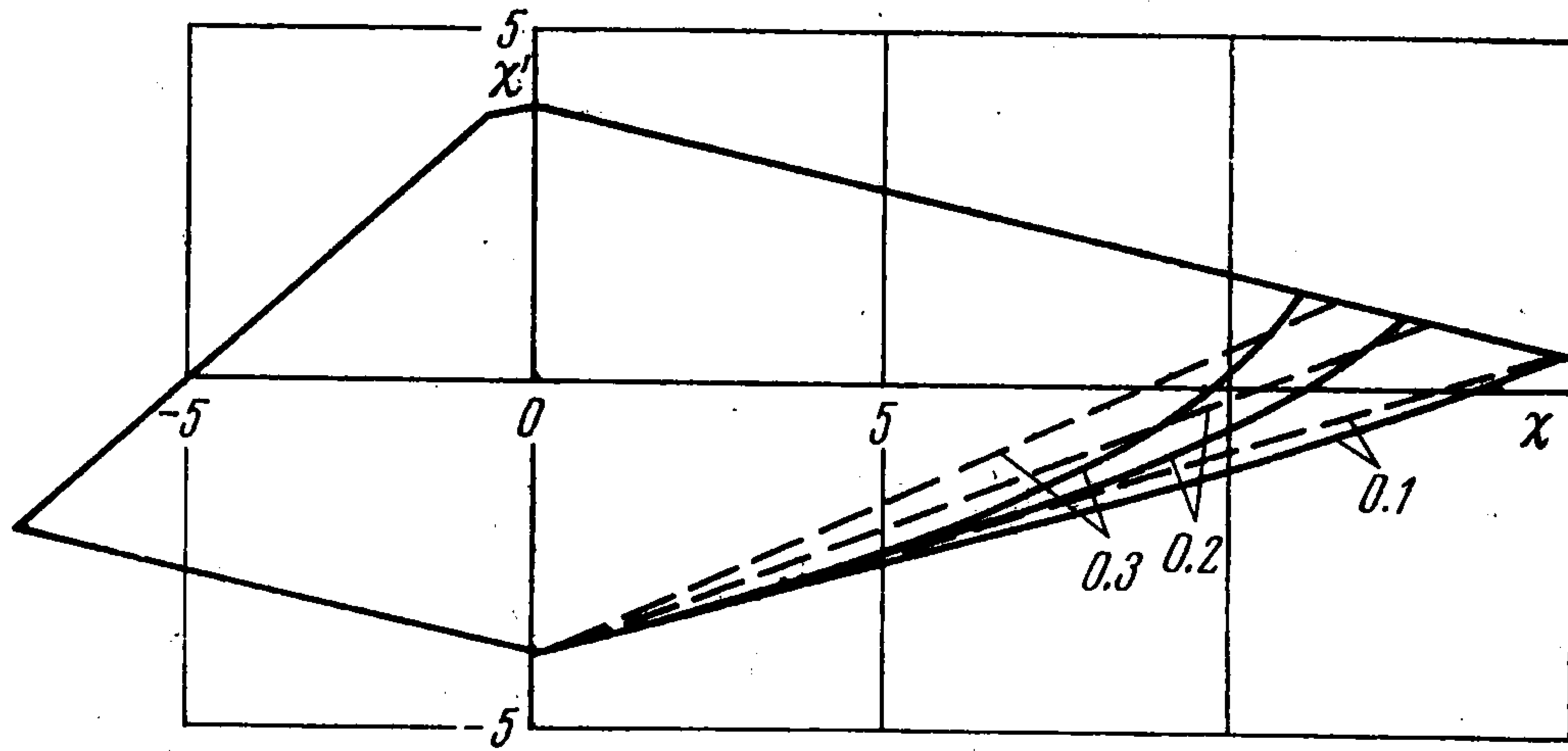
На фиг. 2 для $Y = 0.1$ нанесены границы области устойчивости в плоскости $\chi\chi'$ при различных U_- , т. е. сечения плоскостями $U_- = \text{const}$ поверхности, которая ограничивает область устойчивости в пространстве $U-\chi\chi'$. Скорость потока перед скачком U_- , значения которой даны цифрами около некоторых из кривых, изменялась от 1.4 до 2.4 через 0.2. Течение устойчиво при χ и χ' , отечающих точкам внутри соответствующего многоугольника, и неустойчиво для точек вне его. Фиг. 2 и аналогичные фигуры, построенные для других значений определяющих параметров, позволяют решать



