Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ВНУТРЕННЕМ РЕЗОНАНСЕ

А. Л. Куницын

(Москва)

Рассматривается задача об устойчивости по Ляпунову нулевого решения многомерной нелинейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и голоморфными правыми частями. Исследуется критический случай, когда характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет лишь комплексно-сопряженные корни, по модулю равные единице, а между характеристическими показателями и частотой невозмущенного движения существуют определенные целочисленные соотношения (внутренний резонанс).

Для любого типа резонанса дается нормальная форма системы, сводящая исходную задачу к задаче об устойчивости при внутреннем резонансе для автономных систем, рассмотренную ранее [1], что позволяет получить необходимые и достаточные условия устойчивости модельной системы — для наиболее важных случаев резонанса нечетного порядка. Показывается, что в большинстве случаев из неустойчивости модельной системы следует неустойчивость полной системы.

Показывается, что резонанс четного порядка может привести к асимптотической устойчивости системы. Для системы второго порядка даются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости по первым нелинейным членам нормальной формы.

Указываются случаи распространения полученных результатов на устойчивость гамильтоновых систем.

Рассмотрим задачу об устойчивости тривиального решения системы уравнений

$$dx_* \,/\, dt = X_* \,(x_*,\ t) \tag{0.1}$$

$$X_*(0,t)\equiv 0,\quad X_*(x_*,t)=A(t)\,x_*+\sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} X_*^{(l)}(x_*,t)$$

Здесь x_* и $X_* \in E_{2n}$, $X_*\,(x_*,\ t)$ — аналитическая, периодическая по времени t вектор-функция с вещественным периодом ω.

Исследуем критический случай, когда матрица $A\,(t)$ такова, что все корни характеристического уравнения комплексные и по модулю равны единице. Тогда, как известно [2], задача об устойчивости тривиального решения неавтономной системы (0.1) сводится к критическому случаю устойчивости n пар чисто мнимых корней для автономной системы, если между характеристическими показателями $\pm\lambda_s$ $(\lambda_s^2 < 0,\ s = 1,2,\ \ldots,\ n)$ и числом $2\pi i\,/\,\omega$ не существует никаких соотношений вида

$$\langle \Lambda P\rangle = \frac{2\pi i}{\omega}\,p,\quad i=\sqrt{-1},\quad p=0,\ \pm 1\ \pm 2,\ldots \tag{0.2}$$

$$\Lambda = (\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n),\ P = (p_1,\ \ldots,\ p_n)$$

$$|P| = p_1 + \ldots + p_n = k \geqslant 3,\ p_s \geqslant 0$$

Здесь Λ — вектор характеристических показателей системы, P — n-мерный вектор с целочисленными компонентами, $p_1, \ldots, p_n$ — взаимно простые целые числа, включая нуль.

Определение. Будем говорить, что система (0.1) обладает внутренним резонансом k-го порядка, если выполняются соотношения (0.2).

Цель работы — исследование задачи об устойчивости тривиального решения системы (0.1) при внутреннем резонансе.

Во всех дальнейших рассуждениях ограничимся следующими предположениями: 1) все λ_s — различные (некоторые случаи кратных частот были рассмотрены в [3]); 2) ни одно из отношений $\lambda_s \omega i/\pi$, $s = 1, 2, \ldots, n$ не является целым числом (в противном случае характеристическое уравнение имело бы корни, равные ± 1); 3) при заданном Λ существует единственный резонансный вектор P, удовлетворяющий условиям (0.2), т. е. отсутствует взаимодействие резонансов, когда одни и те же частоты участвуют одновременно в нескольких резонансных соотношениях.

Как известно [2,4], с помощью неособенного линейного преобразования с периодическими коэффициентами систему (0.1) можно записать в виде

$$x^\cdot = \lambda x + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} X^{(l)}(x, y, t), \quad y^\cdot = -\lambda y + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} Y^{(l)}(x, y, t) \tag{0.3}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n), \quad \lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

Здесь x, y — комплексно-сопряженные векторы, λ — диагональная матрица, $X^{(l)}(x, y, t)$ и $Y^{(l)}(x, y, t)$ — комплексно-сопряженные вектор-функции, периодические по t с периодом ω, компоненты которых $Y_s^{(l)}$ и $Y_s^{(l)}$ представляются формами l-го порядка, так что

$$X_s^{(l)} = \sum_{|k_s|+|l_s|=l} R_{k_s l_s}(t)\, x_1^{k_{s1}} \ldots x_n^{k_{sn}} y_1^{l_{s1}} \ldots y_n^{l_{sn}}$$

$$R_{k_s l_s}(t) = R_{k_s l_s}(t+\omega), \quad k_s = (k_{s1}, \ldots, k_{sn}) \quad l_s = (l_{s1}, \ldots, l_{sn}),$$

$$|k_s| = k_{s1} + \ldots + k_{sn}, \quad |l_s| = l_{s1} + \ldots + l_{sn}, \quad k_{sj}, l_{sj} \geqslant 0;$$
$$j, s = 1, 2, \ldots, n$$

где k_s, l_s — всевозможные целочисленные векторы.

