

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

В. Г. Гетманов, Б. Е. Федунев

(Москва)

Рассматривается возникающая в инженерной практике задача оптимального по быстродействию управления линейным объектом третьего порядка с ограничением на управление и на фазовую координату. Описывается синтез управления.

**1. Постановка задачи.** При совместной работе двух следящих за подвижным объектом измерителей, каждый из которых может осуществлять слежение лишь в некоторой части (зоне действия) пространства измерений, возникает следующая задача. По информации об объекте, получаемой от измерителя, из зоны действия которого выходит объект, максимально быстро организовать слежение измерителем, в зону действия которого входит объект. Динамика процесса организации слежения для ряда измерителей может быть описана системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и ограничениями на управление  $u$  и фазовую координату (зона действия измерителя)

$$(1.1) \quad \frac{dx_1}{dt} = \Omega - x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{T} x_3 + u$$

$$(1.2) \quad -U \leq u < U, \quad x_{20}^2 - x_2^2 \leq 0$$

Оптимальным считается управление  $u^\circ(t)$ , обеспечивающее выполнение условия (1.2) и переводящее объект (1.1) за минимальное время  $t_f$  из заданной начальной точки  $x_1(0) = x_1^*$ ,  $x_2(0) = x_2^*$ ,  $x_3(0) = x_3^*$  (начальное положение измерителя) в заданную конечную точку  $x_1(t_f) = 0$ ,  $x_3(t_f) = \Omega$  (условие начала слежения).

В исследуемой задаче представляет интерес построение синтеза оптимального управления, обеспечивающего работу системы для каждого фиксированного набора параметров  $T, U, x_{20}$  (из множеств  $T > 0, U > 0, x_{20} > 0$ ), при произвольных координатах начальной точки и произвольных постоянных по времени значений параметра  $\Omega$ .

**2. Свойства оптимального управления.** Из принципа максимума [1] следует, что если при произвольных постоянных  $C_i, i = 1, 2, \dots, 5$

$$H = \psi_1(\Omega - x_3) + \psi_2 x_3 + \psi_3 \left( -\frac{1}{T} x_3 + u \right) - \frac{d\mu}{dt} (x_2^2 - x_{20}^2)$$

$$l = \alpha_y t_f + C_1 [x_1(0) - x_1^*] + C_2 [x_2(0) - x_2^*] + C_3 [x_3(0) - x_3^*] + C_4 x_1(t_f) + C_5 [x_3(t_f) - \Omega]$$

$$\alpha_y \geq 0, \quad \frac{d\mu}{dt} \geq 0, \quad \frac{d\mu}{dt} [x_{20}^2 - (x_2^\circ(t))^2] = 0$$

то сопряженные переменные удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} -\frac{d\psi_1}{dt} &= 0, \quad \psi_1(0) = C_1, \quad \psi_1(t_f) = -C_4 \\ -\frac{d\psi_2}{dt} &= -2x_2(t) \frac{d\mu}{dt}, \quad \psi_2(0) = C_2, \quad \psi_2(t_f) = 0 \\ -\frac{d\psi_3}{dt} &= -\psi_1 + \psi_2 - \frac{1}{T} \psi_3, \quad \psi_3(0) = C_3, \quad \psi_3(t_f) = C_5 \\ -\frac{d\psi_t}{dt} &= 0, \quad \psi_t(0) = 0, \quad \psi_t(t_f) = -\alpha_y \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \psi_1(t) &= \psi_1(0), \quad C_1 = -C_4 \\ \psi_2(t) &= \psi_2(0) + \int_0^t 2x_2^\circ(\tau) \frac{d\mu}{d\tau} d\tau \\ \psi_3(t) &= [\psi_3(0) + (\psi_1(0) - \psi_2(0))T] e^{t/T} - \\ &- [\psi_1(0) - \psi_2(0)]T - e^{t/T} \int_0^T e^{-\tau/T} \int_0^\tau 2x_2^\circ(\zeta) \frac{d\mu}{d\zeta} d\zeta d\tau \\ \psi_t(t) &= \text{const}, \quad \alpha_y = 0 \end{aligned}$$

Оптимальное управление определяется выражением  $u^\circ(t) = U \text{sign } \psi_3(t)$ . Рассматриваемую задачу, принадлежащую к типу задач, изученных в [2], удобно исследовать в координатах

$$y_1 = x_3 - x_1 / T, \quad y_2 = x_3 - Tu^\circ, \quad y_3 = x_2 + Tx_3$$

В новых переменных для двух возможных значений  $u^\circ = \pm U$  получим

$$(2.2) \quad y_1(0) = x_3(0) - x_1(0) / T, \quad y_3(0) = x_2(0) + Tx_3(0) \\ y_2^\mp = x_3(0) \pm TU \quad \text{при } u^\circ = \mp U$$

$$(2.3) \quad \frac{dy_1}{dt} = U - \frac{1}{T} \Omega, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{y_2}{T}, \quad \frac{dy_3}{dt} = TU$$

$$(2.4) \quad y_2 = C \exp[-y_1(TU - \Omega)^{-1}], \quad y_3 = C \exp[-y_3(T^2U)^{-1}] \\ (u = \text{const})$$

$$(2.5) \quad (y_3 + x_{20}) T^{-1} \pm TU \geq y_2 \geq (y_3 - x_{20}) T^{-1} \pm TU$$