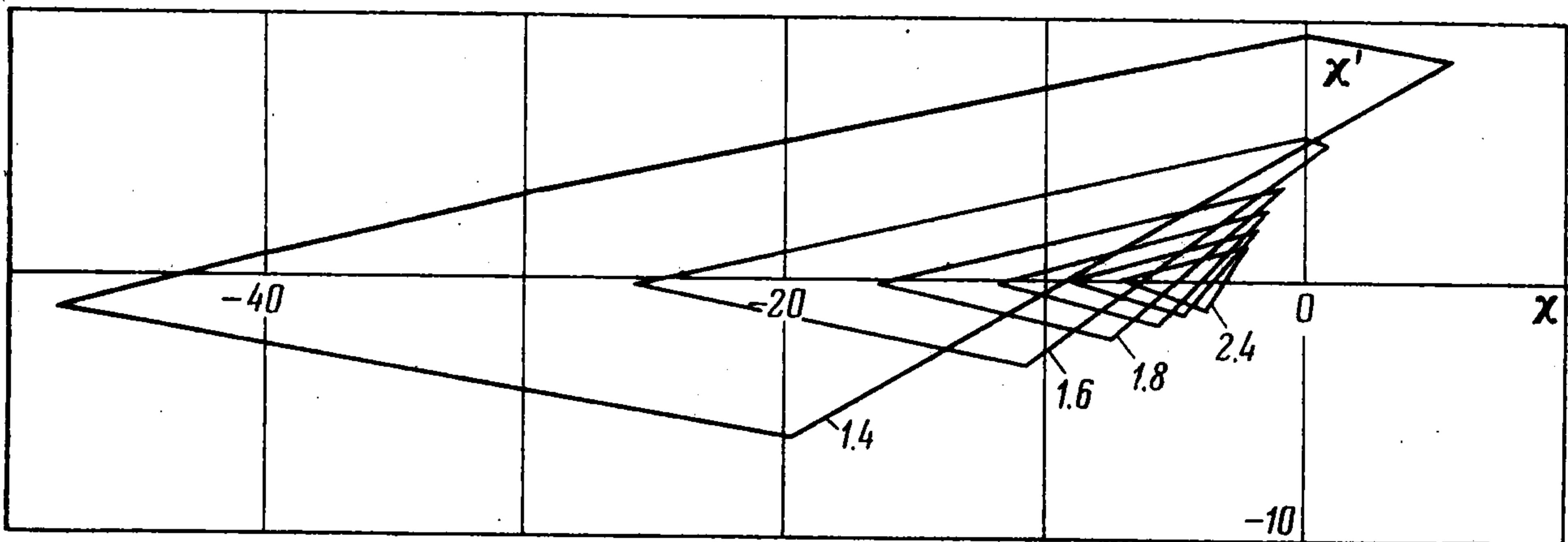
Фиг. 1



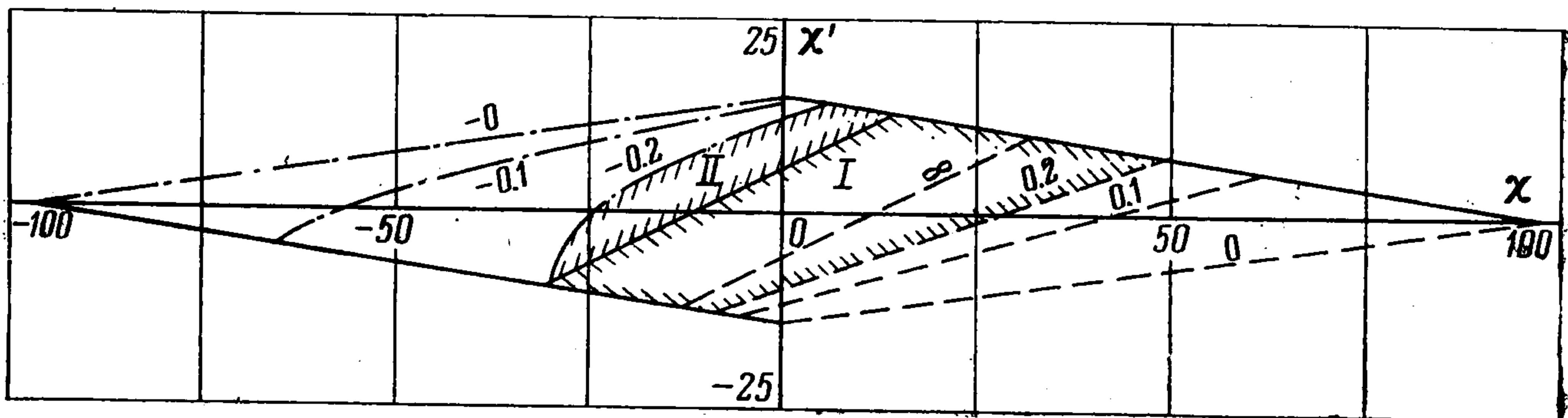
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

вопрос об устойчивости или неустойчивости течения при любых конкретных величинах коэффициентов отражения. В частности, были рассмотрены χ и χ' , которые получаются из условия постоянства числа Маха и условия постоянства расхода при $x = 1$. Значения χ и χ' , найденные из первого условия, во всех случаях обеспечивают устойчивое течение в канале. В то же время требование постоянства расхода дает величины χ и χ' , которые располагаются вблизи границы области устойчивости, оказываясь (в зависимости от значений U_-) как внутри, так и вне ее.