В дальнейшем большое значение имеет нормальная форма [5] системы (0.3).

1. Приведение к нормальной форме. Покажем, что с помощью нелинейного (полиномиального) преобразования Ляпунова с периодическими коэффициентами систему (0.3) можно привести к форме, в которой нелинейные члены до сколь угодно высокого порядка не содержат явно времени t.

С этой целью преобразуем систему (0.3) посредством замены

$$x = u + \sum_{l=m}^{2N+1} U^{(l)}(u, v, t), \quad y = v + \sum_{l=m}^{2N+1} V^{(l)}(u, v, t)$$

где N — сколь угодно большое натуральное число, а $U^{(l)}$ и $V^{(l)}$ — комплексно-сопряженные вектор-функции, компоненты которых $U_s^{(l)}$, $V_s^{(l)}$, $s = 1, 2, \ldots, n$-формы l-го порядка с периодическими по t коэффициентами периода ω, так что

$$U_s = \sum_{|k_s|+|l_s|=l} U_{k_s l_s}(t) u_1^{k_{s1}} \dots u_n^{k_{sn}} v_1^{l_{s1}} \dots v_n^{l_{sn}}$$

Функции $U_{k_s l_s}$, как известно [3, 4], найдутся из уравнений

$$\frac{dU_{k_s l_s}}{dt} + \varkappa_{k_s l_s} U_{k_s l_s} = \Phi_{k_s l_s} - C_{k_s l_s} \tag{1.1}$$

$$\varkappa_{k_s l_s} = \langle (k_s - l_s)\Lambda\rangle - \lambda_s, \quad |k_s| + |l_s| = l$$

Здесь $C_{k_s l_s}$ — коэффициенты в формах l-го порядка преобразованных уравнений для u_s и v_s, $\Phi_{k_s l_s}$ — известные функции от $U_{k_s l_s}$ и $V_{k_s l_s}$ при $|k_s| + |l_s| \leqslant l - 1$. При $l = m$ функции $\Phi_{k_s l_s}$ обращаются в $R_{k_s l_s}$, т. е. являются заданными периодическими функциями t периода ω. В дальнейшем индексы k_s, l_s опустим.

Для уравнений (1.1) могут встретиться два случая. Пусть в первом из них не выполняется условие

$$\varkappa = \frac{2\pi i}{\omega} q, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1.2}$$

Соответствующие таким векторам k_s, l_s члены преобразованных уравнений будем называть нерезонансными. Тогда, как известно [4], для любых наперед заданных констант C существует единственное периодическое (периода ω) решение уравнения (1.1)

$$U = e^{-\varkappa t}\left[\frac{e^{-\varkappa\omega}}{1 - e^{-\varkappa\omega}} \int_0^\omega e^{\varkappa t}\Phi(t)\,dt + \int_0^t e^{\varkappa t}\Phi(t)\,dt\right] \tag{1.3}$$

Полагая $C = 0$, можно таким образом уничтожить все нерезонансные члены.

Рассмотрим теперь такие векторы k_s, l_s, для которых условие (1.2) выполняется. Соответствующие этим векторам члены преобразованных уравнений назовем резонансными. В этом случае решение (1.3) для U теряет смысл. Однако если положить

$$C = e^{-\varkappa t} c, \quad c = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \Phi(t) e^{\varkappa t} dt \tag{1.4}$$

то для всех резонансных векторов k_s, l_s функции $U(t)$ по-прежнему выйдут периодическими.