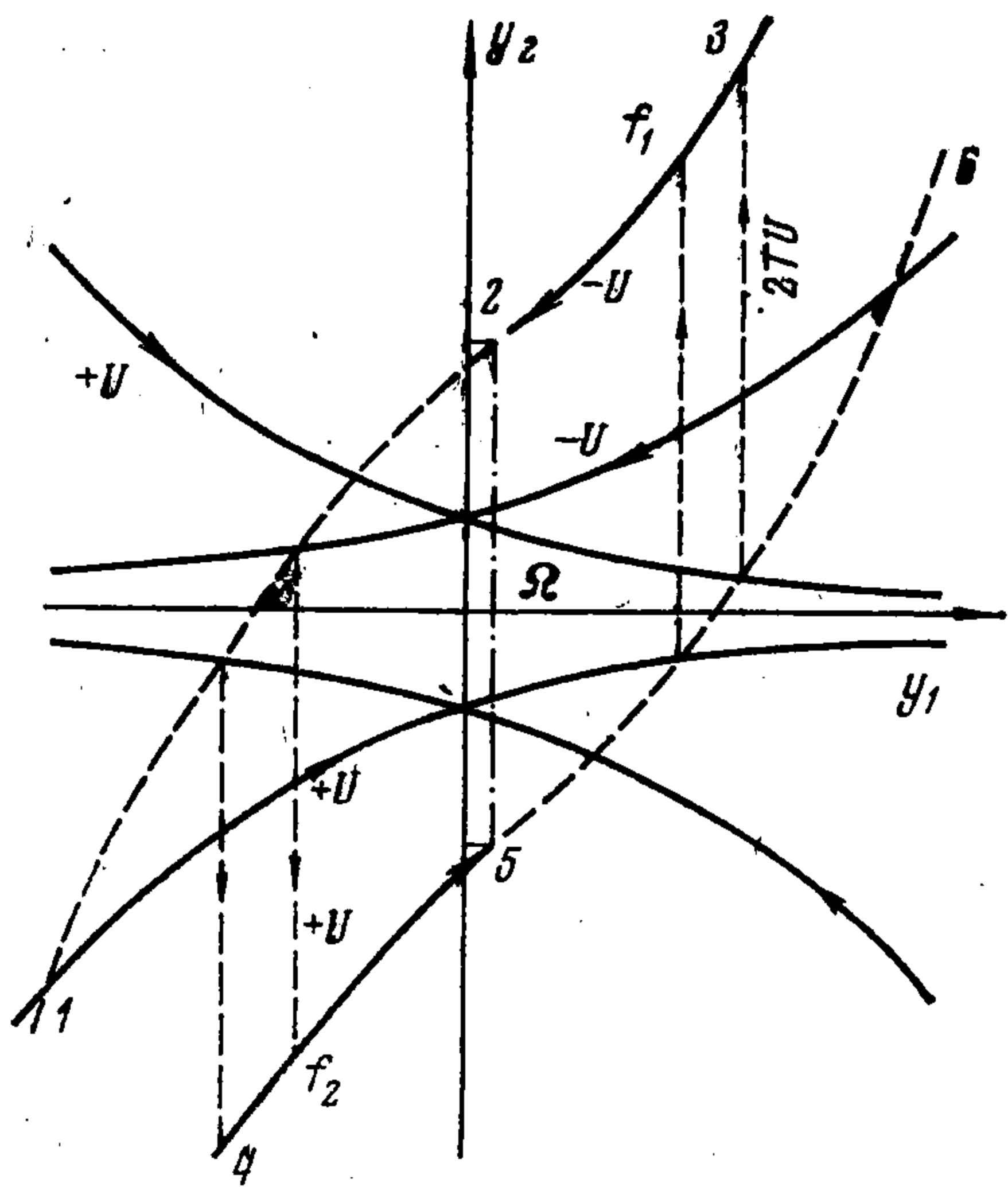
Здесь (2.2) — значения координат начальной точки, (2.3) — система дифференциальных уравнений (с учетом сделанной замены), (2.4) — уравнения фазовых траекторий.

Области параметров удобно разбить следующим образом:

