

## ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ СКАЧКИ В ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКЕ

В. В. Гогосов, В. М. Коровин, В. А. Полянский  
Г. А. Шапошникова

(Москва)

В связи с задачей о структуре ударной волны исследуются одномерные стационарные электрогидродинамические течения среды с учетом эффектов теплопроводности, когда эффектами вязкости можно пренебречь. Поведение интегральных кривых уравнений, описывающих такое течение, исследуется в плоскостях скорость — электрическое поле  $uE$  и скорость — температура  $uT$ . Выписаны условия, при которых существует непрерывная структура ударной волны, обусловленная механизмом теплопроводности. Показано, что возможна ситуация, когда ударная волна имеет структуру с изотермическим скачком, в то время как непрерывного течения внутри структуры построить нельзя. Выписаны условия, при которых такие случаи могут быть реализованы. Электрическое поле при этом, в зависимости от условий перед фронтом волны, может быть либо постоянным, либо переменным. В последнем случае указаны соотношения, позволяющие найти поле за фронтом волны.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение в электрическом поле вязкого теплопроводного газа с положительным объемным зарядом  $q > 0$ . Выберем систему координат так, чтобы ось  $x$  была направлена вниз по потоку. Будем считать, что все величины зависят только от  $x$  и что скорость газа, электрическое поле и плотность электрического тока имеют составляющие лишь вдоль оси  $x$ . Обозначим эти величины соответственно  $u$ ,  $E$ ,  $j$ . В приближении электрогидродинамики рассматриваемое течение описывается следующей системой уравнений [1]:

$$(1.1) \quad \rho^* u^* = m, \quad p^* = \rho^* R T^*, \quad \rho^* u^{*2} + p^* - \frac{E^{*2}}{8\pi} = \Pi^*$$

$$\lambda \frac{dT^*}{dx} = \rho^* u^* \left( c_p T^* + \frac{1}{2} u^{*2} \right) + j(\varphi^* - \varphi_1^*) - \Sigma^*$$

$$\frac{d\varphi^*}{dx} = -E^*, \quad \frac{dE^*}{dx} = 4\pi q^*, \quad q^*(u^* + bE^*) = j$$

Здесь  $m$ ,  $\Sigma^*$ ,  $\Pi^*$ ,  $j$  — постоянные интегрирования, определяемые параметрами течения в некоторой точке  $x_1 = x_1$ . Значения параметров в точке  $x_1$  отмечаются индексом 1.

Исследование структуры электрогидродинамических ударных волн с учетом механизма теплопроводности будем проводить в постановке работ [2, 3]. Рассматриваемое электрогидродинамическое течение при  $q^* \neq 0$  всюду неоднородное. Предполагается, что в области течения существует зона  $\Gamma^* = \{x_2 \leq x \leq x_3\}$  больших градиентов некоторых параметров потока по сравнению с градиентами вне этой зоны.

Введем величины, имеющие размерность длины:  $l = \lambda / (c_p \rho_1^* u_1^*)$ ,  $L = u_1^{*2} / (4\pi b |j|)$ , и перейдем к безразмерным переменным

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_1^*}, \quad u = \frac{u^*}{u_1^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_1^*}, \quad E = \frac{bE^*}{u_1^*}, \quad q = \frac{q^* u_1^*}{|j|}, \quad \varphi = \frac{b\varphi^*}{L u_1^*}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad M_1 = \frac{u_1^*}{(\gamma R T_1^*)^{1/2}}, \quad S = \frac{1}{8\pi \rho_1^* b^2}$$

$$J = \frac{j}{|j|}, \quad \varepsilon = \frac{l}{L}, \quad \zeta = \frac{x}{L}$$

Если коэффициенты теплопроводности  $\lambda$  и подвижности  $b$  постоянны, то в этих переменных система уравнений (1.1) принимает вид

$$(1.2) \quad \rho u = 1, \quad u + \frac{1}{\gamma M_1^2} \frac{T}{u} - S E^2 = \Pi$$

$$(1.3) \quad \frac{\varepsilon}{(\gamma - 1) M_1^2} \frac{dT}{d\zeta} = \frac{1}{(\gamma - 1) M_1^2} T + \frac{1}{2} u^2 + 2S J (\varphi - \varphi_1) - \Sigma$$

$$(1.4) \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} = -E, \quad \frac{dE}{d\zeta} = q, \quad q = \frac{J}{u + E}$$

$$\Pi = 1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} - S E_1^2, \quad \Sigma = \frac{1}{(\gamma - 1) M_1^2} + \frac{1}{2} - \alpha,$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{(\gamma - 1) M_1^2} \frac{dT}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_1}$$

Установим физический смысл величин  $l$  и  $L$ , имеющих размерность длины. Коэффициент теплопроводности  $\lambda \sim R p_1^* \tau$  [1], где  $\tau$  — время свободного пробега частиц газа. Пусть  $l_*$  — длина свободного пробега,  $u_t$  — средняя тепловая скорость частиц,  $u_t \sim (RT^*)^{1/2}$ . Тогда

$$l \sim \tau R T_1^* / u_1^* \sim l_* u_t / u_1^* \lesssim l_*$$

Следовательно, длина  $l$  имеет порядок длины свободного пробега частиц газа. Выражение для длины  $L$  можно переписать в виде  $L = E_0 / (4\pi q_0)$ , где  $E_0 = u_1^* / b$ ,  $q_0 = |j| / u_1^*$ . Величины  $E_0$  и  $q_0$  использовались при обезразмеривании уравнений в качестве характерных напряженностей электрического поля и плотности заряда. Из шестого уравнения (1.1) видно, что длина  $L$  порядка длины, на которой заряд  $q_0$  создает поле  $E_0$ . Иначе говоря, в качестве характерной длины  $L$  при обезразмеривании независимой переменной  $x$  принят характерный размер неоднородности в области течения вне зоны больших градиентов.

Будем считать, что отношение длин  $l / L = \varepsilon \ll 1$ . Кроме того, пусть параметр взаимодействия  $S$  произволен, безразмерное поле  $E_1 \ll \varepsilon^{-1}$ , число Маха  $M_1 > 1$ .

Ниже из качественного анализа интегральных кривых системы (1.2) — (1.4) будет видно, что зона больших градиентов  $\Gamma \{ \zeta_2 \leq \zeta \leq \zeta_3 \}$  (зона структуры ударной волны) имеет длину порядка  $\varepsilon$ . Выберем точки  $\zeta_1$  и  $\zeta_4$  вне зоны  $\Gamma$  вблизи соответственно точек  $\zeta_2$  и  $\zeta_3$ . Из первого уравнения (1.4) имеем  $\varphi(\zeta_4) - \varphi(\zeta_1) \approx \Delta \zeta E_1 \sim \varepsilon E_1 \ll 1$ , т. е. изменение потенциала в области структуры волны мало, так что предпоследним членом в правой части уравнения (1.3) можно пренебречь. Введем обозначения

$$L_1(u, E) = u + E, \quad L_2(u, E, \alpha) = \frac{\gamma + 1}{2} u + \frac{(\gamma - 1) \Sigma}{u} - \gamma (\Pi + S E^2)$$

$$L_3(u, E, \bar{\alpha}, \varepsilon) = \left( \frac{1}{\gamma} L_1 L_2 + 2\varepsilon J S E \right) u, \quad L_4(u, E) = \Pi + S E^2 - 2u$$

С учетом второго уравнения (1.2) уравнение (1.3) принимает вид

$$(1.5) \quad \frac{\varepsilon}{M_1^2} \frac{dT}{d\xi} = -uL_2$$

**2. Структура ударной волны, обусловленная механизмом теплопроводности.** Исследуем поведение интегральных кривых уравнений (1.2)—(1.4) в области  $u > 0$  на плоскости  $uE$ . Покажем, что в рамках модели среды, описываемой системой (1.1), при определенных условиях должен возникать изотермический скачок.

Из второго уравнения (1.2) имеем

$$(2.1) \quad \frac{dT}{d\xi} = \gamma M_1^2 \left( L_4 \frac{du}{d\xi} + 2SuE \frac{dE}{d\xi} \right)$$

Из выражений (1.5), (2.1) следует, что в точках плоскости  $uE$ , где  $L_4 \neq 0$ , выполняется соотношение

$$(2.2) \quad \varepsilon \frac{du}{d\xi} = -\frac{L_3}{L_1 L_4}$$

Пользуясь (2.2) и двумя последними уравнениями (1.4), получим

$$(2.3) \quad \frac{dE}{du} = -\varepsilon J \frac{L_4}{L_3}$$

Рассмотрим случай, когда  $\Pi > 0$ ,  $\Sigma > 0$ , и построим в полуплоскости  $u > 0$  линии  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 0$ ,  $L_3 = 0$ ,  $L_4 = 0$  (фиг. 1, 4—7). В дальнейшем эти линии будем обозначать соответственно  $L_1^\circ$ ,  $L_2^\circ$ ,  $L_3^\circ$ ,  $L_4^\circ$ . Построим также кривую  $L_5^\circ(u, E)$ , на которой текущее число Маха равно единице. В точках, лежащих на  $L_5^\circ$ , должно выполняться условие  $M_1^2 u^2 = T$ .

