Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

А. С. Озиранер

(Москва)

Результаты, полученные в [1], распространяются на неавтономные системы и более широкий класс нелинейностей. Рассмотрен вопрос о применении вектор-функции Ляпунова.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad & \mathbf{y}^{\boldsymbol{\cdot}} = Q(t)\mathbf{x} + R(t)\mathbf{y} + \mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y}) + \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & \mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k\end{aligned}$$

где P, Q и R — непрерывные и ограниченные при $t \geqslant 0$ матрицы соответствующих порядков, а функции $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ удовлетворяют условиям

$$(1.2)\qquad \mathbf{Y}(t, 0, \mathbf{y}) \equiv 0, \quad \mathbf{X}(t, 0, \mathbf{y}) \equiv 0$$

$$(1.3)\qquad \frac{\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\| + \|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\|}{\|\mathbf{x}\|} \underset{t\geqslant 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{при } \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \to 0$$

Будем предполагать, что решения линейной системы (1.4) удовлетворяют условию (1.5)

$$(1.4)\qquad \mathbf{x}^{*\boldsymbol{\cdot}} = P(t)\mathbf{x}^*$$

$$(1.5)\qquad \|\mathbf{x}^*(t; t_0, \mathbf{x}_0^*)\| \leqslant B\|\mathbf{x}_0^*\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (B > 0,\ \alpha > 0\text{-const};\ t \geqslant t_0 \geqslant 0)$$

Рассмотрим систему

$$(1.6)\qquad \mathbf{y}^{*\boldsymbol{\cdot}} = R(t)\mathbf{y}^* + \mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y}^*)$$

которая получается из первой группы уравнений (1.1) при $\mathbf{x} = 0$ и решения которой обозначим через $\mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0^*)$. Уравнения в вариациях для системы (1.6) имеют вид

$$(1.7)\qquad \xi^{\boldsymbol{\cdot}} = \left[R(t) + \frac{\partial \mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y}^*)}{\partial \mathbf{y}^*}\bigg|_{\mathbf{y}^*=\mathbf{y}^*(t;\, t_0,\, \mathbf{y}_0^*)}\right]\xi$$

Обозначим через $\Omega(t; t_0, \mathbf{y}_0^*)$ фундаментальную матрицу решений системы (1.7), $\Omega(t_0; t_0, \mathbf{y}_0^*) = E$, где E — единичная матрица; как известно, $\Omega(t; t_0, \mathbf{y}_0^*) = \partial\mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0^*) / \partial\mathbf{y}_0^*$.

2. *Теорема 1.* Предположим, что:

1) нулевое решение системы (1.4) экспоненциально-асимптотически устойчиво (см. (1.5));

2) нулевое решение системы (1.6) устойчиво равномерно по t_0;

3) существуют постоянные $h > 0$ и $N > 0$, такие, что из $t_0 \geqslant 0$, $\| \mathbf{y}_0^* \| \leqslant h$ следует

(2.1) $$\| \Omega (t; t_0, \mathbf{y}_0^*) \| \leqslant N \quad \text{при } t \geqslant t_0$$

Тогда невозмущенное движение $\| \mathbf{x} \| = \| \mathbf{y} \| = 0$ системы (1.1) равномерно устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически x-устойчиво при любых удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.3) функциях $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$.

Доказательство. Как известно [2], условие (1.5) эквивалентно существованию определенно-положительной квадратичной формы $V(t, \mathbf{x})$ с ограниченными коэффициентами, которая удовлетворяет уравнению

$$\partial V(t, \mathbf{x}) / \partial t + \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} V(t, \mathbf{x}) \cdot P(t)\mathbf{x} = - \| \mathbf{x} \|^2$$

Производная от функции V в силу второй группы уравнений (1.1)

(2.2) $$V^{\bullet}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \| \mathbf{x} \|^2 + \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} V(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Согласно (1.3) существует такое β, $0 < \beta < h$, что в области (2.3) выполняется неравенство (2.4)

(2.3) $$t \geqslant 0, \quad \| \mathbf{x} \| \leqslant \beta, \quad \| \mathbf{y} \| \leqslant \beta$$

(2.4) $$V^{\bullet}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant - c_1 \| \mathbf{x} \|^2 \quad (c_1 = \text{const} > 0)$$

Рассмотрим произвольное решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ системы (1.1) с начальными условиями из области