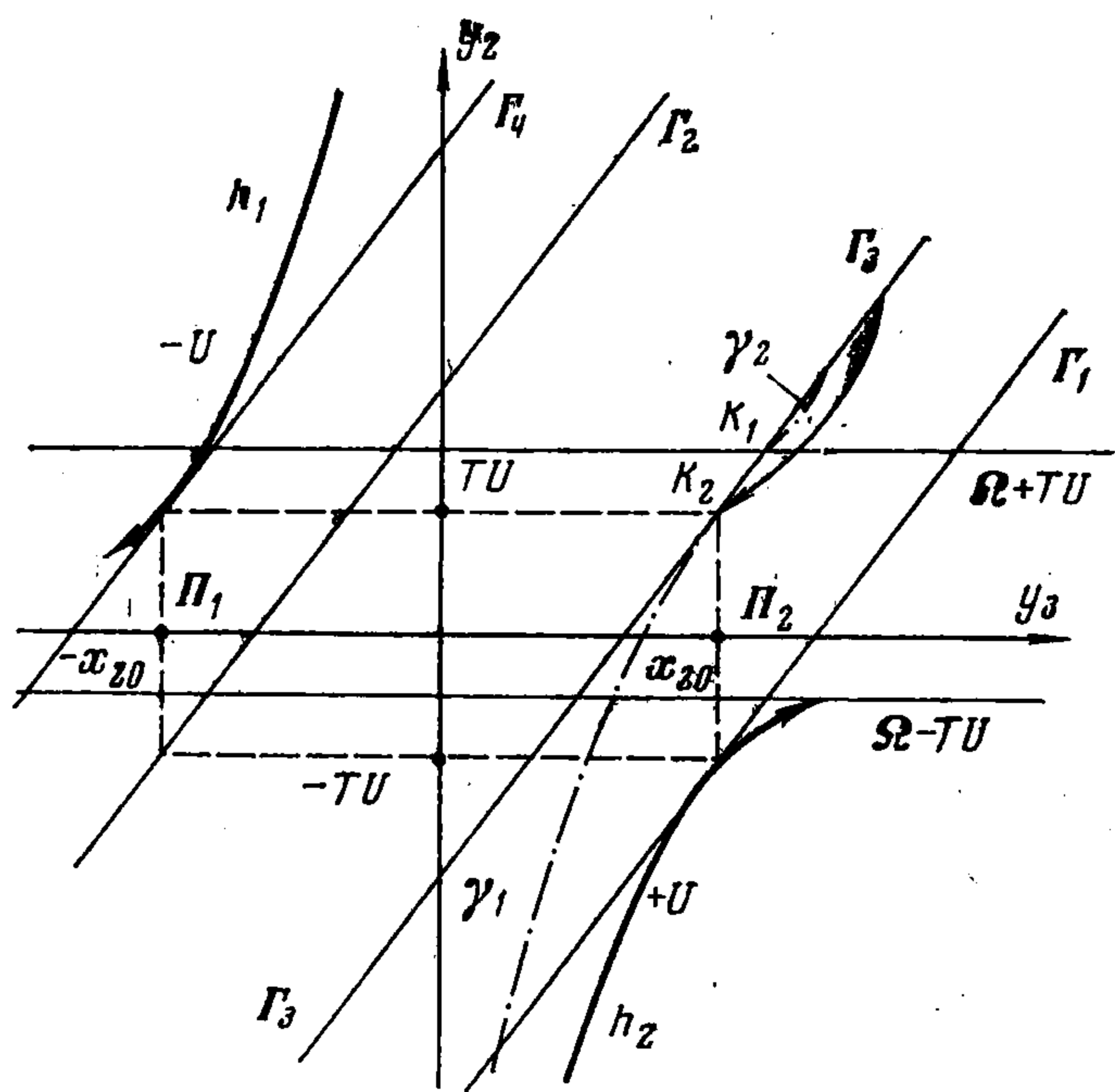
а)  $\Omega \geq 0$ ,  $\Omega < 0$ , б)  $TU - |\Omega| \geq 0$ ,  $TU - |\Omega| < 0$ , в)  $x_{20} \geq T^2U$ ,  $x_{20} < T^2U$ .

Рассмотрение в п. 2 и 3 проводится для сочетания  $\Omega > 0$ ,  $TU - \Omega > 0$ ,  $x_{20} > T^2U$ .

2.1. Если оптимальное управление таково, что  $d\mu/dt \equiv 0$ , то оно будет совпадать с управлением для соответствующей задачи максимального быстродействия без фазовых ограничений. Из (2.1) следует, что оптимальное управление представляет собой кусочно-постоянную функцию, имеющую не более одного переключения. Полное представ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ление об оптимальном движении системы можно получить по фазовым траекториям в плоскости  $\{y_1, y_2\}$ .

На фиг. 1 представлены отдельные фазовые траектории (2.4), соответствующие управлениям  $\pm U$ . Отметим, что перемена знака управления приводит к скачку фазовой точки на величину  $\pm 2TU$  по координате  $y_2$ . Попасть в конечную точку  $y_1 = \Omega$ ,  $y_2 = \Omega \pm TU$  можно, двигаясь по траектории с управлением  $u = \mp U$ , проходящей через нее (сплошные участки кривых  $f_1(y_1)$ ,  $f_2(y_2)$ ). Если фазовая точка, соответствующая начальному состоянию системы, находится на такой траектории, то система переводится в конечное состояние без смены знака управления. В противном случае происходит смена знака управления, осуществляемая в такой точке плоскости  $\{y_1, y_2\}$ , скачок из которой по координате  $y_2$  на величину  $\pm 2TU$  обеспечивает попадание на определенные выше траектории. Геометрическое место точек переключения представлено на фиг. 1 пунктирными кривыми. Зависимости  $y_2 = f_1(y_1)$ ,  $y_2 = f_2(y_1)$  определяются системой соотношений

$$(2.6) \quad f_1: 2TU + (\Omega - TU) \exp\left[\frac{\Omega - y_1}{TU - \Omega}\right], \quad y_1 \leq \Omega$$

$$(\Omega + TU) \exp\left[-\frac{\Omega - y_1}{TU + \Omega}\right], \quad y_1 > \Omega, \quad f_2 = f_1 - 2TU$$

2.2. Если оптимальное управление таково, что  $d\mu / dt \neq 0$ , то фазовое ограничение существенно. Из уравнения (1.1) видно, что находиться на нем ( $x_2^2(t) = x_{20}^2$ ) в течение некоторого, отличного от нуля временного интервала, система может только при  $x_3 = 0$  и  $u^0 = 0$ . На плоскости  $\{y_2, y_3\}$  такое состояние изображается точками  $(\pm TU, \pm x_{20})$ ,  $(0, \pm x_{20})$ , называемыми в дальнейшем точками покоя  $\Pi_1, \Pi_2$  (фиг. 2). При нахождении системы в точке покоя ( $u = 0$ ) имеем следующую картину движения. В координатах  $\{y_2, y_3\}$  точка остается неподвижной:  $y_2 = 0$ ;  $y_3 = \pm x_{20}$ .