Учитывая второе уравнение (1.2), получим, что  $L_5^\circ$  — парабола с вершиной в точке  $A(\gamma(\gamma+1)^{-1}\Pi, 0)$

$$L_5^\circ \equiv u - \gamma(\gamma+1)^{-1}(\Pi + SE^2) = 0$$

Видно, что при  $u \rightarrow \infty$  парабола  $L_5^\circ$  лежит в области, заключенной между параболой  $L_4^\circ$  и кривой  $L_2^\circ$ . Отметим также, что вершина параболы  $L_4^\circ$  лежит при  $\gamma > 1$  левее вершины  $A$  параболы  $L_5^\circ$ .

При  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т. е. при переходе к идеальному (нетеплопроводному) течению, из (1.5) следует, что в области  $u > 0$  кривая  $L_2^\circ(u, E, 0)$  описывает связь между электрическим полем и скоростью в идеальном течении вблизи фронта ударной волны, где изменением потенциала можно пренебречь.

Кривая  $L_2^\circ$  имеет вертикальную асимптоту  $u = 0$  и состоит из двух ветвей  $L_{2\pm}^\circ$ , симметричных относительно оси  $u$  и проходящих через точки  $(1, \pm(E_1 - \alpha(\gamma-1)/\gamma S)^{1/2})$ . При фиксированных  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $M_1$ ,  $S$  расположение ветвей определяется величиной электрического поля в точке  $\zeta_1$ .

Если

$$(2.4) \quad |E_1| < \left(\frac{\beta_1}{S}\right)^{1/2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\gamma M_1^2} \{1 + \gamma M_1^2 - M_1(\gamma+1)^{1/2} \times \\ \times [2 + M_1^2(\gamma-1)(1-2\alpha)]^{1/2}\}$$

то ветви кривой  $L_2^\circ$  пересекают ось  $u$  с вертикальным наклоном в точках  $u_{1,2}^\circ = (\gamma+1)^{-1} \{\gamma\Pi \pm [\gamma^2\Pi^2 - 2(\gamma^2-1)\Sigma]^{1/2}\}$ . При этом одна из ветвей целиком лежит в дозвуковой, а другая — в сверхзвуковой области.

В случае

$$(2.5) \quad |E_1| = \beta_1^{1/2} S^{-1/2}$$

обе ветви пересекают ось  $u$  в одной и той же точке  $A$ , являющейся вершиной параболы  $L_5^\circ$

Если же

$$(2.6) \quad |E_1| > (\beta_1 / S)^{1/2}$$

то одна из ветвей кривой  $L_2^\circ$  целиком лежит в области  $u > 0, E > 0$ , а вторая — в области  $u > 0, E < 0$ . В этом случае ветви имеют экстремум в точках

$$u_m = \left[ \frac{2(\gamma - 1)\Sigma}{\gamma + 1} \right]^{1/2}, \quad E'_m = \pm \left\{ \frac{1}{\gamma S} [2(\gamma^2 - 1)\Sigma]^{1/2} - \gamma\Pi \right\}^{1/2}$$

лежащих на параболе  $L_5^\circ$ . При этом точки кривой  $L_2^\circ$  справа от параболы  $L_5^\circ$  соответствуют сверхзвуковому, а слева — дозвуковому течению. Если  $M_1 > 1$ , то справедливы неравенства  $u_m < 1, |E'_m| < |E_1|$ .

Построим кривую  $L_3^\circ(u, E, \varepsilon, \alpha)$ . Так как  $\varepsilon \ll 1$ , то при  $E \ll \varepsilon^{-1}$  ветви кривой  $L_3^\circ$  должны располагаться в малых окрестностях линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ . В зависимости от значений параметров  $M_1, \gamma, S, E_1$  взаимное расположение кривых  $L_1^\circ, L_2^\circ$  и  $L_4^\circ$  может быть различным.

Некоторые из возможных вариантов расположения этих линий показаны на фиг. 1, 4—7. Линия  $L_3^\circ$  в полуплоскости  $u > 0$  при  $J > 0$  состоит из трех ветвей. Точки пересечения линий  $L_3^\circ$  и  $L_4^\circ$  определяются из многочлена шестой степени относительно  $E$ . В полуплоскости  $u > 0$  такие точки могут отсутствовать (фиг. 5), их может быть две (фиг. 1, 6) или четыре (фиг. 4, 7). Эти точки (на фигурах они обозначены буквами  $B, C, D, F$ ) являются особыми точками уравнения (2.3). Качественный анализ интегральных кривых уравнения (2.3) показывает, что при  $J > 0$  точки  $B$  и  $D$  — фокусы, точки  $C$  и  $F$  — седла.

Точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  определяются из кубического уравнения

$$(2.7) \quad Su(u^2 - E_1^2) - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} u^2 + \left(1 + \frac{1}{\gamma M_1^2}\right) u - \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{M_1^2} + (\gamma - 1) \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \right] = 0$$

В случае  $\alpha = 0$  это уравнение было исследовано в [3].

Обозначим

$$\beta_{2,3} = \frac{1}{(\gamma + 1)M_1^2} \{1 + \gamma M_1^2 \pm [(M_1^2 - 1)^2 + 2\alpha(\gamma^2 - 1)M_1^4]^{1/2}\}$$

$$\beta_4 = \frac{\gamma M_1^2}{1 + \gamma M_1^2}, \quad \beta_5 = \frac{\gamma M_1}{\{(\gamma + 1)[2 + M_1^2(\gamma - 1)(1 - 2\alpha)]\}^{1/2}}$$

$$\beta_6 = \frac{1}{4\beta_3^2\beta_4} - \left(\frac{1}{2\beta_3^4\beta_4^2} - \frac{1}{\beta_3^2}\right)^{1/2}, \quad \delta_1 = (S - \beta_4) / \beta_4 S^2$$

Заметим, что при  $\Sigma > 0, \alpha > 0$  выполняются условия  $\beta_2 > 1, \beta_3 > 0$ . Можно показать, что при

$$(2.8) \quad |E_1| < \beta_3$$

и любом  $S$  уравнение (2.7) имеет в области  $u < \beta_2$  только один действительный корень  $u^{(1)}$ , лежащий в интервале  $|E_1| < u^{(1)} < \beta_3$ , а при  $\beta_3 < |E_1| < \beta_2$ , в зависимости от величины  $S$ , это уравнение имеет в области  $u < \beta_2$  либо один  $u^{(1)}$ , либо три действительных корня  $u^{(1)} < u^{(2)} \leq u^{(3)}$ , расположенных в интервале  $(\beta_3, |E_1|)$ . В дальнейшем будем предполагать, что корень  $u^{(1)}$  лежит в дозвуковой области. Если  $|E_1| > \beta_2$ , то в области  $u < \beta_2$  уравнение (2.7) либо не имеет корней, либо имеет два действительных корня, расположенных в интервале  $\beta_3 < u^{(1)} \leq u^{(2)} < \beta_2$  (фиг. 7).

Ветви кривой  $L_3^\circ$  всегда проходят через малые окрестности точек пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ .

При выполнении неравенств

$$(2.9) \quad S > \beta_4, \quad |E_1| < \delta_1^{1/2}$$

линии  $L_1^\circ$  и  $L_4^\circ$  не пересекаются, а при

$$(2.10) \quad S > \beta_4, \quad |E_1| > \delta_1^{1/2}$$

прямая  $L_1^\circ$  пересекает параболу  $L_4^\circ$  в двух точках. Так как при  $E_1^2 - \delta_1 \gg \varepsilon^2$  в малых окрестностях этих точек расположены точки  $C$  и  $F$  пересечения линий  $L_3^\circ$  и  $L_4^\circ$ , то неравенства (2.10) могут служить приближенным условием существования особых точек  $C$  и  $F$  уравнения (2.3).

Рассмотрим вначале случай  $J > 0$ .

1°. Пусть параметры течения таковы, что одновременно выполняются условия (2.6), (2.9). Можно показать, что при  $S > \beta_5$  одновременно выполняются неравенства  $\delta_1 S > \beta_1$  и  $S > \beta_4$ , так что при  $S > \beta_5$  существует диапазон изменения  $|E_1|$ , определяемый неравенствами (2.6), (2.9).