Влияние формы канала (в данном приближении — величины Y) на конфигурацию области устойчивости показано на фиг. 3 сплошными кривыми ($U_- = 1.8$, цифры около кривых — значения Y). Видно, что изменение Y оказывает воздействие на форму только одной из пяти границ многоугольника. Остальные участки границы в рассматриваемом примере совпадают либо с особой прямой (2.4), либо с границами ромба (2.6) и от Y не зависят. Отметим, что с уменьшением U_- положение меняется. Так, при $U_- = 1.1$ изменение Y приводит к деформации всех границ кроме верхней — левой, которая образована особой прямой (2.4).

4. Согласно определениям τ и τ' и (1.3) $\tau'/\tau = (1 + M_+)/2M_+$. Данное отношение равно единице при $U_- = 1$ и монотонно возрастает с ростом U_- , достигая для $\kappa = 1.4$ величины 1.82 при $U_- = U_{\max}$. Введем $\tau^\circ = (\tau + \tau')/2$. При $\kappa = 1.4$ отличие отношений τ/τ° и τ'/τ° от единицы не превышает по абсолютной величине 0.3. Поэтому естественно ожидать, что замена в полном характеристическом уравнении (2.2) τ и τ' на τ° не вызовет существенной деформации тех участков границ области устойчивости, которые в методе « D -разбиения» определяются умеренными значениями ω . Что же касается $\omega \gg 1$, для которых подобное упрощение незаконно (действительно, такая замена эквивалентна пренебрежению произведением $(\tau - \tau')\omega$ по сравнению с единицей), то здесь справедливы результаты, опирающиеся на анализ упрощенного характеристического уравнения (2.5).

Согласно сказанному, положив в (2.2) $\tau = \tau^\circ$ и $\tau' = \tau^\circ$, придем к характеристическому уравнению с одним запаздыванием

$$(4.1) \quad (\lambda + \beta Y)(1 - \varphi^\circ e^{-\tau^\circ \lambda}) + \mu Y \psi^\circ e^{-\tau^\circ \lambda} = 0$$

$$(\varphi^\circ = \chi\varphi + \chi'\varphi', \quad \psi^\circ = \chi\psi + \chi'\psi')$$

Данное уравнение, отличаясь от рассмотренного в [3] только обозначениями, допускает использование условий типа (2.12) без построения кривых Найквиста. При этом область устойчивости получается как пересечение области устойчивости уравнения (4.1) и ромба (2.6).

Не вдаваясь в подробности вычислений, приведем сравнение результатов такого приближенного подхода с результатами метода, описанного в п. 1—3, а также некоторые примеры расчетов.

Эффективность приближенного подхода достаточно хорошо видна из рассмотрения фиг. 3. Здесь в дополнение к сказанному ранее штрихами приведены границы области устойчивости, полученные из приближенной теории, причем штриховые участки нанесены только там, где они отличаются от сплошных. Видно весьма хорошее согласование результатов обоих подходов. С уменьшением U_- различие оказывается еще меньшим, а с ростом U_- несколько (хотя и незначительно) возрастает. Проведенное сравнение служит достаточно хорошим обоснованием использования при-

ближенного подхода. Некоторые результаты, полученные с его помощью, приведены на фиг. 4 и 5.

На фиг. 4, которая построена по тому же принципу, что и фиг. 2, изображены границы области устойчивости для сужающегося канала ($Y = -0.1$). На фиг. 5 для $U_- = 1.3$ области устойчивости построены как для расширяющихся ($Y > 0$), так и для сужающихся ($Y < 0$) каналов. Две стороны ромба (2.6) и отрезок особой прямой, которые образуют участки границ областей устойчивости, не зависящие от величины Y , нанесены сплошными линиями. Участки границ, форма которых зависит от величины Y , нанесены штриховыми и штрихпунктирными линиями. Штриховые линии относятся к расширяющимся, а штрихпунктирные — к сужающимся каналам. Около этих линий приведены соответствующие им значения Y . Кроме того, на фиг. 5 изнутри заштрихованы области устойчивости для двух каналов: расширяющегося с $Y = 0.2$ (область I) и сужающегося с $Y = -0.2$ (область II). Для более полного представления о зависимости формы границ области устойчивости от Y на той же фигуре изображены соответствующие границы для $Y = \infty$. В этом случае все они — отрезки прямых, причем граница, нанесенная штриховой линией, параллельна особой прямой.

В заключение авторы выражают признательность В. А. Паниной и Л. П. Фроловой за помощь в работе и А. Г. Куликовскому — за полезные обсуждения.

Поступила 13 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Раусса-Гурвица для полиномов и целых функций. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 26, М., Изд-во АН СССР, 1949.
2. Айзерман М. А. Лекции по теории автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1956.
3. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Исследование устойчивости течения идеального газа в квазицилиндрическом канале. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
4. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М., «Мир», 1967.
5. Галин Г. Я., Куликовский А. Г. Об устойчивости течений, возникающих при распадении произвольного разрыва. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
6. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953.