В координатах  $\{y_1, y_2\}$  точка перемещается в соответствии с уравнениями

$$y_1(t) = y_1(t_b) - \Omega T^{-1}(t - t_b), \quad y_2(t) = 0$$

где через  $t_b$  обозначен момент выхода траектории на фазовое ограничение.

Отметим, что на плоскости  $\{y_2, y_3\}$  точка окончания процесса управления  $x_1(t_f) = 0$ ,  $x_3(t_f) = \Omega$  должна лежать на прямой  $y_2 = \Omega - TU$  при окончании процесса

с  $u^\circ = +U$  и на прямой  $y_2 = \Omega + TU$  при окончании процесса с  $u^\circ = -U$ . Фазовые ограничения (2.5) представляют собой зоны, ограниченные параллельными линиями  $\Gamma_1, \Gamma_2 (\Gamma_3, \Gamma_4)$ , запретные для траекторий с управлениями  $+U (-U)$  (фиг. 2).

При подходе к фазовому ограничению  $\Gamma_1$  с  $u^\circ = +U$  существует траектория, касающаяся  $\Gamma_1$  в точке

$$\{y_2 = -TU, \quad y_3 = x_{20}\} : h_2 = -TU \exp(x_{20} - y_3) (T^2U)^{-1}$$

Касание происходит в точке покоя. В точки границы  $\Gamma_1$  с координатами  $y_3 > x_{20}$  фазовая траектория с  $u^\circ = +U$  выходить не может, но в точки с координатами  $y_3 < x_{20}$  выход такой траектории в принципе возможен. Однако в последнем случае фазовое ограничение будет нарушено как при сохранении знака  $u^\circ$ , так и при его смене.

При подходе к  $\Gamma_4$  с  $u^\circ = -U$  соответствующая траектория касается  $\Gamma_4$  в точке

$$\{y_2 = TU, \quad y_3 = -x_{20}\} : h_1 = TU \exp(x_{20} + y_3) (T^2U)^{-1}$$

В точки границы  $\Gamma_4$  с координатами  $y_3 < -x_{20}$  фазовая траектория с  $u^\circ = -U$  выходить не может, но в точки с координатами  $y_3 > -x_{20}$  выход траектории в принципе возможен. Однако в последнем случае фазовое ограничение будет нарушено как при сохранении знака  $u^\circ$ , так и при его смене.

Рассмотрим другие возможности выхода на фазовые ограничения. Выход с  $u^\circ = +U$  на ограничение  $\Gamma_2$  возможен в любой точке. В момент выхода для предотвращения нарушения фазового ограничения должно реализоваться переключение знака управления. При этом в случае выхода на  $\Gamma_2$  в точках с координатами  $y_2 > -x_{20}$  фазовое ограничение нарушается, при выходе в точки с  $y_2 < -x_{20}$  нарушений не будет. В случае выхода в точку  $y_3 = -x_{20}$  интегральное слагаемое в выражении для  $\psi_3(t)$  положительно. Поэтому оставаться на фазовом ограничении в этой точке ( $u^\circ = 0$ ) траектория может, когда неинтегральное слагаемое становится отрицательным в момент выхода на ограничение.

Таким образом, выход на границу  $\Gamma_2$  всегда должен сопровождаться переключением управления или остановкой процесса. В первом случае последующий участок траектории с  $u^\circ = -U$  конечен и должен приходиться в требуемую конечную точку — на линию  $y_2 = \Omega + TU$  (фиг. 2). После переключения фазовая точка на плоскости  $\{y_2, y_3\}$  находится ниже оптимальной линии и с управлением  $u^\circ = -U$  попасть на нее не может. Поэтому искомая оптимальная траектория выходить на фазовое ограничение не должна. Исключение составляет фазовая траектория, попадающая при выходе на  $\Gamma_2$  в конечную точку (на прямую  $y_2 = \Omega - TU$  в плоскости  $\{y_2, y_3\}$ ).

Аналогично, при подходе к  $\Gamma_2$  с  $u^\circ = +U$  фазовая точка может пребывать на ограничении только в  $x_{20}$ . Для этого необходимо  $\psi_3(t) = 0$ . Если интегральное слагаемое в выражении для  $\psi_3$  в этой точке не равно нулю, то оно отрицательно; неинтегральное слагаемое в момент выхода должно менять знак. Однако в этом случае после схода с фазового ограничения  $d\mu/dt \equiv 0$ , величина  $\psi_3(t)$  становится отрицательной, т. е. фазовое ограничение нарушается. Поэтому сход возможен только с  $u^\circ = -U$ , что в свою очередь выполняется только при  $d\mu/dt \equiv 0$ .