Взаимное расположение линий  $L_1^\circ$ ,  $L_2^\circ$ ,  $L_3^\circ$ ,  $L_4^\circ$  и  $L_5^\circ$  в этом случае и качественная картина интегральных кривых, определяемых уравнением (2.3), показаны на фиг. 1. Выбор направления движения вдоль интегральных кривых, соответствующий движению вниз по потоку, определяется шестым уравнением (1.1), из которого следует, что при  $q^* > 0$  электрическое поле всегда растет вдоль течения. На фигурах это направление указано стрелками. Очевидно, в малых окрестностях ветвей линии  $L_3^\circ$ , где величина  $L_3 \sim \varepsilon$ , тангенс угла наклона интегральных кривых порядка единицы; вдали от линии  $L_3^\circ$  интегральные кривые идут с малым наклоном, так как параметр  $\varepsilon \ll 1$ . Во всех точках, за исключением особых, интегральные кривые пересекают линию  $L_3^\circ$  с вертикальным наклоном, линию  $L_4^\circ$  — с горизонтальным наклоном. Отметим, однако, что в точках линии  $L_4^\circ$  уравнение (2.5) не описывает связь между скоростью течения и электрическим полем, так как само это уравнение получено при условии, что  $\Pi + SE^2 - 2u \neq 0$ .

При выполнении условий (2.6), (2.9) уравнение (2.3) в полуплоскости  $u > 0$  имеет только две особые точки —  $B$  (фокус) и  $C$  (седло). Так как эти точки лежат в  $\varepsilon$ -окрестностях точек пересечения кривых  $L_2^\circ$  и  $L_4^\circ$ , то с точностью до малых порядка  $\varepsilon$  координаты точек  $B(u_b, E_b)$  и  $C(u_c, E_c)$  определяются следующим образом:

$$(2.11) \quad u_b = u_c = \left[ \frac{2(\gamma - 1)\Sigma}{3\gamma - 1} \right]^{1/2}, \quad E_{b,c} = \pm \left( \frac{2u_b}{S} - \Pi \right)^{1/2}$$

Можно показать, что при выполнении условия (2.6) подкоренное выражение во второй формуле (2.11) положительно. Обозначим

$$M_* = (3\gamma - 1)^{1/2} \{ \gamma(\gamma + 1) - 2\gamma [(\gamma - 1)^2 - 2\alpha(3\gamma - 1)(\gamma - 1)]^{1/2} \}^{-1/2}$$

Анализ второго выражения (2.11) показывает, что при  $M_1 > M_*$  выполняется неравенство  $|E_1| > |E_{b,c}|$ , а при  $1 < M_1 < M_*$  — неравенство  $|E_1| < |E_{b,c}|$ .

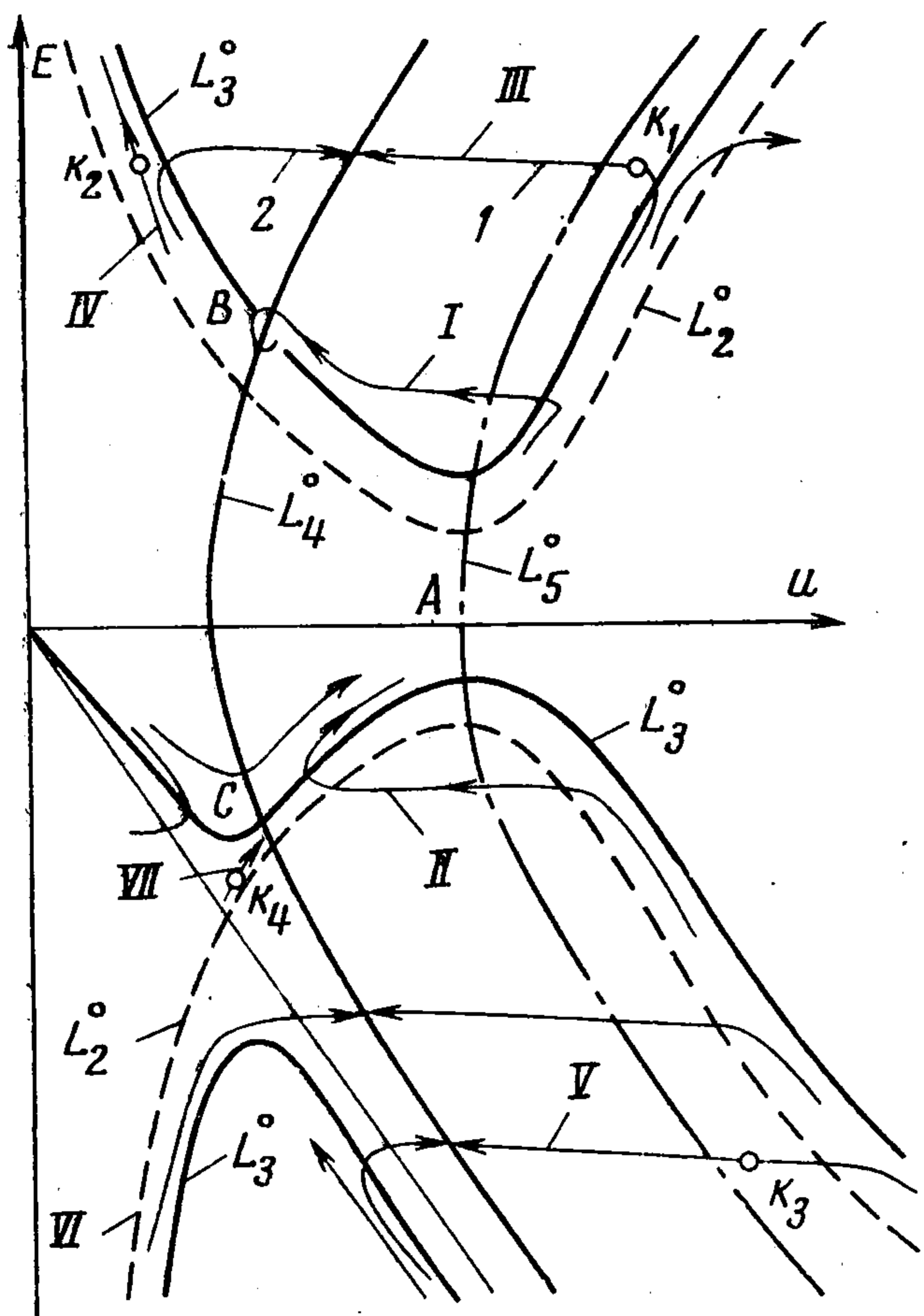
Рассмотрим интегральную кривую, которая проходит через точку  $(1, E_1)$ , соответствующую начальному состоянию в точке  $\zeta_1$  физического пространства. Очевидно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ) начальная точка стремится к точке пересечения линий  $u = 1$  и  $L_2^\circ(u, E, 0)$ .

а) Пусть  $M_1 < M_*$ ,  $E_1 > 0$ . Интегральная кривая I (фиг. 1), проходящая через начальную точку  $(1, E_1)$ , идет в малой окрестности верхней ветви линии  $L_3^\circ$ , затем пересекает ее и идет с малым отрицательным наклоном в сторону меньших значений  $u$ . Далее интегральная кривая входит в малую окрестность той же ветви линии  $L_3^\circ$  и идет вдоль нее. Пересечь с вертикальным наклоном линию  $L_3^\circ$  при  $0 < E < E_b$ ,  $u < u_m$  рассматриваемая интегральная кривая не может, так как имеет в этой области отрицательный наклон, как и верхняя ветвь линии  $L_3^\circ$  при  $u < u_m$ .