Действительно, используя разложение Фурье для $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu \exp\left(\frac{2\pi t}{\omega} \nu t\right)$$

общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$U(t) = e^{-\varkappa t}\left\{B + \int_0^t \left[\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu \exp\left(\frac{2\pi i}{\omega}\nu + \varkappa\right) t - c\right] dt\right\}$$

Здесь c выбрано согласно (1.4), а B — произвольная постоянная. Тогда при $\varkappa = 2q\pi i / \omega$ получим

$$U(t) = e^{-\varkappa t}\left\{B + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu \frac{\omega \exp[2\pi i\omega^{-1}(\nu + q)\, t]}{2\pi i\,(\nu + q)}\right\}, \quad \nu \neq -q$$

т. е. $U(t)$ — ω-периодическая функция t при любом значении B. Но если все U при $|k_s| + |l_s| = m$ выйдут ω-периодическими, то все $\Phi(t)$, входящие в уравнения (1.1), для $|k_s| + |l_s| = m + 1$ будут заданными ω-периодическими функциями t, и следовательно, для определения функций U на следующем шаге преобразования получим уравнения того же вида, что и при $|k_s| + |l_s| = m$. Таким образом, как бы велико ни было натуральное число $l = |k_s| + |l_s|$, все функции $U(t)$, удовлетворяющие уравнениям (1.1), для $|k_s| + |l_s| \leqslant l$ выйдут ω-периодическими.

Выясним структуру преобразованных уравнений. Очевидно, C будут постоянными величинами для тех k_s, l_s, которые обращают $\varkappa$ в нуль. Нетрудно видеть, что соотношения $\varkappa = 0$ будут выполняться тождественно по Λ при всяком нечетном l, если

$$k_{sj} = l_{sj} + \delta_{sj}, \qquad s, j = 1, 2, \ldots, n$$

где δ_{sj} — символ Кронекера. Соответствующие этим резонансным векторам k_s, l_s слагаемые будем называть членами тождественного резонанса.

Заметим, что $\varkappa$ может обращаться в нуль и независимо от четности l, если Λ удовлетворяет условию внутреннего резонанса (0.2) при $p = 0$. Коэффициенты C для соответствующих резонансных векторов k_s, l_s также выйдут постоянными и определятся по формуле (1.4). Однако вычисление таких резонансных векторов целесообразно провести, рассматривая общий случай (1.2), включающий в себя и условия внутреннего резонанса (0.2).

Очевидно, соотношения (1.2) для форм l-го порядка совпадут с (0.2) в двух случаях

$$1)\ l_{sj} = \varepsilon p_j + h_{sj} - \delta_{sj}, \quad k_{sj} = h_{sj}, \quad q_{k_s l_s} = -\varepsilon p$$

$$2)\ k_{sj} = \varepsilon p_j + h_{sj} + \delta_{sj}, \quad l_{sj} = h_{sj}, \quad q_{k_s l_s} = \varepsilon p$$

Здесь h_{sj} — всевозможные неотрицательные целые числа, такие, что (знак плюс берется в первом случае, а минус — во втором)

$$\varepsilon k + 2\sum_{j=1}^{n} h_{sj} = l \pm 1$$

а ε принимает все натуральные значения, $\varepsilon = 1, 2, \ldots, \varepsilon'$, где ε' — максимальное целое число, содержащееся в дроби $(l + 1) / k$ в первом случае и в $(l - 1) / k$ — во втором.

Отсюда можно сделать важный для дальнейшего вывод о том, что члены внутреннего резонанса k-го порядка могут появиться лишь в формах не ниже, чем $k - 1$-го порядка.

Таким образом, в переменных u_s, v_s первая группа комплексно-сопряженных уравнений с точностью до членов $2N+1$-го порядка примет вид

$$v_s u_s^{\bullet} = \lambda_s r_s + r_s \sum_{l \geqslant m}^{2N+1} \sum_{2|k_s|=l-1} c_{k_{sj}} \prod_{j=1}^{n} r_j^{k_{sj}} + \tag{1.5}$$

$$+ \sum_{l=k-1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_1} \exp\left(\frac{2\pi i}{\omega} \varepsilon p t\right) \prod_{j=1}^{n} v_j^{\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s|=l+1-\varepsilon k} c_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{n} r_j^{h_{sj}} +$$

$$+ r_s \sum_{l=k+1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_2} \exp\left(-\frac{2\pi i}{\omega} \varepsilon p t\right) \prod_{j=1}^{n} u_j^{\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s|=l-1-\varepsilon k} c_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{n} r_j^{h_{sj}} + \ldots$$

$$c_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \Phi_{h_{sj}}(t) \exp\left(\pm \frac{2\pi i}{\omega} \varepsilon p t\right) dt, \qquad r_s = u_s v_s, \qquad s = 1, 2, \ldots, n$$

Здесь ε_1 и ε_2 — наибольшие целые числа, содержащиеся в дробях $(l + 1)/k$ и $(l - 1)/k$ соответственно; знак минус берется для первой группы членов внутреннего резонанса, а плюс — для второй; невыписанные члены — не ниже, чем $2(N+1)$ порядка относительно $r_1, \ldots, r_n$.