Таким образом, при подходе к  $\Gamma_1$  с  $u^\circ = +U$  фазовые траектории проходят точку  $\Pi_2$  с  $d\mu/dt \equiv 0$ . Выход с  $u^\circ = -U$  на ограничение  $\Gamma_3$  возможен в любой точке. В мо-

мент выхода, для предотвращения нарушения фазового ограничения, должно реализоваться переключение: перемена управления с  $u^\circ = -U$  на  $u^\circ = +U$ . При этом, в случае выхода на  $\Gamma_3$  в точках с координатами  $y_3 < x_{20}$  фазовое ограничение нарушается. При выходе в точки с  $y_3 > x_{20}$  нарушений не будет. В случае выхода в точку  $y_3 = x_{20}$  интегральное слагаемое в выражении для  $\psi_3(t)$  отрицательно. Поэтому оставаться на фазовом ограничении в этой точке ( $u = 0$ ) траектория может, когда неинтегральное слагаемое становится положительным в момент выхода на ограничение.

Выход на фазовую границу  $\Gamma_3$  всегда должен сопровождаться реализацией переключения управления или остановкой процесса. В первом случае последующий участок траектории с  $u^\circ = U$  является конечным и должен приходиться в требуемую конечную точку — на линию  $y_2 = \Omega - TU$ . Это реализуется при выходе траектории с  $u^\circ = -U$  на фазовое ограничение  $\Gamma_3$ , если точка выхода находится на отрезке  $[K_1, K_2]$  (фиг. 2). Отметим, что при выходе в точку  $K_2$  величина  $d\mu/dt \neq 0$ . Выход в точки  $\Gamma_3$ , находящиеся выше  $K_1$ , приводит к тому, что после переключения фазовая точка будет находиться выше линии  $\Omega - TU$  и с управлением  $u^\circ = +U$  попасть на нее не может.

Исследуем случай, когда неинтегральное слагаемое в выражении для  $\psi_3(t)$  равно нулю. Это возможно, когда  $\psi_3(0) + [\psi_1(0) - \psi_2(0)]T = 0$ ,  $\psi_1(0) - \psi_2(0) = 0$ . Однако на начальном участке должно выполняться  $H = \psi_1(0)(\Omega - x_3) + \psi_2(0)x_3$ , т. е.  $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$ . Вспоминая требование  $\psi_2(t_f) = 0$ , заключаем (2.1), что и  $d\mu/dt \equiv 0$ . Случай обращения в нуль неинтегрального члена приводит к рассмотрению вырожденного случая, когда  $\|\psi_1\| + \|\psi_2\| + \|\psi_3\| + \|d\mu/dt\| = 0$ .

2.3. Множество начальных состояний имеет четыре характерные области  $S_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , которые не все удается графически изобразить на фиг. 1.2. Первая область  $\{y_i(0)\} \in S_1$  допускает управление без выхода на ограничение. Для второй области  $\{y_i(0)\} \in S_2$  начальные условия таковы, что: а) невозможно подыскать управление ввиду его ограниченности, которое смогло бы обеспечить ненарушение ограничения (зона между прямой  $\Gamma_3$  и поднятой по оси  $y_2$  на величину  $2TU$  касательной траекторией  $\gamma_1 = h_2 + 2TU$ ); б) величина управления  $U$  оказывается недостаточной для попадания в конечное состояние с одним переключением (зона между прямой  $\Gamma_3$  и траекторией  $\gamma_2 = (\Omega + TU) \exp - (x_{20} + \Omega T - y_3) (T^2 U)^{-1}$ ). Аналогичные зоны можно определить и для границы  $\Gamma_2$ .

Область  $S_2$  определяется неравенствами

$$(2.7) \quad \begin{aligned} [y_3(0) \mp x_{20}] T^{-1} \pm TU &\geq (\leq) y_2^\mp > (<) (\Omega \pm TU) \times \\ &\times \exp [-x_{20} + \Omega T \pm y_3(0)] (T^2 U)^{-1} \\ [y_3(0) \mp x_{20}] T^{-1} \pm TU &\geq (\leq) y_2^\mp > (<) 2TU \mp TU \times \\ &\times \exp [x_{20} \mp y_3(0)] (T^2 U)^{-1} \end{aligned}$$

Здесь знаки неравенств, взятые в скобки, соответствуют нижним знакам плюс или минус.

Начальные состояния  $\{y_i(0)\} \in S_3$  таковы, что оказывается возможным найти управление, обеспечивающее ненарушение ограничений, исходя из необходимых условий принципа максимума (в рассматриваемом

случае  $\psi_3(t) \neq 0, d\mu/dt \equiv 0$ ). Если  $\{y_i(0)\} \in S_{1,2,3}$ , то такие начальные условия принадлежат к четвертой области  $S_4$  и соответствуют вырожденному случаю. Сюда относятся начальные условия, из которых строятся траектории, проходящие через точку покоя  $\Pi_2$ .