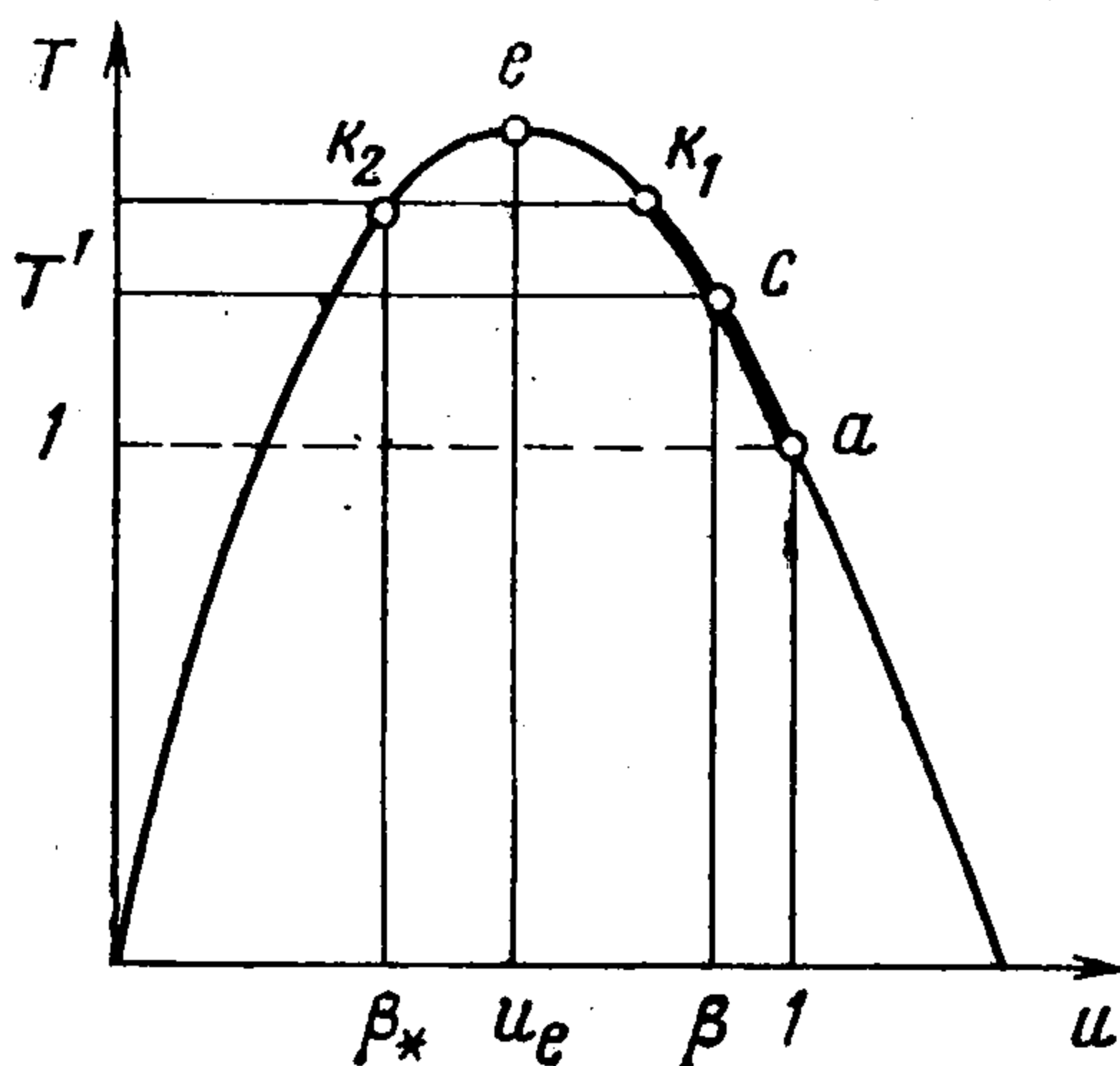
Для анализа режимов течения в физической плоскости, соответствующих различным участкам интегральной кривой I, рассмотрим уравнения (2.2), (1.4) и (2.3).

Обозначим через  $\Delta\zeta_u$  и  $\Delta\zeta_E$  характерные расстояния, на которых в силу уравнений (2.2) и (1.4) скорость и электрическое поле изменяются на величину порядка единицы. На участках рассматриваемой интегральной кривой, идущих вдоль линии  $L_3^\circ$  в малой ее окрестности, величины  $|L_3| \sim \varepsilon$ ,  $L_1 \sim 1$ ,  $|L_4| \sim 1$ , при этом длины  $\Delta\zeta_u \sim 1$ ,  $\Delta\zeta_E \sim 1$ . В физической плоскости эти участки соответствуют областям, в которых параметры течения (скорость, температура, электрическое поле, плотность заряда) переменны и с точностью до малых порядка  $\varepsilon$  удовлетворяют интегралам идеального течения с постоянным электрическим потенциалом, так как здесь величина  $|L_2| \sim \varepsilon$ . Правый из этих участков лежит в сверхзвуковой области, левый — в дозвуковой.

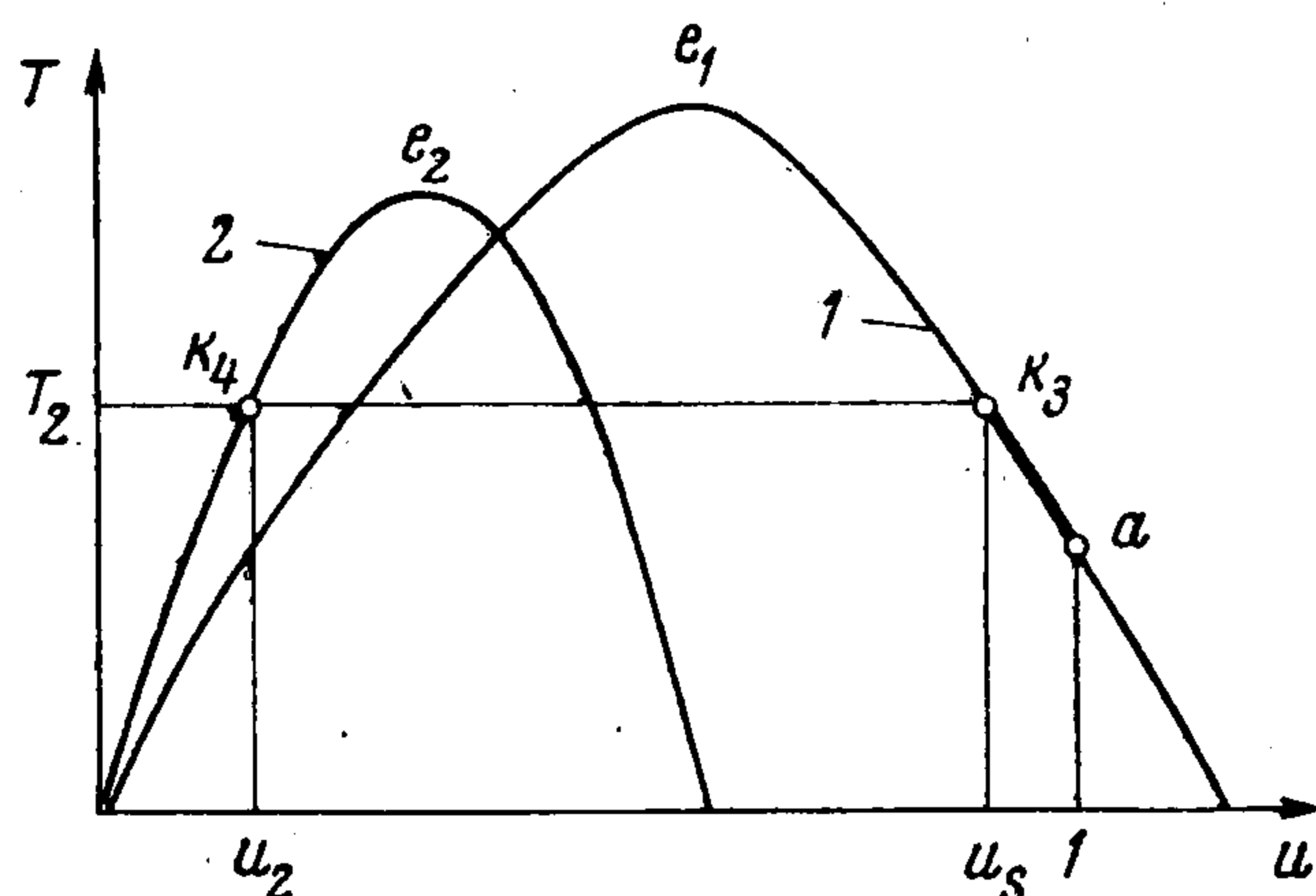
На участке интегральной кривой I вдали от линии  $L_3^\circ$  величины  $|L_3|$ ,  $|L_4|$ ,  $L_1$  порядка единицы, из уравнений (2.2) и (1.4) видно, что здесь длины  $\Delta\zeta_u \sim \varepsilon \ll 1$ ,  $\Delta\zeta_E \sim 1$ . В физической плоскости этот участок соответствует узкой области длиной порядка  $\varepsilon$ , в которой скорость меняется сильно, электрическое поле почти постоянно. Этот участок интегральной кривой описывает структуру ударной волны с постоянным электрическим полем. Часть интегральной кривой вблизи точки  $(1, E_1)$ , идущая вдоль линии  $L_3^\circ$ , описывает сверхзвуковое течение перед фронтом волны; часть интегральной кривой, идущая вдоль  $L_3^\circ$  при  $u < u_m$ , описывает дозвуковое течение за волной. Пренебрегая малым изменением величины электрического поля в структуре ударной волны, из (1.2) и



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

(1.5) с точностью до членов порядка  $\epsilon$  получим систему уравнений, описывающую изменение параметров в области структуры  $\Gamma$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \rho u &= 1, \quad T = 1 + (1 - u)(\gamma M_1^2 u - 1) \\ \frac{dT}{d\zeta_*} &= -\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2} (u - 1)(u - \beta), \\ \beta &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2}, \quad \zeta_* = \frac{\zeta}{\epsilon} \end{aligned}$$

Здесь  $\beta$  — значение скорости за ударной волной в идеальном течении.