(2.5) $$t_0 \geqslant 0, \quad \| \mathbf{x}_0 \| < \delta, \quad \| \mathbf{y}_0 \| < \delta, \quad \delta < \beta$$

Для этого решения условия

(2.6) $$\| \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \| \leqslant \beta, \quad \| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \| \leqslant \beta$$

выполняются по крайней мере на некотором интервале (t_0, T). Отсюда в силу (2.4) вытекает [3]

(2.7) $$\| \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \| \leqslant c_2 \| x_0 \| e^{-\gamma(t-t_0)} \quad \text{при} \quad t \in (t_0, T) \quad (c_2 > 0, \ \gamma > 0 - \text{const})$$

Условие (1.3) и неравенство (2.7) дают оценку

(2.8) $$\| \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \ \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) \| \leqslant c_3 \| \mathbf{x}_0 \| e^{-\gamma(t-t_0)}$$
$$t \in (t_0, T), \quad c_3 = \text{const} > 0$$

Функция $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, удовлетворяющая системе уравнений

$$\mathbf{y}^{\bullet} = R(t)\mathbf{y} + \mathbf{Y}^{\circ}(t, \mathbf{y}) + Q(t)\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \\ + \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \ \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))$$

может быть представлена формулой [4]

(2.9) $$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0) + \int_{t_0}^{t} \Omega(t; \tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) \times \\ \times [Q(\tau)\mathbf{x}(\tau; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \mathbf{Y}(\tau, \mathbf{x}(\tau; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \ \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))] \, d\tau$$

По условию

(2.10) $$\| Q(t) \| \leqslant M = \text{const} \quad \text{при } t \geqslant 0$$

Из (2.9) на основании (2.7), (2.8), (2.10) и условия 3) теоремы при $t \in \in (t_0, T)$ получаем

$$\begin{aligned}(2.11)\qquad &\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\| \leqslant \|\mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| + \\ &+ N(Mc_2 + c_3)\|\mathbf{x}_0\| \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(\tau - t_0)} d\tau \leqslant \|\mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| + N(Mc_2 + c_3)\gamma^{-1}\|\mathbf{x}_0\|\end{aligned}$$

Пусть ε — сколь угодно малое число, $0 < \varepsilon < \beta$. Выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ в (2.5) столь малым, чтобы выполнялись неравенства (2.12) и (2.13)

$$(2.12)\qquad \delta < {}^1/_2 c_4 \varepsilon, \quad c_4 = \min\{c_2^{-1}, \gamma N^{-1}(Mc_2 + c_3)^{-1}\}$$

$$(2.13)\qquad \|\mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| < {}^1/_2\varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0,\ t_0 \geqslant 0$$

(последнее возможно в силу условия 2) теоремы). В таком случае из (2.7) и (2.11) при $t \in (t_0, T)$ следует

$$(2.14)\qquad \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\| < \varepsilon e^{-\gamma(t - t_0)}, \quad \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\| < \varepsilon$$

Итак, во всем промежутке времени, в течение которого выполняются условия (2.6), имеют место неравенства (2.14). Но поскольку $\varepsilon < \beta$, то неравенства (2.14) справедливы при всех $t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Замечание. Условие 3) теоремы 1, как видно из приведенного доказательства, обеспечивает свойство равномерной по t_0 устойчивости нулевого решения системы (1.6) при постоянно действующих возмущениях $\mathbf{r}(t, \mathbf{y})$, удовлетворяющих в области $t \geqslant t_0$, $\|\mathbf{y}\| \leqslant \beta > 0$ неравенству $\|\mathbf{r}(t, \mathbf{y})\| \leqslant \delta \exp[-\gamma(t - t_0)]$, где $\delta > 0$ — сколь угодно мало, а $\gamma = \text{const} > 0$.

3. В теореме 1 труднопроверяемым является условие 3). В некоторых частных случаях от этого условия удается освободиться.

Теорема 2. Предположим, что

1) нулевое решение системы (1.4) экспоненциально-асимптотически устойчиво;

2) нулевое решение системы

$$(3.1)\qquad \mathbf{y}^{*\cdot} = R(t)\mathbf{y}^*$$

устойчиво равномерно по t_0;

3) функция $\mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y})$ удовлетворяет условиям

$$(3.2)\qquad \|\mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y})\| \leqslant \varphi(t)\|\mathbf{y}\|, \quad \int_0^\infty \varphi(t)\,dt = D < \infty$$

Тогда невозмущенное движение системы (1.1) равномерно устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически x-устойчиво при любых удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.3) функциях $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$.