3. Синтез управления. Синтез заключается в определении принадлежности начальных условий к одной из перечисленных областей  $S_k$  и указанию последовательности перемены знаков управления в зависимости от фазового состояния. Построим синтез оптимального управления для задачи без фазовых ограничений. Из фиг. 1 следует, что если начальная фазовая точка системы (1.1)  $\{y_1(0), y_2^-(0)\}$  находится ниже кривой  $y_2 = f_1(y_1)$ , то оптимальным управлением является  $u^\circ = -U$  от исходной точки до линии 1—2 с последующим переключением на ней и движением по линии 4—5 до конечной точки. Если же начальная фазовая точка  $\{y_1(0), y_2^+(0)\}$  находится выше кривой  $y_2 = f_2(y_1)$ , то оптимальным управлением будет  $u^\circ = +U$  от исходной точки до линии 5—6 с последующим переключением на ней  $u^\circ = -U$  и движением по линии 2—3 до конечной точки.

Отметим, что одновременно обе точки  $\{y_1(0), y_2^\mp(0)\}$  находиться между линиями  $y_2 = f_{1(2)}(y_1)$  не могут. Следовательно, указанное выше правило позволяет однозначно выбирать оптимальное управление в задаче без фазовых ограничений. Можно найти значения координат  $y_2[t_p^\pm] = g[y_1(0), y_2^\pm(0)]$ , при которых происходит переключение управления (решая совместно уравнения (2.4) и (2.6)). Время перехода из начальной точки в точку, где происходит переключение управления, равно  $t_p^\pm = T \ln y_2(0) y_2^{-1}[t_p^\pm]$ . Найдем  $y_3[t_p^\pm] = y_3(0) \pm TU t_p^\pm$ .

3.1.  $\{y_i(0)\} \in S_1$  и синтез осуществляется без выхода на ограничения по указанному выше правилу, если выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & 2TU - TU \exp[x_{20} - y_3(t_p^-)] (T^2U)^{-1} \geq g[y_1(0), y_2^-(0)] \\
 & y_3(t_p^-) < x_{20} \\
 & [y_3(t_p^-) - x_{20}] T^{-1} + TU \geq g[y_1(0), y_2^-(0)] \\
 & x_{20} \leq y_3(t_p^-) < x_{20} + \Omega T \\
 & \Omega + TU > g[y_1(0), y_2^-(0)], y_3(t_p^-) > x_{20} + \Omega T \\
 & \Omega + TU > g[y_1(0), y_2^-(0)] \geq 2TU + (\Omega - TU) \exp[\Omega T - \\
 & - x_{20} - y_3(t_p^-)] (T^2U)^{-1}, y_{31} \leq y_3(t_p^-) \leq x_{20} + \Omega T \\
 & \Omega + TU > g[y_1(0), y_2^-(0)] \geq TU + [y_3(t_p^-) + x_{20}] T^{-1}, \\
 & y_3(t_p^-) < y_{31} \\
 & -2TU + TU \exp[x_{20} + y_3(t_p^+)] (T^2U)^{-1} \leq g[y_1(0), y_2^+(0)] \\
 & y_3(t_p^+) \geq \Omega T - x_{20} \\
 & \Omega - TU > g[y_1(0), y_2^+(0)] \geq -2TU + (\Omega + TU) \times \\
 & \times \exp[y_3(t_p^+) - \Omega T - x_{20}] (T^2U)^{-1}, x_{20} + \Omega T \leq y_3(t_p^+) \leq y_{32} \\
 & \Omega - TU > g[y_1(0), y_2^+(0)], y_3(t_p^+) < \Omega T - x_{20} \\
 & \Omega - TU > g[y_1(0), y_2^+(0)] \geq [y_3(t_p^+) - x_{20}] T^{-1} + TU \\
 & y_3(t_p^+) > y_{32}
 \end{aligned}$$

Здесь  $y_{31}, y_{32}$  — наибольшие по модулю корни уравнений

$$\begin{aligned} (\Omega - TU) \exp [x_{20} + \Omega T - y_{31}] (T^2 U) &= (y_{31} + x_{20}) T^{-1} - TU \\ (\Omega + TU) \exp (x_{20} + \Omega T - y_{32}) (T^2 U)^{-1} &= (x_{20} - y_{32}) T^{-1} + TU \end{aligned}$$

3.2. Для начальных условий, принадлежащих области  $S_2$ , удовлетворяющих неравенствам (2.7), решения не существует.

3.3. На плоскости  $\{y_2, y_3\}$  начальные условия, принадлежащие  $S_3$ , удовлетворяют уравнению

$$y_2^-(0) = TU \exp [y_3(0) - x_{20}] (T^2 U)^{-1}$$

На плоскости  $\{y_1, y_2\}$  должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} (TU - \Omega) \exp [y_1(0) - y_{11}] (TU + \Omega)^{-1} &\geq y_2^-(0) \geq TU \\ y_{11} \leq y_1(0) \leq y_{12}, \quad y_{21} \geq y_2^-(0) \geq TU, \quad y_{12} < y_1(0) \end{aligned}$$

где  $y_{11}, y_{12}, y_{21}$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} y_{11} &= \Omega + (TU - \Omega) \ln TU (TU - \Omega)^{-1}, \quad TU \ln TU (y_{21} - \\ &- 2TU)^{-1} = y_{21} - TU, \quad y_{12} = y_{11} - (TU - \Omega) \ln y_{21} (TU)^{-1} \end{aligned}$$

Синтез осуществляется следующим образом: проверяются условия п. 3.3 на принадлежность области  $S_3$ ; управление на первом этапе всегда отрицательное:  $u^\circ = -U$  до тех пор, пока система не достигнет ограничения по  $x_2$  с нулевой скоростью (точка  $\Pi_2$ ); в течение времени  $\Delta t_0 = (y_{22} - y_{11}) T \Omega^{-1}$ ,  $y_{22} = y_1(0) + (TU + \Omega) \ln TU [y_2^-(0)]^{-1}$  система пребывает на ограничении с нулевым управлением, далее включается  $u^\circ = +U$ , которое приводит систему в конечное состояние.