Из третьего уравнения (2.12) видно, что при изменении скорости внутри структуры от  $u = 1$  до  $u = \beta$  температура монотонно растет от  $T = 1$  до значения  $T = T' \equiv 1 + 2(\gamma - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma + M_1^{-2}) / (\gamma + 1)^2$ . График функции  $T = T(u)$  изображен на фиг. 2 (участок параболы  $ac$ , выделенный жирной линией).

Таким образом, при  $1 < M_1 < M_*$ ,  $E_1 > 0$  в рассматриваемом случае существует непрерывная структура ударной волны с постоянным электрическим полем, обусловленная механизмом теплопроводности.

Аналогичным способом интерпретируется интегральная кривая II (фиг. 1), проходящая через точку  $(1, E_1)$  при  $M_1 < M_*$ ,  $E_1 < 0$ .

В дальнейшем для сокращения количества фигур будем изображать интегральные кривые, проходящие через начальную точку  $(1, E_1)$  при различных значениях параметров  $E_1$ ,  $M_1$ ,  $S$  и др., на одной и той же фигуре, считая для удобства, что каждому случаю соответствует своя начальная точка.

б) Пусть  $M > M_*$ ,  $E_1 > 0$ . Рассмотрим интегральную кривую III (фиг. 1), проходящую через начальную точку  $(1, E_1)$ . Из фиг. 1 видно, что эта интегральная кривая имеет участки, идущие вдоль линии  $L_3^\circ$  в малой ее окрестности в сверхзвуковой и дозвуковой областях. На этих участках величины  $\Delta \zeta_u$  и  $\Delta \zeta_E$  порядка единицы и изменение параметров близко к изменению параметров в идеальном (нетеплопроводном) течении. Участки 1 и 2 интегральной кривой III, расположенные вдали от линии  $L_3^\circ$ , имеют соответственно малые отрицательный и положительный наклоны. На этих участках  $\Delta \zeta_u \sim \varepsilon$ ,  $\Delta \zeta_E \sim 1$ . В физической плоскости этим участкам соответствует узкая область  $\Gamma$  длиной порядка  $\varepsilon$  с сильным изменением скорости при постоянном электрическом поле.

Предположим, что в области  $\Gamma$  происходит непрерывное изменение скорости от начального значения  $u = 1$  до дозвукового значения  $u = \beta_*$  ( $\beta_* = \beta$  при  $M_1 > M_*$  предпоследняя формула (2.12)), соответствующего скорости за ударной волной в идеальном течении. Изменение газодинамических параметров течения в области  $\Gamma$  при постоянном электрическом поле описывается уравнениями (2.12), при этом, в отличие от предыдущего случая,  $\beta_* < u_e$ , где  $u_e = (2\gamma M_1)^{-2} (1 + \gamma M_1^2)$ . Величина  $u_e$  равна значению скорости в вершине параболы  $T = T(u)$ , связывающей скорость и температуру в течении с постоянным электрическим полем. Из фиг. 2 видно, что после точки  $e$  температура с уменьшением скорости должна падать, однако из третьего уравнения (2.11) следует, что в области  $\Gamma$ , где  $\beta_* < u < 1$ , температура монотонно растет. Это противоречие показывает, что в рассматриваемых условиях, когда  $M_1 > M_*$ ,  $E_1 > 0$  и выполняются неравенства (2.6), (2.9), не существует непрерывной структуры ударной волны, обусловленной механизмом теплопроводности. На это указывает также противоположное направление стрелок на участках 1 и 2 интегральной кривой III, расположенных справа и слева от линии  $L_4^\circ$  (фиг. 1).

Следовательно, в рамках рассматриваемой модели газ из состояния в начальной точке  $\zeta_1$  физического пространства может быть переведен в состояние в конечной точке  $\zeta_4$  лишь за счет скачка газодинамических параметров в некоторой точке внутри области  $\Gamma$ . На фиг. 2 такому переходу соответствует непрерывное изменение параметров вдоль параболы от точки  $a$  до точки  $k_1$ , где достигается максимальное значение температуры газа, равное температуре  $T_2$  за фронтом волны, далее при постоянной температуре скачок скорости (следовательно, плотности газа и объемного заряда) из точки  $k_1$  в точку  $k_2$ , где скорость близка к скорости за ударной волной. На фиг. 1 этому соответствует непрерывное изменение параметров вдоль интегральной кривой III до точки  $k_1$ , затем скачок в точку  $k_2$  на некоторой интегральной кривой IV, идущей вдоль линии  $L_3^\circ$  (и вдоль линии  $L_2^\circ$ ) в малой ее окрестности. В точке  $k_1$  скорость равна

$$u_s = \frac{2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma(\gamma + 1)M_1^2}$$

Таким образом, имеющееся в этом случае разрывное решение системы (1.2), (1.4), (1.5) аналогично изотермическому скачку в обычной газовой динамике [4, 5]. Исследование электрогидродинамических скачков с постоянной температурой газа проведено в работе [3], где показано, в частности, что если заряженные частицы движутся вдоль направления электрического поля, то существуют скачки только с непрерывным электрическим полем.

Случай  $E_1 < 0$ ,  $M_1 > M_*$ ,  $|E_1| < u^{(1)}$ , где  $u^{(1)}$  — корень уравнения (2.7), дающий координаты  $(u^{(1)}, -u^{(1)})$  левой точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ , аналогичен случаю, рассмотренному в п. б).

в) Пусть  $|E_1| > u^{(1)}$ ,  $E_1 < 0$ . Рассмотрим интегральную кривую V (фиг. 1), проходящую через начальную точку  $(1, E_1)$ . Как и в предыдущем случае, эта интегральная кривая пересекает линию  $L_4^\circ$ , поэтому не существует непрерывной структуры волны с постоянным полем. Очевидно, нельзя построить также и разрывное решение с постоянным полем, так как интегральные кривые, идущие вдоль линии  $L_2^\circ$  в дозвуковой области (типа VI, фиг. 1), расположены в области отрицательного электрического тока  $J < 0$ . Из результатов работы [3] следует, что при  $|E_1| > u^{(1)}$ , когда заряженные частицы движутся против направления электрического поля  $E_1 < 0$ ,  $J > 0$ , существуют электрогидродинамические скачки с разрывным полем и постоянной температурой газа. При этом скорость газа и электрическое поле за волной связаны соотношением

$$(2.13) \quad u_2 + E_2 = 0$$

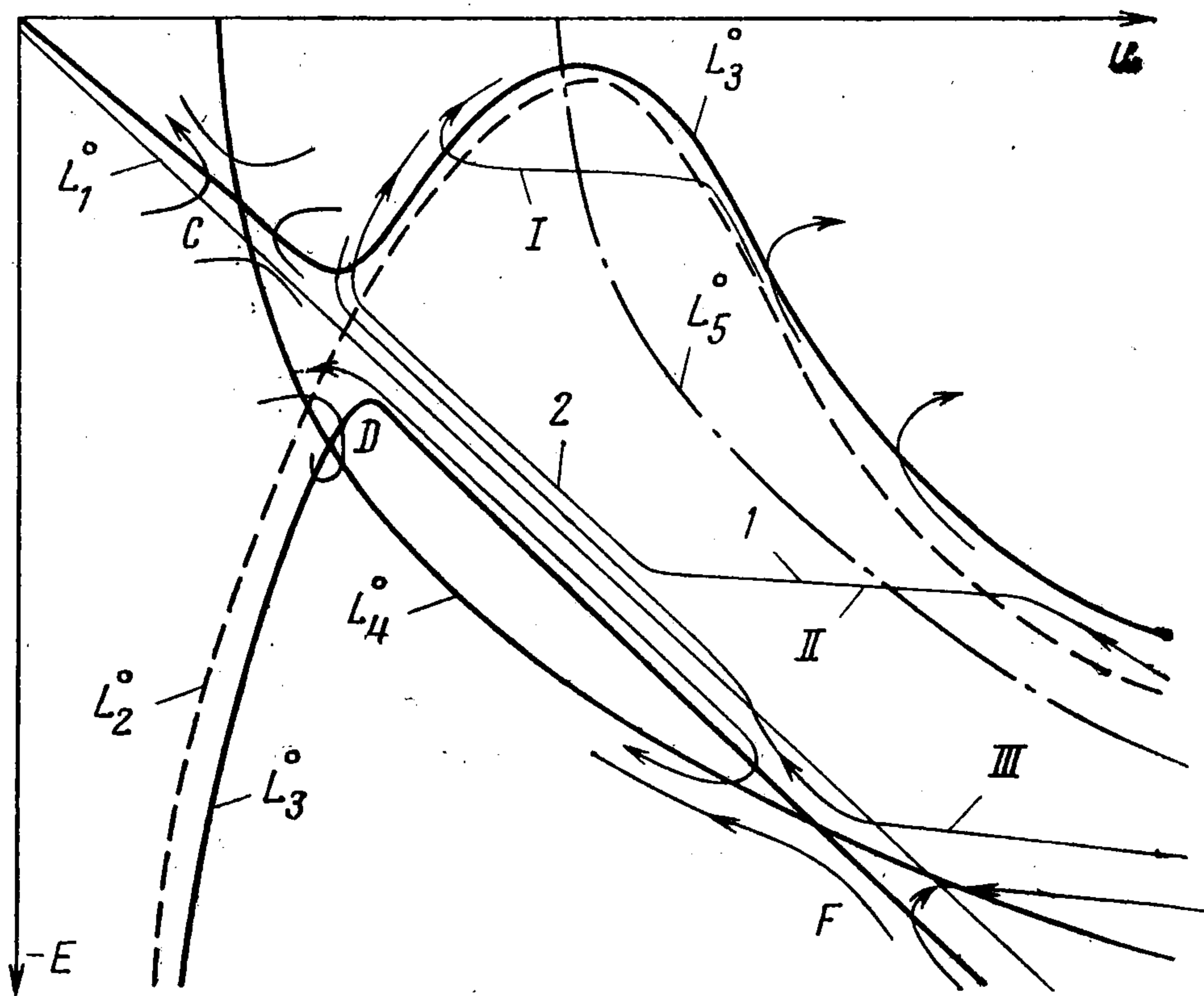
Исследуем возможность построения разрывных решений такого типа в рамках рассматриваемой модели. Пусть скорость и поле за волной удовлетворяют соотношению (2.13). Значение скорости  $u_2$  определяется из кубического уравнения (2.7), а температура  $T_2$  — по найденным значениям скорости и поля из второго уравнения (1.2). Тогда величина скорости  $u_s$  в точке  $k_3$  интегральной кривой V, где кончается непрерывное решение и садится изотермический скачок, является корнем квадратного уравнения