Для исключения времени в членах внутреннего резонанса системы (1.5) от переменных u_s, v_s перейдем к новым переменным ξ_s, η_s, после чего получим

$$\eta_s \xi_s^{\bullet} = r_s \sum_{l \geqslant m}^{2N+1} \sum_{2|k_s|=l-1} c_{k_{sj}} \prod_{j=1}^{n} r_j^{k_{sj}} + \tag{1.6}$$

$$+ \sum_{l=k-1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_1} \prod_{j=1}^{n} \eta_j^{\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s|=l+1-\varepsilon k} c_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{n} r_j^{h_{sj}} +$$

$$+ r_s \sum_{l=k+1}^{2N+1} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon_2} \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{\varepsilon p_j} \sum_{2|h_s|=l-1+\varepsilon k} c_{h_{sj}}^{(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{n} r_{j_i}^{h_{sj}} + \ldots$$

$$u_s = \xi_s e^{\lambda_s t}, \quad v_s = \eta_s e^{-\lambda_s t}, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

В результате отделения вещественных и мнимых частей система (1.6) приводится к системе $2n$-го порядка в критическом случае $2n$ нулевых корней с $2n$ группами решений (а не с n нулевыми корнями, как в нерезонансном случае) с постоянными коэффициентами до членов $2N+1$-го порядка включительно.

Систему, полученную из (1.6) отбрасыванием членов, выше $2N+1$-го порядка, будем называть модельной.

Замечание. Полученная нормальная форма модельной системы показывает, что она полностью совпадает с нормальной формой для автономных систем [1] и остается одной и той же вне зависимости от того, имеет ли место резонанс только между характеристическими показателями системы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ или между этими показателями и частотой невозмущенного периодического движения.

На основании изложенного может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема 1. Задача об устойчивости периодического движения при внутреннем резонансе для систем выше второго порядка в случае, когда она решается конечным числом членов уравнений возмущенного движения, полностью сводится к задаче об устойчивости равновесия для автономных систем с внутренним резонансом того же порядка.

Замечание. Практически наиболее важный случай резонанса нечетного порядка для системы второго порядка был рассмотрен в [6]. Резонанс четного порядка рассмотрен ниже.

Полученная нормальная форма позволяет выделить два простейших и в то же время наиболее важных случая решения задачи устойчивости. Один из них соответствует резонансу нечетного порядка при $k = m + 1$ для системы произвольного порядка ($n \geqslant 1$), а другой — резонансу четного порядка при $n = 1$.

Перейдем к более подробному рассмотрению этих случаев.

2. Резонанс нечетного порядка. При k нечетном в системе (1.6) будут отсутствовать члены тождественного резонанса. Однако в общем случае $m > k - 1 \geqslant 2$ структура резонансных членов остается все еще весьма сложной для полного решения задачи. Практически наиболее важен случай $m = k - 1 \geqslant 2$. Полное решение этой задачи для модельной системы было дано в [1], где получены необходимые и достаточные условия устойчивости, из которых следует, что модельная система либо может сохранять нейтральность линейного приближения, либо стать неустойчивой. Там же было показано, что неустойчивость модельной системы, за исключеним некоторых вырожденных случаев, обязательно влечет за собой неустойчивость полной системы. Очевидно, последний результат также справедлив и для исследуемой задачи устойчивости периодических движений, так как по сравнению с автономными системами, рассмотренными в [1], члены выше $2N + 1$-го порядка, содержащиеся в уравнениях (1.6), зависят от t периодически и, следовательно, в достаточно малой окрестности начала координат будут ограниченными функциями, что и требуется при доказательстве неустойчивости, данном в [1].

Из изложенного также следует, что полученные результаты частным образом распространяются и на устойчивость периодических движений гамильтоновых систем.

3. Резонанс четного порядка. В этом случае модельная система становится более сложной из-за присутствия в ней членов тождественного резонанса. Это не позволяет получить полного решения для систем выше второго порядка. Для систем же второго порядка исходная задача сводится к критическому случаю двух нулевых корней с двумя группами решений, детально рассмотренному в [3].

Интересно, однако, выяснить, какие из возможных вариантов решения в указанном критическом случае (устойчивость, неустойчивость, асимптотическая устойчивость) реализуются при внутреннем резонансе, а также получить условия устойчивости непосредственно по коэффициентам нормальной формы.