3.4. Начальные положения, не принадлежащие указанным трем областям, принадлежат  $S_4$  и соответствуют вырожденному случаю. Установить вид управления здесь можно следующими рассуждениями. Траектория системы состоит из трех участков: выход на ограничение  $\Gamma_1$  в точке покоя  $\Pi_2$  без попадания в запретную область  $S_2$ , нахождение в точке  $\Pi_2$  некоторое время, оптимальный по быстродействию сход с фазового ограничения с выходом в требуемые конечные условия. Суммарное время движения должно быть минимальным. Если  $t_c$  — момент времени, когда система сходит с ограничения и уже больше на него не возвращается, то на последнем участке в течение времени  $\Delta t_f = t_f - t_c$ , исходя из требования максимального быстродействия и попадания в требуемые конечные условия, оптимальным управлением будет  $u^\circ = +U$  (имеется в виду движение из  $\Pi_2$  на линию  $\Omega - TU$ ). Справедливы соотношения

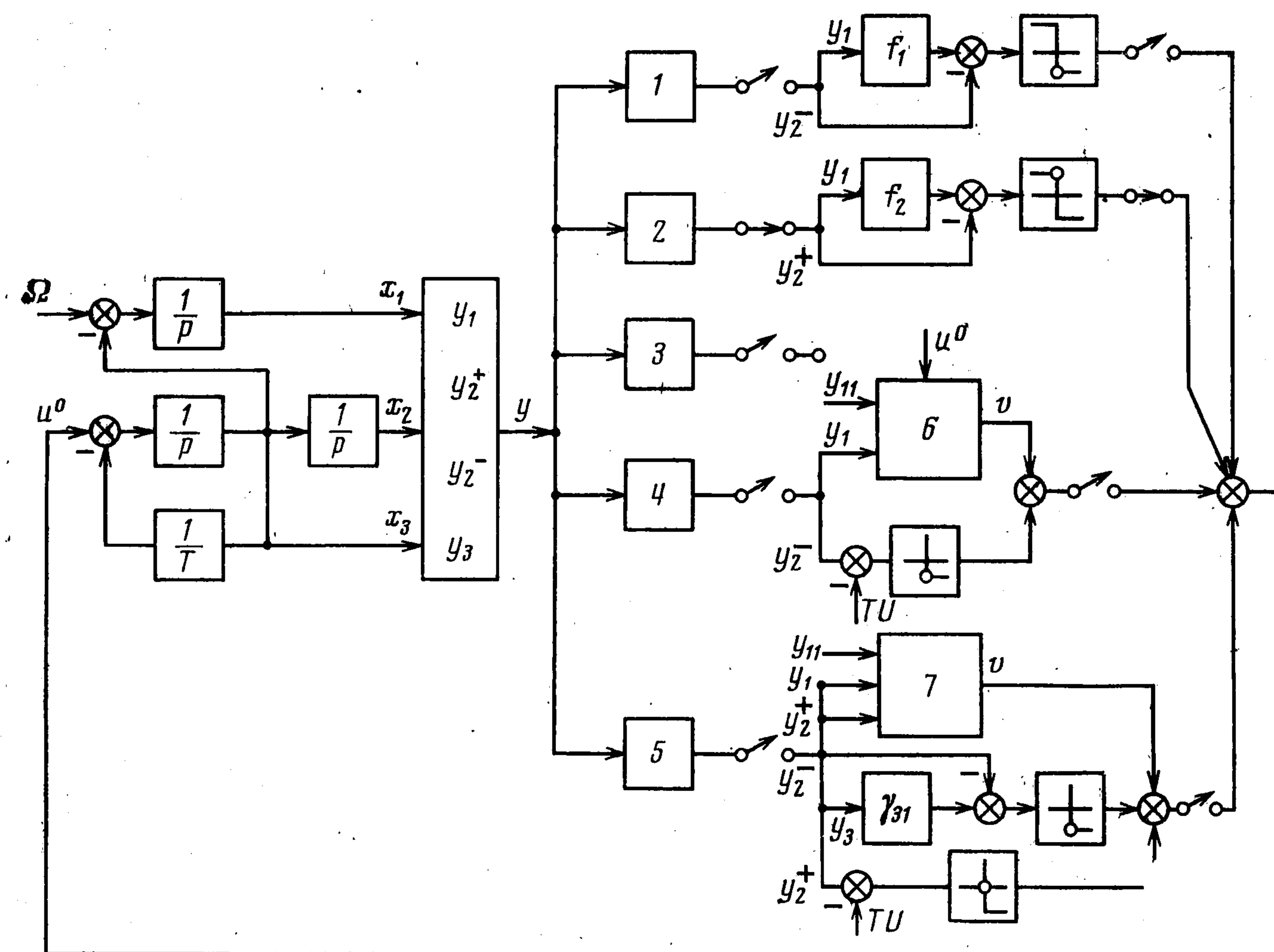
$$x_3(t_f) = \Omega, \quad x_3(t_c) = 0, \quad \Delta t_f = T \ln TU (TU - \Omega)^{-1}$$