$$(2.14) \quad u_s^2 - \left(1 + \frac{1}{\gamma M_1^2}\right) u_s + \frac{1}{\gamma M_1^2} T_2 = 0$$

Нетрудно выписать условия, при которых (2.14) имеет действительный корень, лежащий в сверхзвуковой области

$$(2.15) \quad \left(1 + \frac{1}{\gamma M_1^2}\right)^2 > \frac{4T_2}{\gamma M_1^2}, \quad \frac{\gamma M_1^2 + 1}{(\gamma + 1) M_1^2} \leq u_s \leq 1$$

Если условия (2.15) выполнены, то можно в рассматриваемом случае построить разрывное решение с изотермическим скачком исходной системы уравнений. Это решение показано на фиг. 3. Из начальной точки  $a$  скорость и температура меняются непрерывно при постоянном поле вдоль параболы 1 (вторая формула (2.11)) до точки  $k_3$ , где достигается максимальное значение температуры  $T_2$ , соответствующее температуре за скачком, затем при постоянной температуре скачком меняется скорость (а также электрическое поле, плотности газа и объемного заряда) до значения в точке  $k_4$ , расположенной на параболе 2 (вторая формула (1.2)) при  $E = E_2 = -u_2$ . На фиг. 1 это решение состоит из куска интегральной кривой V от точки  $(1, E_1)$  до точки  $k_3$ , затем скачок в точку  $k_4$ , расположенную вблизи дозвуковой точки  $(u^{(1)}, -u^{(1)})$  пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  на интегральной кривой VII, и далее непрерывное изменение пара-



Фиг. 4

метров, соответствующее идеальному течению на интегральной кривой VII, идущей вдоль  $L_3^0$  в  $\varepsilon$ -окрестности линий  $L_3^0$  и  $L_2^0$ .

Таким образом, условия (2.6), (2.9), (2.15) вместе с неравенствами  $|E_1| > u^{(1)}$ ,  $E_1 < 0$  дают необходимые условия существования изотермических скачков с переменным электрическим полем, структура которых, обусловленная механизмом вязкости, исследована в [3].

2°. Исследуем случай, когда параметры течения таковы, что одновременно выполняются неравенства (2.6) и (2.10), т. е.

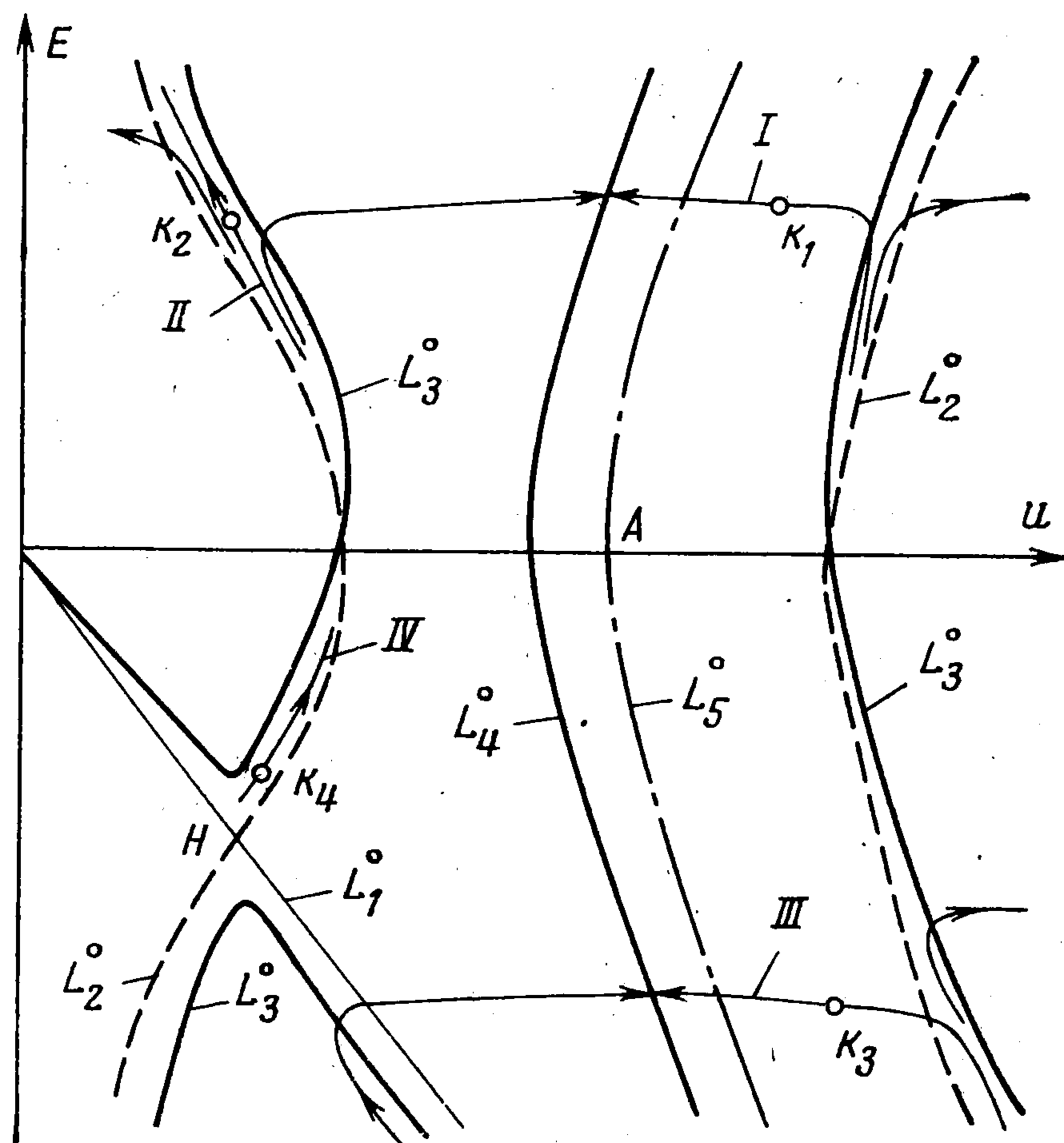
$$\max \left\{ \left( \frac{\beta_1}{S} \right)^{1/2}, \delta_1^{1/2} \right\} < |E_1|, \quad S > \beta_4$$

Расположение линий  $L_3^0$  и  $L_4^0$  и качественная картина поведения интегральных кривых в области  $E > 0$  аналогичны случаям, рассмотренным в п. а) и б). В области  $E < 0$  уравнение (2.3) имеет три особые точки. На фиг. 4 изображен наиболее интересный случай расположения линий  $L_1^0$ ,  $L_2^0$  и  $L_4^0$ , когда левая точка пересечения линий  $L_1^0$  и  $L_4^0$  лежит левее точки  $(u^{(1)}, -u^{(1)})$  пересечения линий  $L_1^0$  и  $L_2^0$ . Соответствующий критерий имеет вид

$$u^{(1)} > S^{-1} - (E_1^2 - \delta_1)^{1/2}$$

Если  $|E_1| < \beta_3$ , то, как отмечалось выше,  $|E_1| < u^{(1)}$ . Интегральная кривая I, проходящая через начальную точку  $(1, E_1)$ , дает непрерывную структуру ударной волны с постоянным электрическим полем.