Доказательство. Начальная часть доказательства теоремы 1, включая оценку (2.8), в данном случае полностью сохраняется. Функция $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, рассматриваемая как решение системы

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^\cdot = R(t)\mathbf{y} + \mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) + Q(t)\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \\ + \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))\end{aligned}$$

может быть представлена формулой Коши [5]

$$\mathbf{y}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \Omega(t;\, t_0)\,\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \Omega(t;\, \tau)\,[\mathbf{Y}^\circ(\tau;\, \mathbf{y}(\tau;\, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) + Q(\tau)\,\mathbf{x}(\tau;\, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \mathbf{Y}(\tau, \mathbf{x}(\tau;\, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0),\ \mathbf{y}(\tau;\, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))]\,d\tau \tag{3.3}$$

где $\Omega(t;\, t_0)$ — фундаментальная матрица решений системы (3.1), $\Omega(t_0;\, t_0) = E$. Условие 2) теоремы эквивалентно [5] неравенству

$$\|\Omega(t;\, t_0)\| \leqslant N = \mathrm{const} \quad \text{при } t \geqslant t_0,\ t_0 \geqslant 0 \tag{3.4}$$

Из (3.3) на основании (3.4), (3.2), (2.7), (2.8) и (2.10) следует

$$\|\mathbf{y}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\| \leqslant N\|\mathbf{y}_0\| + N\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\|\mathbf{y}(\tau;\, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\|\,d\tau +$$

$$+ N(Mc_2 + c_3)\|\mathbf{x}_0\|\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(\tau - t_0)}d\tau \leqslant N\,[\|\mathbf{y}_0\| + (Mc_2 + c_3)\,\gamma^{-1}\|\mathbf{x}_0\|] +$$

$$+ N\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\|\mathbf{y}(\tau;\, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\|\,d\tau, \quad t \in (t_0, T)$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла — Беллмана [5,6] и учитывая (3.2), получаем

$$\|\mathbf{y}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\| \leqslant N\,[\|\mathbf{y}_0\| + (Mc_2 + c_3)\,\gamma^{-1}\|\mathbf{x}_0\|] \times$$

$$\times \exp\left[N\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau\right] \leqslant N\,[\|\mathbf{y}_0\| + (Mc_2 + c_3)\,\gamma^{-1}\|\mathbf{x}_0\|]\,e^{DN}$$

Доказательство завершается аналогично теореме 1.

Замечание. Из условий 2) и 3) теоремы 2 вытекает равномерная устойчивость нулевого решения системы (1.6), что доказывается с помощью формулы Коши и леммы Гронуолла — Беллмана аналогично предыдущему.

Пусть, в частности, $\mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y}) \equiv 0$; при этом системы (1.1) и (1.6) принимают соответственно вид (3.5) и (3.1)

$$\mathbf{y}^\bullet = Q(t)\,\mathbf{x} + R(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}^\bullet = P(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{3.5}$$

Из теоремы 2 при $\varphi(t) \equiv 0$ вытекает

Теорема 3. Предположим, что нулевое решение системы (1.4) экспоненциально-асимптотически устойчиво, а нулевое решение системы (3.1) устойчиво равномерно по t_0. Тогда невозмущенное движение системы (3.5) равномерно устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически $\mathbf{x}$-устойчиво при любых удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.3) функциях $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$.

Замечания. 1) Утверждение теоремы 3 перестает быть верным, если устойчивость нулевого решения системы (3.1) не равномерна по t_0, что показывает пример, построенный Перроном [2, 6].

2) В случае, когда матрицы P, Q и R постоянны, теорема 3 переходит в теорему 1 работы [1].

От условия 3) теоремы 1 можно освободиться и в случае, когда равномерная устойчивость нулевого решения системы (1.6) (см. условие 2) теоремы 1) обнаруживается с помощью функции Ляпунова с надлежащими свойствами.