Значение  $x_2(t_f)$  определится из условия  $x_2(t_c) = x_{20}$

$$(3.2) \quad x_2(t_f) = x_{20} + T^2 U \ln TU (TU - \Omega)^{-1} + T (TU - \Omega)$$

С учетом (1.1) и (3.2) получим, что время максимального быстродействия равняется  $t_f = [x_2(t_f) - x_1(0) - x_{20}] \Omega^{-1}$ . К моменту времени  $t_c$  управление должно привести объект в состояние

$$(3.3) \quad x_1(t_c) = x_2(t_f) - x_{20} - \Omega \Delta t_f, \quad x_2(t_c) = x_{20}, \quad x_3(t_c) = 0$$



Фиг. 3

На плоскости  $\{y_2, y_3\}$  это состояние находится на  $\Gamma_1$  с координатами  $\{x_{20}, \Omega - TU\}$ .

На участке  $0 \leq \tau \leq t_c$  управление должно быть таким, чтобы система не попадала в запретную область  $S_2$

$$(3.4) \quad \{y_i(\tau), 0 \leq \tau \leq t_c\} \cap S_2 = 0$$

Оптимальное управление на отрезке  $[0, t_c]$ , необходимо удовлетворяющее условиям (3.3), (3.4), не является единственным.

Действительно, для минимального времени  $t_m$  перевода точки  $y_i(0) \in S_4$  на границу  $\Gamma_1$  в точку  $\{x_{20}, \Omega - TU\}$  должно выполняться соотношение  $t_c - t_m = \Delta t_b \geq 0$ . Очевидно, на отрезке времени  $\Delta t_b$  существуют бесконечно много управлений, переводящих объект из фазовой точки  $y_i(t_m)$  в  $y_i(t_c)$ . В силу этого существует целое множество управлений, одинаково быстро переводящих объект из  $S_4$  в конечную точку.

Поэтому на практике синтез можно осуществлять следующим образом. Из исходной точки при одном переключении управления система переводится в точку покоя, в течение времени  $\Delta t_1 = [x_1(t_b) - x_1(t_1)] \Omega^{-1}$  система пребывает на ограничении, далее включается управление  $u^0 = +U$ , которое переводит объект в конечное состояние. На фиг. 3 изображена структурная схема синтеза оптимального управления.

Управление в замкнутом контуре осуществляется следующим образом. В блоках 1 — 4 проверяется принадлежность начальных условий зонам  $S_k$ ,  $k = 1-3$  по формулам (3.1), (2.7), и формулам п. 3.3 соответ-

ственно. Если  $\{y_i(0)\} \in S_{1,2,3}$ , то начальные условия принадлежат  $S_4$  (блок 5). При выполнении условий принадлежности происходит замыкание соответствующих ключей, которые переводят схему в замкнутое состояние (остальные ключи разомкнуты). Для  $S_1$  управление ведется по линии переключения; для  $S_3, S_4$  управляющий сигнал формируется в блоках 6, 7, где величине  $v$  присваивается значение 0,  $U$  при выполнении любого из условий:

для блока 6

$$\begin{aligned} \text{а) } U \operatorname{sign} u^\circ(t) - \Omega T^{-1} < 0, \quad y_{11} - y_1 < 0; \quad v = 0; \quad \text{б) } y_{11} - \\ - y_1 = 0; \quad v = U; \quad \text{в) } U \operatorname{sign} u^\circ(t) - \Omega T^{-1} > 0, \quad y_{11} - y_1 < 0; \\ v = U \end{aligned}$$

для блока 7

$$\begin{aligned} \text{а) } y_2^+ \leq TU, \quad y_{11} - y_1 < 0; \quad v = 0; \quad \text{б) } y_{11} - y_1 = 0; \quad v = U; \\ \text{в) } y_2^+ > -TU, \quad y_{11} - y_1 < 0, \quad v = U \end{aligned}$$

4. Решения для произвольных  $\Omega, TU, x_{20}$ . Видно, что при  $\Omega < 0, TU > |\Omega|, x_{20} > T^2U$  реализация точки покоя с последующим выполнением условий на правом конце возможна, если координата точки покоя по  $y_3$  примет отрицательное значение. Все построение на плоскости  $\{y_2, y_3\}$  станет симметричным относительно начала координат. Случай  $TU \leq |\Omega|$  ( $\Omega > 0, \Omega < 0$ ) не имеет физического содержания, так как при таком условии координата  $x_3(t_f)$  не сможет принять значения  $\Omega$ . Если  $\Omega = 0$ , то при  $x_2(0) + x_1(0) < x_{20}$  задача не имеет решения, в противном будут справедливы рассуждения п. 3.1, 3.2. Взаимное положение полос (2.5) определяется соотношением величин  $x_{20}$  и  $T^2U$ . Если  $x_{20} \geq T^2U$ , то полосы имеют общую часть. Случай  $x_{20} < T^2U$  (полосы не имеют общих частей) может быть рассмотрен аналогично.

Поступила 23 VI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.
2. Федунев В. Е. Синтез управления в задаче с фазовыми ограничениями. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.