Дадим решение задачи для наиболее важного случая резонанса четвертого порядка. При $n = 1$ условия внутреннего резонанса приобретают вид $2\lambda\omega = p\pi i$, при этом на основании сделанных выше предположений p может принимать лишь нечетные значения. Нормальная форма системы будет (комплексно-сопряженное уравнение для η не выписано)

$$\xi^{\cdot} = c_1\xi^2\eta + c_2\eta^3 + O(\xi\eta)^2$$

Здесь c_1 и c_2 — комплексные коэффициенты, определяемые по формулам (1.4) через коэффициенты исходной системы. Вводя полярные координаты r и θ, придем к системе вида

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} r^{\cdot} &= r^3\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}\,[A+\cos(\psi-4\theta)]+\ldots\\ r\theta^{\cdot} &= r^3\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}\,[B+\sin(\psi-4\theta)]+\ldots \end{aligned}$$

Здесь

$$A=\frac{a_1}{\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}},\quad B=\frac{b_1}{\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}},\quad \sin\psi=\frac{b_2}{\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}},$$

$$\cos\psi=\frac{a_2}{\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}}$$

$$\xi=re^{i\theta},\quad \eta=re^{-i\theta},\quad c_s=a_s+ib_s,\quad s=1,2$$

невыписанные члены не ниже четвертого порядка относительно r.

Задачу об устойчивости системы (3.1) полностью решает теорема Г. В. Каменкова [3], согласно которой тривиальное решение системы (3.1) неустойчиво, если хотя бы при одном значении θ_*, являющемся корнем уравнения

$$(3.2)\qquad \Phi(\theta)\equiv r^4\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}\,[B+\sin(\psi-4\theta)]=0$$

форма

$$R(\theta_*)\equiv r^4\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}\,[A+\cos(\psi-4\theta_*)]>0$$

Если же для всех решений уравнения (3.2) будет $R(\theta_*)<0$, то тривиальное решение асимптотически устойчиво. При знакоопределенной $\Phi(\theta)$ вопрос об устойчивости решается знаком интеграла

$$G=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R(\theta)}{\Phi(\theta)}\,d\theta$$

а именно: при $G>0$ — неустойчивость, при $G<0$ — асимптотическая устойчивость. При $R(\theta_*)\leqslant 0$ или $G\equiv 0$ вопрос об устойчивости решается членами выше третьего порядка относительно r.

Очевидно при $|B|<1$ все значения θ, обращающие $R(\theta)$ в нуль, находятся из уравнения $\sin(4\theta-\psi)=B$. На этих решениях форма $R(\theta)$ принимает значения

$$R=r^4\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}\,(A\pm\sqrt{1-B^2})$$

и может быть как положительной, так и отрицательной.

При $|B|>1$ форма $\Phi(\theta)$ становится знакоопределенной. Проводя элементарные вычисления, убеждаемся, что в этом случае $G\equiv 0$, и, следовательно, вопрос об устойчивости не решается членами третьего порядка системы (3.1). Аналогично обстоит дело и в случае $A=-\sqrt{1-B^2}$, так как при этом на одном из решений уравнения (3.2) форма R обращается в нуль, а на другом — отрицательна.

На основании изложенного может быть сформулирована следующая теорема, дающая необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости по первым нелинейным членам системы (0.1) для $n = 1$ при резонансе четвертого порядка.

Теорема 2. Для асимптотической устойчивости тривиального решения системы (3.1) (а следовательно, и исходной системы (0.1) при $n = 1$ и резонансе четвертого порядка) необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$a_1 < -\sqrt{a_2^2 + b_2^2 - b_1^2}$$

$$(a_1 \neq -\sqrt{a_2^2 + b_2^2 - b_1^2}, \quad b_1^2 < a_2^2 + b_2^2)$$

Замечание. Даваемые теоремой условия неустойчивости распространяются, в частности, и на гамильтоновы системы. Действительно, как легко проверить, из условий каноничности системы (3.1) вытекает $a_1 = 0$, откуда при $b_1^2 < a_2^2 + b_2^2$ на основании доказанной теоремы заключаем о неустойчивости периодического решения исходной канонической системы.

Автор благодарит В. В. Румянцева и участников руководимого им семинара за обсуждение работы.

Поступила 6 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Каменков Г. В.* Избр. труды, т. 1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. М., «Наука», 1971.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
5. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25.
6. *Куницын А. Л.* Об устойчивости периодических движений при резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.