Пусть $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\psi}$ — векторы пространства $\mathbf{R}^m$. Пишут $\boldsymbol{\omega} \leqslant \boldsymbol{\psi}$, если $\omega_i \leqslant \psi_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Предположим, что существует вектор-функция $\mathbf{v}(t, \mathbf{y}^*) = (v_1(t, \mathbf{y}^*), \ldots, v_m(t, \mathbf{y}^*))$, такая, что:

1) $\mathbf{v}$ и производная $\mathbf{v}^\cdot$ в силу системы (1.6) непрерывны, $\mathbf{v}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{v}^\cdot(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$;

2) для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant m$, $v_1 \geqslant 0, \ldots, v_l \geqslant 0$, а

$$v_1(t, \mathbf{y}^*) + \ldots + v_l(t, \mathbf{y}^*) \geqslant a(\|\mathbf{y}^*\|)$$

где $a(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, $a(0) = 0$;

3) частные производные $\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{y}^*$ удовлетворяют условиям

$$\|\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{y}^*\| \leqslant \varphi(t) \tag{3.6}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t) e^{-\gamma(t-t_0)} dt < D = \text{const} \quad \text{при всех } t_0 \geqslant 0 \tag{3.7}$$

4) производная $\mathbf{v}^{\cdot\cdot}$ в силу (1.6) удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{v}^\cdot(t, \mathbf{y}^*) \leqslant \mathbf{f}(t, \mathbf{v}(t, \mathbf{y}^*)) \tag{3.8}$$

5) вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{v})$ определена и непрерывна в области

$$t \geqslant 0, \ \|\mathbf{v}\| < R, \quad v_1 \geqslant 0, \ldots v_l \geqslant 0 \tag{3.9}$$

где $R = \infty$ или $R > \sup [\|\mathbf{v}(t, \mathbf{y}^*)\| : t \geqslant 0, \|\mathbf{y}^*\| < H]$;

6) в области (3.9) из $\mathbf{v}^* \leqslant \mathbf{v}^{**}$ следует $\mathbf{f}(t, \mathbf{v}^*) \leqslant \mathbf{f}(t, \mathbf{v}^{**})$; кроме того, $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$;

7) $\mathbf{v}(t, \mathbf{y}^*) \to 0$ при $\|\mathbf{y}^*\| \to 0$ равномерно по $t \geqslant 0$. Рассмотрим систему сравнения

$$\boldsymbol{\omega}^\cdot = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\omega}) \tag{3.10}$$

и обозначим через $\boldsymbol{\alpha} = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$.

Теорема 4. Предположим, что нулевое решение системы (1.4) экспоненциально-асимптотически устойчиво и существует вектор-функция $\mathbf{v}(t, \mathbf{y}^*)$, удовлетворяющая условиям 1) — 7). Если нулевое решение системы (3.10) при условиях $\omega_{10} \geqslant 0, \ldots, \omega_{l0} \geqslant 0$ $\boldsymbol{\alpha}$-устойчиво равномерно по t_0, то невозмущенное движение системы (1.1) равномерно устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически $\mathbf{x}$-устойчиво при любых удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.3) функциях $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$.

Доказательство. Начальная часть доказательства теоремы 1, включая оценку (2.8), сохраняется. Производная $d\mathbf{v}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))/dt$ на основании (3.8), (3.6), (2.5), (2.7), (2.8) и (2.10) удовлетворяет неравенству

$$\begin{gathered} d\mathbf{v}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))/dt < \mathbf{f}(t, \mathbf{v}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))) + \\ + \varphi(t) e^{-\gamma(t-t_0)} (Mc_2 + c_3) \delta\mathbf{b}, \quad t \in (t_0, T) \end{gathered} \tag{3.11}$$

где $\mathbf{b} = (1, \ldots, 1)$. Рассмотрим соответствующую неравенству (3.11) систему сравнения

$$\omega^{*\cdot} = \mathbf{f}(t, \omega^*) + \varphi(t) e^{-\gamma(t-t_0)} H\delta\mathbf{b}, \quad H = Mc_2 + c_3 \tag{3.12}$$

Обозначим через $\omega(t; t_0, \omega_0)$ и $\omega^*(t; t_0, \omega_0^*)$ решения систем (3.10) и (3.12). Покажем, что неравенство

$$\omega^*(t; t_0, \omega_0) < \omega(t; t_0, \omega_0 + HD\delta\mathbf{b}) \tag{3.13}$$

выполняется в каждом интервале (t_0, τ), на котором определены входящие в (3.13) решения. Допустим, от противного, что имеет место соотношение

$$\omega^*(t; t_0, \omega_0) < \omega(t; t_0, \omega_0 + HD\delta\mathbf{b}), \quad t \in (t_0, t_1) \subset (t_0, \tau) \tag{3.14}$$