г) Рассмотрим подробнее интегральную кривую II, проходящую через начальную точку  $(1, E_1)$  при  $\beta_3 < |E_1| < |E_F|$ . Заметим, что  $E_F$  зависит от  $E_1$  и что при  $E_1^2 - \delta_1 \gg \varepsilon^2$  точка F лежит в  $\varepsilon$ -окрестности правой точки пересечения параболы  $L_4^0$  с прямой  $L_1^0$ . Учитывая это, неравенство  $|E_1| < |E_F|$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  можно записать в виде  $|E_1| > (2\beta_4)^{-1}$ . Начальное значение электрического поля ограничено условием  $|E_1| < 1$ , так как рассматривается случай  $J > 0$ . Величина



Фиг. 5

$\beta_4 > 0.5$  при  $\gamma > 1$ ,  $M_1 > 1$ . Можно показать, что при  $S > \beta_5$  выполняются условия  $\delta_1 S > \beta_1$  и  $S > \beta_4$ , а при  $S > \beta_6$  — условие  $\beta_3 > \delta_1^{1/2}$ . Величина  $\beta_3 < 1$ , следовательно, существует диапазон изменения параметров  $S$  и  $M_1$ , при котором неравенства, ограничивающие снизу величину  $|E_1|$ , не противоречат условию  $J > 0$ .

Если корень  $u^{(1)}$  уравнения (2.7) лежит в дозвуковой области, интегральная кривая II имеет участки, идущие вблизи линии  $L_2^\circ$  в сверхзвуковой и дозвуковой областях, соответствующие состоянию газа перед и за фронтом волны, причем в дозвуковой области интегральная кривая пересекает линию  $L_3^\circ$  в  $\varepsilon$ -окрестности линии  $L_1^\circ$ , где  $u = -E$ , и далее идет вдоль линии  $L_3^\circ$ . В физической плоскости эти участки соответствуют областям идеального (нетеплопроводного) течения, так как здесь  $|L_2| \sim \varepsilon$ . На участке I рассматриваемой интегральной кривой величины  $\Delta \zeta_u \sim \varepsilon$ ,  $\Delta \zeta_E \sim 1$ . Этот участок соответствует узкой области течения с сильным изменением скорости при постоянном электрическом поле. На участке 2 величины  $\Delta \zeta_u \sim \varepsilon$ ,  $\Delta \zeta_E \sim \varepsilon$ . Эта часть описывает узкую область течения с сильным изменением скорости и электрического поля. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  на этой интегральной кривой значение скорости  $u_2$  за ударной волной связано с величиной поля  $E_2$  соотношением  $u_2 + E_2 = 0$  и определяется из кубического уравнения (2.7).

Таким образом, интегральная кривая II дает непрерывную структуру ударной волны, обусловленную механизмом теплопроводности с переменным электрическим полем. При этом из структуры следует, что скорость и электрическое поле связаны за волной соотношением  $u_2 + E_2 = 0$ .

Отметим, что область начальных значений электрического поля  $E_1$  нетрудно уточнить, анализируя угловые наклоны интегральных кривых на линии  $L_1^\circ$  для того, чтобы исключить интегральные кривые типа III, которые заходят в область отрицательных токов  $J < 0$  и не имеют физического смысла.

Случай, когда начальное значение электрического поля  $|E_1| > |E_F|$ , аналогичен случаю, рассмотренному в п. в). Неравенство  $|E_1| > |E_F|$ , точно до величин порядка  $\varepsilon$  можно записать в виде  $S^{-1} < |E_1| < (2\beta_4)^{-1}$ .

Отметим, что если корень  $u^{(1)}$  уравнения (2.7) расположен в сверхзвуковой области, то в случае, когда заряженные частицы движутся навстречу электрическому полю ( $J > 0$ ,  $E_1 < 0$ ), структуры ударной волны в рамках рассматриваемой модели не существует.

3°. Пусть одновременно выполняются условия (2.4) и (2.9), т. е. электрическое поле в точке  $\zeta_1$  удовлетворяет условию

$$(2.16) \quad |E_1| < \min \left\{ \left( \frac{\beta_1}{S} \right)^{1/2}, \delta_1^{1/2} \right\}, \quad S > \beta_4$$

В этом случае уравнение (2.3) не имеет особых точек. Качественная картина поведения интегральных кривых показана на фиг. 5.

Видно, что в этом случае нет начальных условий, при которых существовала бы непрерывная структура ударной волны. Интегральные кривые типа I при  $E_1 > -u^{(1)}$  дают структуру с изотермическим скачком и непрерывным электрическим полем.

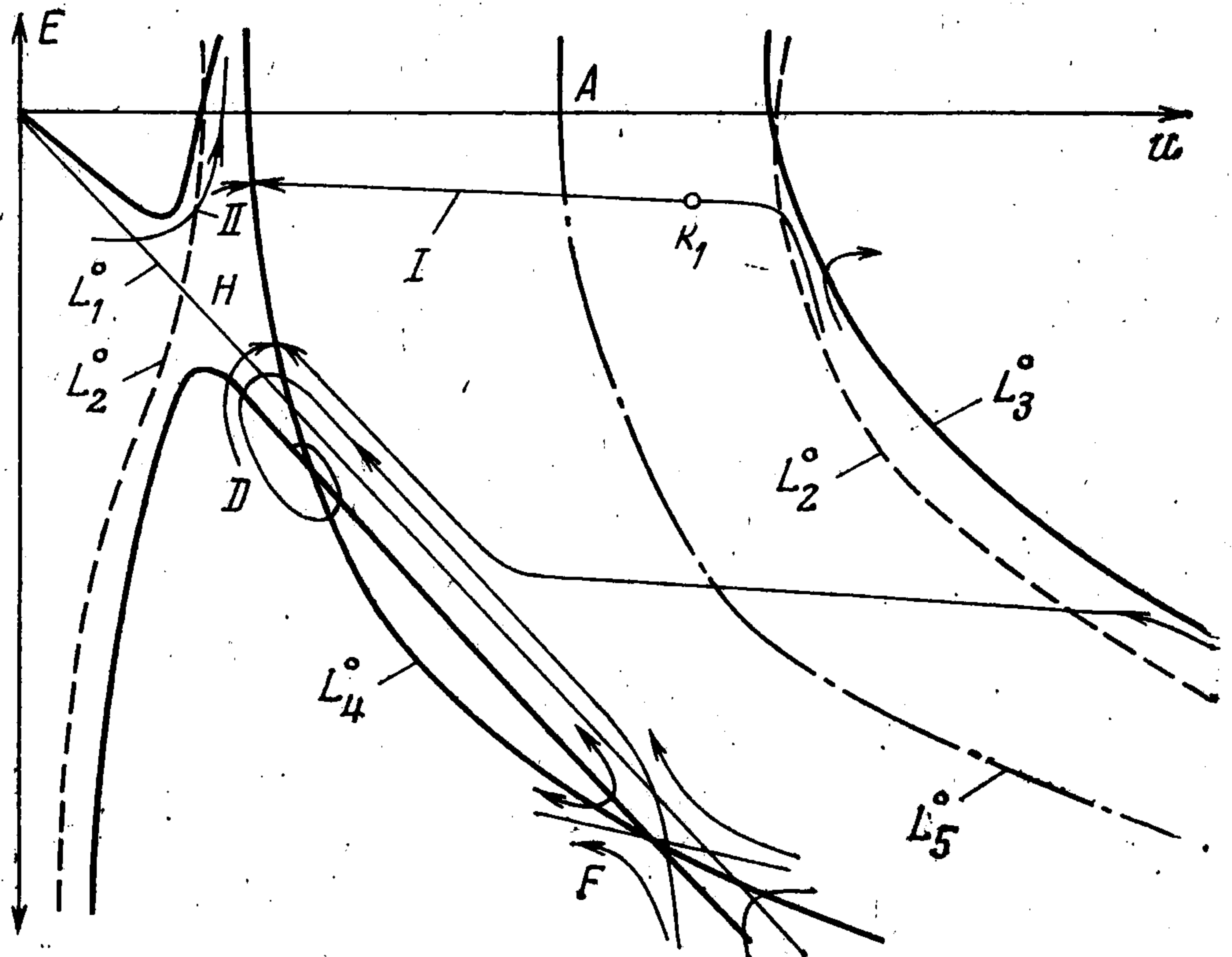
Если  $E_1 < -u^{(1)}$ , то в изотермическом скачке электрическое поле разрывно. Необходимые условия существования таких скачков дают неравенства (2.15), (2.16) вместе с неравенством  $|E_1| > u^{(1)}$ . Последнее неравенство и условия (2.16) непротиворечивы, если параметры  $S$ ,  $M_1$  и  $\gamma$  таковы, что  $\beta_3 < \min \{ \delta_1^{1/2}, \beta_1^{1/2} S^{-1/2} \}$ . Этот случай аналогичен случаю, рассмотренному в п. в).

4°. Можно показать, что при  $\beta_4 < S < \beta_5$  одновременно выполняются условия (2.4) и (2.10), т. е. возможен случай, когда

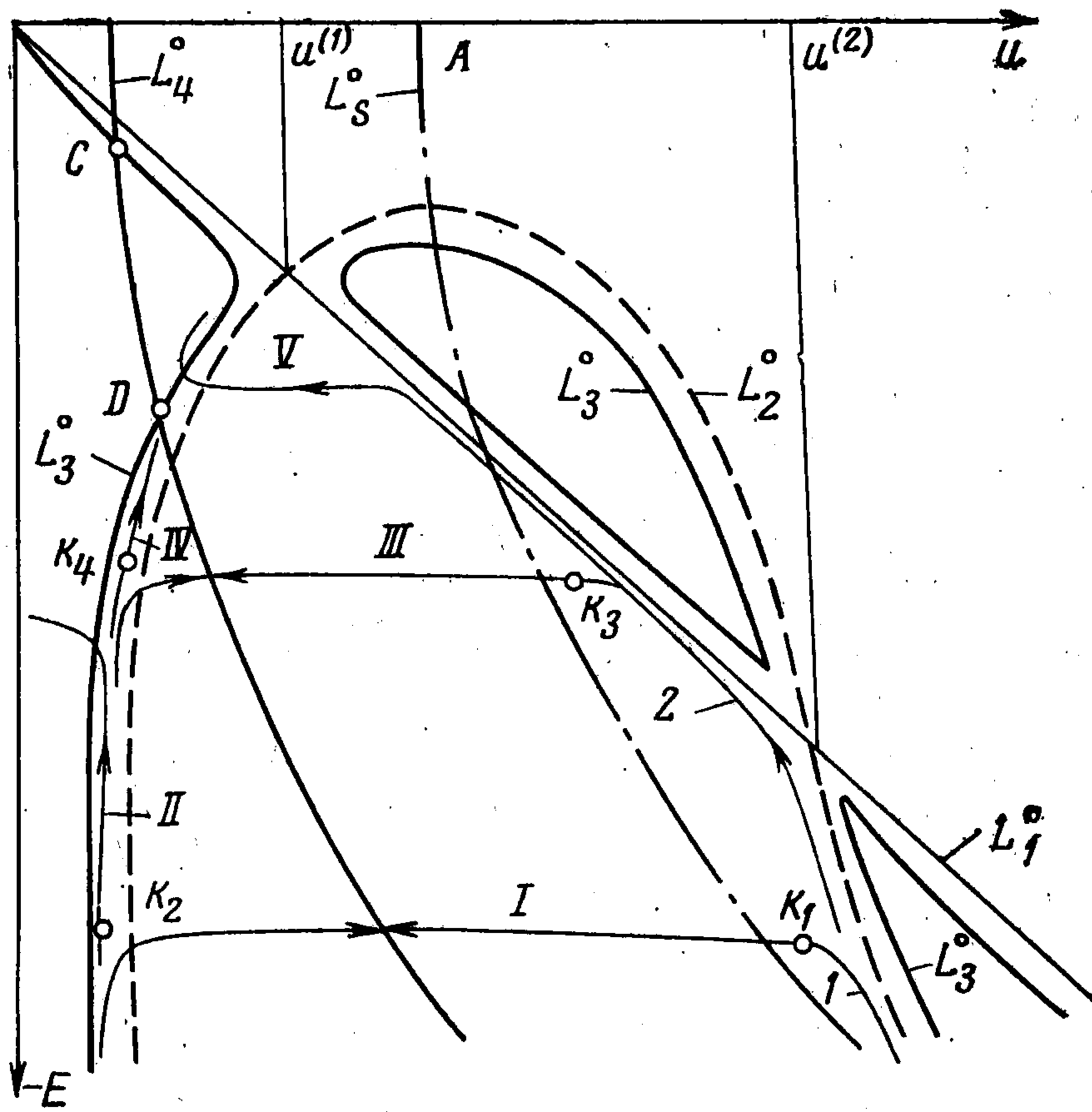
$$\delta_1^{1/2} < |E_1| < \beta_1^{1/2} S^{-1/2}$$

При этом уравнение (2.3) имеет две особые точки, лежащие в области  $u > 0$ ,  $E < 0$ . Картина интегральных кривых в этом случае показана на фиг. 6. Точка  $D$  — фокус, а точка  $F$  — седло. Характер изменения параметров в структуре ударной волны аналогичен рассмотренному в случае 3°, если точка  $H$  пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  расположена левее левой точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_4^\circ$ , как на фиг. 6. Если точка  $H$  лежит правее точки  $D$ , то качественная картина поведения интегральных кривых аналогична случаям, которые обсуждались в п. 2°.

3. Структура ударной волны в случае, когда ионы движутся навстречу газу. Пусть при  $\Pi > 0$ ,  $\Sigma > 0$  параметр  $J < 0$  и пусть уравнение (2.7) имеет три различных корня  $u^{(1)} < u^{(2)} < u^{(3)}$ , которым соответствуют значения электрического поля  $E^{(1)} > E^{(2)} > E^{(3)}$  (так как корни (2.7) дают одну из координат точек пересечения линии  $L_2^\circ$  с прямой  $L_1^\circ$ ). Интегральные кривые уравнения (2.3), имеющие физический смысл, расположены в области  $u > 0$ ,  $E < 0$  ниже прямой  $L_1^\circ$ , где  $J < 0$ . Качественная картина поведения интегральных кривых изображена на фиг. 7



Фиг. 6



Фиг. 7

для случая, когда выполняется условие (2.6), уравнение (2.3) имеет в области  $u > 0, E < 0$  три особые точки и, кроме того, левая точка пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_4^\circ$  лежит левее точки  $(u^{(1)}, E^{(1)})$  пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ .

Рассмотрим несколько возможных типов интегральных кривых, дающих структуру ударной волны в зависимости от положения начальной точки  $(1, E_1)$ , соответствующей состоянию газа перед фронтом волны. Если  $E^{(3)} < E_1 < E^{(2)}$ , то интегральная кривая I дает структуру волны с изотермическим скачком и непрерывным электрическим полем. Ситуация здесь аналогична рассмотренной в п. 6). Структура волны

состоит из участка 1 интегральной кривой I и изотермического скачка при постоянном поле из точки  $k_1$  в точку  $k_2$  интегральной кривой II. Значение скорости в точке  $k_1$  определяется при помощи фиг. 2 по найденному значению  $T_2$  температуры за ударной волной.

Интегральные кривые III и V характерны тем, что скорость и электрическое поле перед фронтом волны, структуру которой описывает каждая кривая такого типа, связаны соотношением  $u^{*(2)} + bE^{*(2)} = 0$ , где  $u^{*(2)}$ ,  $E^{*(2)}$  — размерные значения координат средней точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  (в безразмерном виде  $u = 1$ ,  $E = -1$ ). Значение электрического поля  $E_2$  за фронтом таких волн нужно задавать, при этом, если  $E_D < E_2 < E^{(1)}$ , то ударная волна имеет непрерывную структуру с переменным электрическим полем, обусловленную механизмом теплопроводности (кривая V). Если  $E^{(2)} < E_2 < E_D$ , то при выполнении условий

$$(3.1) \quad f > \frac{4T_2}{\gamma M_1^2}, \quad \frac{\gamma}{\gamma + 1} f \leq u_s \leq 1, \quad f = 1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} + S(E_2^2 - 1)$$

существуют ударные волны с переменным электрическим полем, структура которых состоит из участка 2 интегральной кривой III, где резко меняются электрическое поле, скорость и другие параметры, и изотермического скачка при постоянном электрическом поле, равном полю за волной, из точки  $k_3$  в некоторую точку  $k_4$  интегральной кривой IV. Положение точки  $k_3$ , где садится скачок, можно определить, если разрешить условия на разрыве, которые теперь при заданном значении поля за волной замкнуты. Затем из второго соотношения (1.2) определяется значение скорости  $u_s$  в точке  $k_3$ . Необходимые условия существования таких скачков имеют вид (3.1)

Поступила 18 XII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
3. Гогосов В. В., Полянский В. А. Структура электрогидродинамических ударных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
5. Cohen I. M., Moraff C. A. Viscous inner structure of zero Prandtl number shocks. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 6, p. 1279.