и для некоторого i

$$\omega_i^*(t_1; t_0, \omega_0) = \omega_i(t_1; t_0, \omega_0 + HD\delta\mathbf{b}) \tag{3.15}$$

На основании (3.12), (3.14), (3.7) и свойства 6) имеем

$$\omega^*(t_1; t_0, \omega_0) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(t, \omega^*(t; t_0, \omega_0))\,dt + H\delta\mathbf{b}\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\, e^{-\gamma(t-t_0)}\,dt <$$

$$< \omega_0 + HD\delta\mathbf{b} + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(t, \omega(t; t_0, \omega_0 + HD\delta\mathbf{b}))dt = \omega(t_1; t_0, \omega_0 + HD\delta\mathbf{b})$$

что противоречит равенству (3.15). Итак, неравенство (3.13) доказано.

Пусть дано произвольное ε, $0 < \varepsilon < \beta$ (см. (2.3)). По условию существует $\lambda(\varepsilon) > 0$, такое, что при $\omega_{10} \geqslant 0, \ldots, \omega_{l0} \geqslant 0$ из (3.16) следует (3.17)

$$\sum_{s=1}^{m} |\omega_{s0}| < \lambda \tag{3.16}$$

$$\sum_{s=1}^{l} |\omega_s(t; t_0, \omega_0)| < a(\varepsilon) \quad \text{при } t \geqslant t_0, \ t_0 \geqslant 0 \tag{3.17}$$

По числу $\lambda(\varepsilon)$ в силу свойства 7) можно выбрать $\delta(\lambda(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что в области (2.5) выполняется неравенство

$$\| \mathbf{v}(t_0, \mathbf{y}_0) \| + HD\delta \| \mathbf{b} \| < \lambda \tag{3.18}$$

Учитывая, что условие 6) более сильное, чем условие Важевского [7], и принимая во внимание неравенство (3.13), аналогично [8] легко показать, что из (2.5) следует $\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \| < \varepsilon$ при $t \in (t_0, T)$. Считая $\delta < c_2^{-1}\varepsilon$, из (2.7) выводим, что во всем промежутке времени, в течение которого выполнены условия (2.6) имеют место неравенства (2.14). Но поскольку $\varepsilon < \beta$, то неравенства (2.14) справедливы при всех $t \geqslant t_0$, что и требовалось доказать.

Замечания. 1) В частном случае, когда $m = 1$, $f_1 \equiv 0$, $\varphi(t) = N = \mathrm{const}$, из теоремы 4 вытекает теорема Е. И. Дыхмана [9]. В связи с этим отметим, что в общем случае равномерной устойчивости не удается [3] доказать существование определенно-положительной функции v с постоянно отрицательной производной $v^\cdot$, которая имеет ограниченные производные $\partial v / \partial y_i$.

2) В теореме 4 можно отказаться от гладкости функции v, заменив условие (3.6) более слабым

$$\| \mathbf{v}(t, \mathbf{y}^*) - \mathbf{v}(t, \mathbf{y}^{**}) \| \leqslant \varphi(t) \| \mathbf{y}^* - \mathbf{y}^{**} \|$$

При этом под $\mathbf{v}^{\cdot}$ следует понимать обобщенную производную (см., например, [5, 10, 11]).

4. Рассмотрим вопрос о неустойчивости.

Теорема 5. Предположим, что нулевое решение системы (1.6) неустойчиво. Тогда невозмущенное движение системы (1.1) y-неустойчиво при любых удовлетворяющих условию (1.2) функциях Y, X.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 работы [1].

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 18 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Озиранер А. С.* Об устойчивости движения в критических случаях. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
4. *Алексеев В. М.* Об одной оценке возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений. I. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1961, № 2.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
6. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
7. *Wazewski T.* Systèmes des équations et des inegalités differentielle ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications. Ann. Soc. polon. math., 1950, vol. 23, p. 112—166.
8. *Матросов В. М.* К теории устойчивости движения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
9. *Дыхман Е. И.* Некоторые теоремы устойчивости., Изв. АН КазССР. Сер. матем., механ., 1950, вып. 4.
10. *Йосидзава Т.* Функция Ляпунова и ограниченность решений. Математика, Сб. перев., 1965, т. 9, № 5.
11. *Corduneanu C.* Sur la stabilité partielle. Rev. roumaine math. pures et appl. 1964, vol. 9, No. 3, p. 229—236.